تأليف

أ. كولموغوروف س. فومين

مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي

تعريب

ابو بكر خالد سعد الله

المدرسة العليا للأساتذة



دِيوَانُ المَطْبُوعَاتِ الجَامِعِيَّةِ - الجَزَائِرُ

المقدمة (*)

ادخل في أواخر الأربعينات مقرر «جديد» سمّيَ «التحليل III» على برنامج كلية الرياضيات في جامعة الدولة بموسكو. وقد احتوى هذا المقرر على مبادئ في نظرية القياس ونظرية التوابع والمعادلات التكاملية ونظرية فضاءات باناخ ومسائل اخرى. كان هذا المقرر الذي قمنا بتدريس محتواه خلال سنوات عديدة مصدر هذا الكتاب (**). ثم ادخل مقرر «التحليل III» بعد أن ظهر بجامعة موسكو وحدها، ضمن برامج جامعات اخرى.

اهتممنا في هذا الكتاب بتقديم عرض فريد للمسائل العامة المتعلقة بنظرية المجموعات ونظرية القياس والمكاملة وكذا بعض الأفكار والطرق العامة المستخدمة في التحليل التابعي. وقد سعينا بجانب ذلك، إلى منح أهمية معتبرة للمسائل الأقل تجريداً المطروحة في التحليل التقليدي، بما فيها تلك التي تطرح في الرياضيات التطبيقية حيث تجد المسائل المذكورة أعلاه تطبيقاتها.

يتماشى هذا الكتاب، في خطوطه العريضة، مع محتوى مقرر «التحليل III» التي تبنته حالياً الجامعات السوفياتية.

خصصنا، إلى جانب العديد من المسائل، مكانة معتبرة لنظرية القياس العامة. وينبغي أن نشير في هذا الاطار إلى أنه قد ظهر حديثاً عدد كبير من

(*) تُرجم هذا الكتاب عن الطبعة الفرنسية الصادرة سنة 1977 عن دار مير بموسكو. (المترجم).

(**) تضم النسخة الأصلية لهذا الكتاب (الذي وضع أول مرة سنة 1954 وترجم إلى الأنكليزية سنة 1957) جزءاً ضئيلاً جداً من محتواه الحالي. (المترجم).

المؤلفات التي تتناول نظرية المكاملة انطلاقاً من منوال دانيال وذلك دون اللجوء إلى نظرية القياس. وفي اعتقادنا أن نظرية القياس الواسعة الاستعمال في النظرية الأرغودية (الاحتمالية) وفي نظرية الطرق العشوائية، الخ، تعتبر في حد ذاتها بالغة الأهمية بغض النظر عن دورها في مسألة ادخال مفهوم التكامل؛ وعليه فهي جديرة بأن تكون ضمن مقرر جامعي إجباري.

أما متطلبات فهم محتوى هذا الكتاب فهي الإلمام بالتحليل الرياضي الأولي واسس الجبر الخطي.

نشير إلى أن نص الترجمة الفرنسية لهذا الكتاب قد تمت مراجعته بعناية كبيرة، كما صححت فيه الأخطاء المطبعية وصوّبت أيضاً النقائص التي برزت في العرض.

لا يفوتنا هنا أن نوجه شكرنا إلى ف.أ. مدفيداف (V. A. Medvedev) محرر الطبعة الفرنسية للمساعدة الهامة التي قدمها الينا في هذا العمل.

س. فومين
S. Fomine

أ. كولموغوروف
A. Kolmogorov

ديسمبر 1973

الفصل الأول

مبادئ في نظرية المجموعات

§ 1. مفهوم المجموعة . عمليات على المجموعات

1. عموميات .

نجد في الرياضيات مجموعات جد متنوعة من حيث طبيعتها . نذكر على سبيل المثال ، مجموعة وجوه متعدد الوجوه ، ومجموعة نقاط مستقيم ، ومجموعة الأعداد الطبيعية ، الخ . إن مفهوم المجموعة مفهوم عام جداً بشكل يجعل من الصعب إيجاد تعريف له خال من تعويض كلمة «مجموعة» بكلمة مرادفة لها : كجملة وتجمع ومنظومة عناصر ، الخ .

إن الدور الذي يلعبه مفهوم المجموعة في الرياضيات الحديثة دور أساسي ، وذلك ليس فحسب لكون نظرية المجموعات أصبحت الآن أختصاصاً جد متطور ، بل للتأثير الكبير الذي تمارسهُ هذه النظرية ، وليدة أواخر القرن الماضي ، على كافة الفروع الرياضية . إننا لا ننوي في هذا المقام تقديم عرض كامل حول نظرية المجموعات بل همنا الوحيد هو ادخال الرموز الرئيسية وتعريف المفاهيم الأولية جداً التي سنستخدمها في المستقبل .

نرمز فيما يلي للمجموعات بحروف كبيرة : A ، B ، . . . ونرمز لعناصرها بحروف صغيرة : a ، b ، . . . تكتب القضية «العنصر a ينتمي إلى المجموعة A» بشكل رمزي كالتالي : $a \in A$ أو $A \ni a$ ؛ أما الكتابة $a \notin A$ (أو $A \not\ni a$) فتعني أن العنصر a لا ينتمي إلى A . إذا كانت كل عناصر المجموعة A تنتمي أيضاً إلى المجموعة B (قد يكون $A = B$) نقول أن A مجموعة جزئية أو جزء من المجموعة B ونكتب $A \subset B$. إن مجموعة الأعداد الصحيحة ، مثلاً ، مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

يحدث أحياناً ألاّ نعرف مسبقاً فيما إذا كانت مجموعة ما (مجموعة جذور

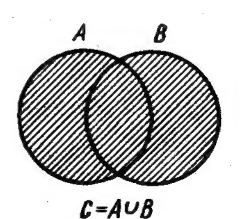
معادلة، مثلاً) تحوي عنصراً واحداً على الأقل. ولذا من المفيد أن نلتفت إلى المجموعات التي لا تحوي أي عنصر؛ تسمى مجموعة من هذا النوع مجموعة خالية ونرمز لها بِـΦ. نلاحظ أن المجموعة Φ مجموعة جزئية من أية مجموعة أخرى.

2. عمليات على المجموعات.

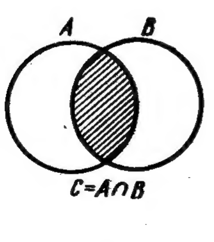
لتكن A وَ B مجموعتين كيفيتين؛ نعرّف اتحاد أو مجموع A وَ B على أنه المجموعة $C = A \cup B$ المؤلفة من العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين A وَ B على الأقل (الرسم 1).

نعرّف بطريقة مماثلة اتحاد عدد كيفي (منته أو غير منته) من المجموعات: إذا كانت A_α هي المجموعات المعتبرة، فإن اتحادها $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى احدى المجموعات A_α على الأقل.

نعرّف تقاطع مجموعتين A وَ B على أنه المجموعة $C = A \cap B$ المؤلفة من العناصر المنتمية في آن واحد إلى A وإلى B (الرسم 2). إذا اعتبرنا مثلاً مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ومجموعة الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على 3 وجدنا أن تقاطعهما هو مجموعة الأعداد الصحيحة القابلة للقسمة على 6. أما تعريف تقاطع عدد كيفي (منته أو غير منته) من المجموعات A_α فهو تعريفا المجموعة $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ المؤلفة من العناصر المنتمية في آن واحد إلى كل المجموعات A_α.



الرسم 1



الرسم 2

تبين التعاريف السابقة ان اتحاد وتقاطع المجموعات عمليتان تبديليتان وتجميعيتان أي ان:

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

من جهة اخرى نشير إلى ان كل من العمليتين توزيعية بالنسبة للأخرى:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{2}$$

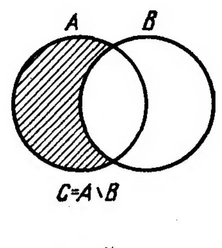
لنبرهن مثلاً على العلاقة الأولى[1]. ليكن x عنصراً من المجموعة الواقعة في الطرف الأيسر من (1)، أي أن $x \in (A \cup B) \cap C$. إن ذلك يعني بأن x ينتمي إلى احدى المجموعتين A و B على الأقل وينتمي إلى C. ومنه يتبين ان x ينتمي إلى احدى المجموعتين $A \cap C$ وَ $B \cap C$ على الأقل، أي أنه ينتمي إلى الطرف الأيمن من (1). بخصوص الإحتواء في الإتجاه الثاني نعتبر عنصراً x ينتمي إلى $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. نجد عندئذٍ أن $x \in A \cap C$ أو $x \in B \cap C$، وبالتالي فإن x ينتمي إلى C وإلى إحدى المجموعتين A وَ B على الأقل، أي أن $x \in C$ وَ $x \in A \cup B$، ومنه $x \in (A \cup B) \cap C$. وهكذا يتم البرهان على المساواة (1). أما البرهان على المساواة (2) فهو مماثل للسابق.

نعرّف الآن عملية الطرح على المجموعات. الفرق بين مجموعتين A وَ B هو تعريفاً المجموعة $C = A \backslash B$ المؤلفة من عناصر A التي لا تنتمي إلى B (الرسم 3). ليس من الضروري عموماً أن يكون $A \supset B$. نكتب أحياناً $A - B$ بدل $A \backslash B$.

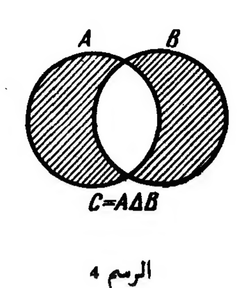
من اللائق احياناً (في نظرية القياس مثلاً) أن نستعمل الفرق التناظري لمجموعتين A وَ B، وهو تعريفاً اتحاد الفرقين $A \backslash B$ وَ $B \backslash A$ (الرسم 4).

---

(1) تعني المساواة بين مجموعتين: $A = B$ ان كل عنصر من A ينتمي إلى B والعكس بالعكس. أي أن المساواة $A = B$ تكافئ الاحتواءين معاً: $A \subset B$ وَ $B \subset A$.



الرسم 3



الرسم 4

نرمز للفرق التناظري لمجموعتين A وَ B بِـ $A \Delta B$. وهكذا يأتي ، تعريفاً :

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

تمرين . أثبت أن :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

كثيراً ما نلجأ إلى اعتبار مجموعات كلها أجزاء من نفس المجموعة S (المرجع) . تلك هي الحالة التي نجدها مثلاً عند اعتبار مجموعات عناصرها نقاط من المستقيم العددي . يسمى الفرق $S \backslash A$ في هذه الحالة متمم المجموعة A ونرمز له بِـ CA أو A' .

نلجأ عادة في نظرية المجموعات وتطبيقاتها إلى مبدأ بالغ الأهمية ويسمى مبدأ الثنوية وهو يعتمد على العلاقتين التاليتين :

1. متمم الاتحاد يساوي تقاطع المتممات :

$$S \backslash \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (S \backslash A_{\alpha}) \tag{3}$$

2. متمم التقاطع يساوي اتحاد المتممات :

$$S \backslash \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (S \backslash A_{\alpha}) \tag{4}$$

ينحصر مبدأ الثُنوية فيما يلي : يمكن الحصول بصفة آلية من كل مساواة متعلقة باجزاء مجموعة المرجع S ، على مساواة اخرى تدعى ثنوية المساواة

الأولى، وذلك باستبدال كل المجموعات المعتبرة بمتماتها، وباستبدال الاتحادات بالتقاطعات، والتقاطعات بالاتحادات. يجد القارئ مثالاً تطبيقياً لهذا المبدأ ضمن 2 § من الفصل الثاني ويتمثل ذلك في استنتاج النظرية ′3 من النظرية 3.

لنثبت العلاقة (3).

ليكن $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. يعني ذلك أن x لا ينتمي إلى الاتحاد $\bigcup_\alpha A_\alpha$ أي أنه لا ينتمي إلى أية مجموعة من المجموعات A_α. ومنه ينتج أن x ينتمي إلى كل المتممات $S \setminus A_\alpha$ وبالتالي: $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. والعكس بالعكس، نفرض ان $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$ أي أن x ينتمي إلى كل مجموعة من المجموعات $S \setminus A_\alpha$؛ وبالتالي فإن x لا ينتمي لأية مجموعة من المجموعات A_α أي أنه لا ينتمي إلى اتحادها $\bigcup_\alpha A_\alpha$ ولذا $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. وبذلك ينتهي البرهان على المساواة (3). أما برهان العلاقة (4) فهو يماثل البرهان السابق. (أتم هذا البرهان).

نلاحظ أن تسمية «الفرق التناظري» التي ادخلناها للتعبير عن العملية $A \Delta B$ ليست جد معبرة؛ إن هذه العملية تماثل، في العديد من الجوانب، اتحاد مجموعتين $A \cup B$. ذلك أن العبارة $A \cup B$ تعني أن القضيتين «العنصر ينتمي إلى A» «والعنصر ينتمي إلى B» مرتبطتان بـ «أو» «الشاملة» اما العبارة $A \Delta B$ فتعني أن القضيتين السابقتين مرتبطتان بـ «أو» «المانعة»: يكون عنصر x منتمياً إلى $A \Delta B$ إذا وفقط إذا انتمى إلى A فقط أو إلى B فقط. يمكن أن نسمي المجموعة $A \Delta B$ «الإتحاد وفق اثنين» لِـ A وَ B (نأخذ اتحاد هاتين المجموعتين لكننا نبعد العناصر التي نلقاها مرتين).

2 §. التطبيقات. تجزئة مجموعة

1. تطبيق من مجموعة في أخرى. المفهوم العام للتابع.

نعرّف في التحليل الرياضي مفهوم التابع كالتالي: لتكن X مجموعة جزئية كيفية من المستقيم العددي. نقول اننا عرّفنا على هذه المجموعة تابعاً f إذا

الحقنا بكل عدد $x \in X$ عدداً فريداً معيناً تعييناً جيداً $y = f(x)$. نسمي المجموعة X ساحة تعريف التابع f؛ وتسمى مجموعة القيم Y التي يأخذها هذا التابع ساحة قيم f.

إذا استبدلنا المجموعات العددية بمجموعات ذات طبيعة كيفية فإن ذلك يؤدي بنا إلى أشمل مفهوم للتابع. لتكن M وَ N مجموعتين كيفيتين. نقول أننا عرّفنا على M تابعاً f قيمه في N إذا الحقنا بكل عنصر x من M عنصراً وحيداً y من N . في حالة اعتبار مجموعات ذات طبيعة كيفية (بما في ذلك المجموعات العددية) فإننا نستعمل عادة كلمة «تطبيق» بدل كلمة «تابع» ونتكلم عندئذٍ عن تطبيق من مجموعة في مجموعة اخرى. نشير إلى أن تحديد المجموعتين M وَ N يمكننا من الحصول على انواع مختلفة من التوابع لها تسميات خاصة، مثل «التابع الشعاعي» و «القياس» و «التابعية» و «المؤثر» الخ. سنعود إلى هذا الموضوع في المستقبل.

نرمز لتابع (تطبيق) من M في N عادة بالكتابة:

$$f: M \to N$$

إذا كان a عنصراً من M نقول عن العنصر $b = f(a)$ الملحق به في N، أنه صورة a بواسطة (أو بِـ أو في) التطبيق f. أما مجموعة العناصر a من M التي صورتها b في N فتسمى الصورة العكسية لِـ b ونرمز لها بِـ $f^{-1}(b)$.

ليكن A جزءاً من M؛ تسمى المجموعة $\{f(a), a \in A\}$ المؤلفة من كل العناصر $f(a)$ حيث $a \in A$، صورة A ونرمز لها بِـ $f(A)$. كما نعرّف الصورة العكسية $f^{-1}(B)$ لكل جزء B من N: وهي مجموعة عناصر M التي تنتمي صورها إلى B. يحدث أحياناً ألّا يوجد أي عنصر في M صورته في B بواسطة f؛ تكون المجموعة $f^{-1}(B)$ في هذه الحالة مجموعة خالية.

نقتصر فيما يلي على دراسة الخاصيات العامة جداً للتطبيقات. ونبدأ بتبني الاصطلاح التالي. نقول عن f إنه تطبيق من المجموعة M «على» المجموعة N إذا كان $f(M) = N$ ونقول أيضاً عن مثل هذا التطبيق إنه غامر. أما في الحالة العامة أي عندما يكون $f(M) \subset N$ فنقول ان f تطبيق من M «في» N.

إذا كانت الصورتان $y_1 = f(x_1)$ وَ $y_2 = f(x_2)$ مختلفتين مهما كان العنصران المختلفان x_1 وَ x_2 في M ، فإننا نقول عن التطبيق f أنه متباين (أو تباين) .

دعنا الآن نبرهن على الخاصيات الأساسية للتطبيقات :

نظرية 1. إن الصورة العكسية لإتحاد مجموعتين تساوي اتحاد صورتيهما العكسيتين :

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) .$$

البرهان. ليكن x عنصراً من المجموعة $f^{-1}(A \cup B)$. يعني ذلك ان $f(x) \in A \cup B$ أي أن $f(x) \in A$ أو $f(x) \in B$. من ذلك يأتي أن x ينتمي على الأقل لإحدى المجموعتين $f^{-1}(A)$ وَ $f^{-1}(B)$ ، أي أن : $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
بخصوص القضية العكسية ، إذا كان x منتمياً إلى $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ فإنه ينتمي على الأقل إلى احدى المجموعتين $f^{-1}(A)$ وَ $f^{-1}(B)$؛ وهذا يعني أن $f(x)$ ينتمي على الأقل إلى احدى المجموعتين A وَ B ، إذن $f(x) \in A \cup B$ ، ومنه ينتج $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

نظرية 2. إن الصورة العكسية لتقاطع مجموعتين تساوي تقاطع الصورتين العكسيتين :

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

البرهان. إذا كان $x \in f^{-1}(A \cap B)$ فإن $f(x) \in A \cap B$ أي $f(x) \in A$ وَ $f(x) \in B$ ، لكن $x \in f^{-1}(A)$ وَ $x \in f^{-1}(B)$ ، أي $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

بخصوص القضية العكسية ، إذا كان $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ فإن $x \in f^{-1}(A)$ وَ $x \in f^{-1}(B)$. وبالتالي $f(x) \in A$ وَ $f(x) \in B$ ، أي $f(x) \in A \cap B$ ، ومنه ينتج أن $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

نشير إلى ان النظريتين 1 وَ 2 تبقى قائمتين حتى ولو كان عدد المجموعات

المعتبرة عدد كيفي (منته أو غير منته) ؛ والأمر كذلك فيما يخص النظرية التالية.

نظرية 3. إن صورة اتحاد مجموعتين تساوي اتحاد صورتيهما:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

البرهان. إذا كان $y \in f(A \cup B)$ فإن ذلك يعني أن $y = f(x)$ ، حيث x عنصر ينتمي إلى احدى المجموعتين A وَ B على الأقل. وبالتالي: $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. بخصوص القضية العكسية، إذا كان $y \in f(A) \cup f(B)$ فإن $y = f(x)$ حيث x ينتمي إلى احدى المجموعتين A وَ B على الأقل، أي أن $x \in A \cup B$ وبالتالي $y = f(x) \in (A \cup B)$.

نلاحظ أن صورة تقاطع مجموعتين لا تساوي عموماً تقاطع صورتيهما. فإذا اعتبرنا مثلاً التطبيق المساوي للمسقط المستوي على المحور (x) لوجدنا أن قطعتي المستقيم: $(y = 0 ، 0 \leq x \leq 1)$ وَ $(y = 1 ، 0 \leq x \leq 1)$ لا يشتركان في أية نقطة أما صورتاهما فتساويتان.

تمرين. برهن أن الصورة العكسية لمتمم مجموعة تساوي متمم الصورة العكسية للمجموعة المعتبرة. هل القضية المماثلة للسابقة صحيحة من أجل صورة المتمم؟

2. تجزئة مجموعة. علاقة التكافؤ.

نتعرض في العديد من المسائل إلى تقسيم مجموعة ما إلى اجزاء منفصلة مثنى مثنى (أي أن تقاطع كل جزءين مجموعة خالية). فمثلاً يمكن اعتبار المستوى (بصفتة مجموعة نقاط) وتقسيمه إلى مستقيات موازية للمحور (x) ، كما يمكن اعتبار الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة كاتحاد سطوح كرات لها نفس المركز وانصاف اقطارها r مختلفة (بما في ذلك $r = 0$) ، ويمكن تقسيم سكان مدينة إلى مجموعات حسب سنة ميلاد كل ساكن، الخ.

كلما استطعنا تمثيل مجموعة M، بأية طريقة كانت، على شكل اتحاد مجموعات جزئية من M منفصلة مثنى مثنى، نقول أن المجموعة M مقسمة إلى صفوف أو أننا حصلنا على تجزئة المجموعة M (إلى صفوف).

جرت العادة أن نتعرض إلى تجزئات ينبغي الحصول عليها طبق مقياس يحدد كيفية تقسيم عناصر المجموعة M إلى صفوف. فمجموعة مثلثات المستوى، مثلاً، يمكن تقسيمها إلى صفوف مثلثات متساوية، أو إلى صفوف مثلثات لها نفس المساحة؛ كما أن مجموعة التوابع ذات متغير واحد يمكن تقسيمها إلى صفوف، بحيث يحتوي كل صف على التوابع التي تأخذ نفس القيمة عند نقطة معينة، الخ.

إن المقاييس التي تعين كيفية تقسيم عناصر مجموعة إلى صفوف، يمكن أن تكون مختلفة من حيث طبيعتها. ورغم ذلك فهذه المقاييس ليست كيفية عفوية. لنفرض مثلاً اننا نريد تقسيم الأعداد الحقيقية إلى صفوف بحيث يكون العدد b والعدد a في نفس الصف إذا وفقط إذا كان $b > a$. من الواضح أن هذه التجزئة للأعداد الحقيقية مستحيلة لأنه إذا كان $b > a$ فيجب أن ينتمي b للصف الذي ينتمي اليه a، ومن جهة اخرى إذا كان $a < b$ فلا يمكن أن ينتمي a للصف الذي ينتمي اليه b. بالإضافة إلى ذلك، بما أنه لا يمكن أن يكون a أكبر من نفسه فإنه يستحيل أن ينتمي a للصف الذي ينتمي اليه a!! وهذا مثال آخر: لنحاول تعريف تجزئة مجموعة نقاط المستوى بحيث تكون نقطتان منتميتين إلى نفس الصف إذا وفقط إذا كانت المسافة بين a وَ b اصغر من 1. من الواضح أن ذلك مستحيل لأنه إذا كانت المسافة بين a وَ b اصغر من 1 والمسافة بين b وَ c اصغر من 1 فهذا لا يؤدي بالضرورة إلى أن المسافة بين a وَ c اصغر من 1. إذن إذا انتمت a وَ b لنفس الصف وانتمت b وَ c لنفس الصف فإنه يمكن أن يحدث أن تكون نقطتان منتميتين لنفس الصف مع أن المسافة بينهما أكبر من 1.

توحي لنا الأمثلة السابقة بالشروط التي ينبغي أن تتوفر حتى يكون مقياس ما قادراً بالفعل على تقسيم عناصر مجموعة إلى صفوف.

لتكن M مجموعة ما. نفرض أن بعض الثنائيات (a, b) من عناصر هذه المجموعة ثنائيات مرتبة[1]. إذا كانت (a, b) ثنائية مرتبة، نقول أن العنصر a مرتبط بالعنصر b بالعلاقة φ ونكتب $a \underset{\varphi}{\sim} b$. فإذا تعلق الأمر بتجزئة مجموعة مثلثات المستوى إلى صفوف مثلثات من نفس المساحة، مثلاً، فإن الكتابة $a \underset{\varphi}{\sim} b$ تعني أن «المثلث a له مساحة مساوية لمساحة b». نقول عن العلاقة φ انها علاقة تكافؤ إذا تحققت فيها الشروط التالية:

1. الإنعكاس: $a \underset{\varphi}{\sim} a$ مهما كان $M \ni a$

2. التناظر: إذا كان $a \underset{\varphi}{\sim} b$ فإن $b \underset{\varphi}{\sim} a$.

3. التعدي (أو الانتقال): إذا كان $a \underset{\varphi}{\sim} b$ وَ $b \underset{\varphi}{\sim} c$ فإن $a \underset{\varphi}{\sim} c$.

إن هذه الشروط هي الشروط اللازمة والكافية لكي تكون العلاقة φ (وهو المقياس!) قادرة على تقسيم المجموعة M إلى صفوف. ذلك أن كل تجزئة مجموعة M تعرف علاقة تكافؤ بين عناصر M: إذا كانت الكتابة $a \underset{\varphi}{\sim} b$ تعني «a ينتمي إلى الصف الذي ينتمي اليه b» فإن φ انعكاسية وتناظرية ومتعدية وهي خواص من السهل التأكد منها. والعكس إذا كانت φ علاقة تكافؤ معرفة في M ورمزنا بِـ K_a لصف العناصر $M \ni x$ المكافئة للعنصر المعطى a أي أن $a \underset{\varphi}{\sim} x$، فإن خاصية الإنعكاس تبين أن a ينتمي للصف a، ثم انه إذا كان K_a وَ K_b صفين في M فإنهما اما متساويان واما منفصلان (أي $K_b \cap K_a = \Phi$). لنبرهن على ذلك: ليكن c عنصراً منتمياً في آن واحد إلى K_a وإلى K_b، أي أن $c \underset{\varphi}{\sim} a$ وَ $c \underset{\varphi}{\sim} b$. من تناظر φ ينتج $a \underset{\varphi}{\sim} c$ ومن تعديها ينتج:

$$a \underset{\varphi}{\sim} b \tag{1}$$

ثم إذا كان x عنصراً كيفياً من K_a أي إذا كان: $x \underset{\varphi}{\sim} a$ فإن العلاقة (1) وتعدي φ يبينان أن $x \underset{\varphi}{\sim} b$ وهذا يعني أن $x \in K_b$.

(1) أي أننا نأخذ بعين الإعتبار ترتيب العنصرين a وَ b، وهذا يعني أن الثنائيتين (a, b) وَ (b, a) مختلفتان عموماً.

نبين بنفس الطريقة أن كل عنصر y من K_b ينتمي إلى K_a . وبالتالي إذا كان لصفين K_a وَ K_b عنصر مشترك فإنهما متساويان. وهكذا نحصل على تجزئة للمجموعة M إلى صفوف معرفة بعلاقة التكافؤ المعطاة.

إن مفهوم تجزئة مجموعة إلى صفوف ذو ارتباط مباشر مع مفهوم التطبيق الوارد في البند السابق.

ليكن f تطبيقاً من مجموعة A في مجموعة B . إذا وضعنا في نفس الصف كل عناصر A التي لها نفس الصورة في B فإننا نحصل بطبيعة الحال على تجزئة للمجموعة A . والعكس بالعكس، نعتبر مجموعة كيفية A وتجزئة لهذه المجموعة إلى صفوف. لتكن B مجموعة هذه الصفوف. لنلحق بكل عنصر $a \in A$ الصف (أي العنصر من B) الذي ينتمي اليه هذا العنصر ذاته؛ إن ذلك يعرف تطبيقاً من المجموعة A على المجموعة B .

أمثلة. 1. نسقط المستوى (xy) على المحور (x). إن الصور العكسية لنقاط المحور (x) مستقيمات شاقولية. وبالتالي نرى أن التطبيق المعتبر يعرف تجزئة للمستوى إلى مستقيمات متوازية.

2. نقسم نقاط الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة إلى صفوف بوضع كل النقاط التي تفصلها على نقطة البدء نفس المسافة، في نفس الصف. أي أن كل صف ممثل بسطح كرة. يمكن أن نطابق مجموعة كل هذه الصفوف بمجموعة النقاط الواقعة على نصف المحور $(0, \infty)$. وبالتالي فإن تجزئة الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة إلى سطوح كرات ذات مركز مشترك، تعرف تطبيقاً من هذا الفضاء على نصف مستقيم.

3. نضع في نفس الصف كل الأعداد الحقيقية التي لها نفس الجزء العشري. إن التجزئة التي نحصل عليها بهذه الطريقة تعرف تطبيقاً من المستقيم على دائرة

نشير إلى أن علاقة التكافؤ حالة خاصة من مفهوم أعم وهو مفهوم العلاقة الثنائية. لتكن M مجموعة كيفية. نرمز بـ: $M \times M$ أو M^2 للمجموعة

كل الثنائيات المرتبة (a,b) حيث $a \ni M$ وَ $b \ni M$. نقول أننا عرفنا في M علاقة ثنائية φ إذا اخترنا في M^2 مجموعة جزئية كيفية R_φ . بصفة أدق، نقول أن العنصر a مرتبط بالعنصر b بواسطة العلاقة الثنائية φ، ونكتب $a \varphi b$ إذا وفقط إذا كانت الثنائية (a,b) منتمية إلى R_φ . كمثال على العلاقات الثنائية يمكن أن نعتبر علاقة التطابق ε المعرَّفة بالطريقة التالية : لدينا $a \varepsilon b$ إذا وفقط إذا كان $a = b$ ؛ أي انها العلاقة الثنائية المعرَّفة بالقطر Δ في $M \times M$ أي بمجموعة الثنائيات من الشكل (a,a). من الواضح أن كل علاقة تكافؤ φ، معرَّفة في مجموعة M ، علاقة ثنائية تحقق الشروط التالية :

1) القطر Δ من M^2 ينتمي إلى R_φ (الإنعكاس) .

2) إذا كان $(a,b) \in R_\varphi$ فإن $(b,a) \in R_\varphi$ [التناظر] .

3) إذا كان $(a,b) \in R_\varphi$ وَ $(b,c) \in R_\varphi$ فإن $(a,c) \in R_\varphi$ [التعدي] .

وهكذا يتضح أن علاقة التكافؤ علاقة ثنائية انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

سنرى في §4 حالة خاصة وهامة اخرى من حالات العلاقات الثنائية : وهي علاقة الترتيب .

§3. المجموعات المتساوية القوة . قوة مجموعة .

1. المجموعات المنتهية وغير المنتهية .

نلاحظ لدى اعتبار العديد من المجموعات انه يمكننا احياناً تعيين عدد عناصر المجموعة المعطاة على الأقل من الناحية النظرية إذا لم يتم ذلك عملياً . تلك هي حالة مجموعة رؤوس متعدد الوجوه مثلاً ، وكذا حالة مجموعة الأعداد الأولية الأصغر من عدد معطى ، وكذلك مجموعة جزيئيات الماء على الأرض ، الخ . تحتوي كل مجموعة من المجموعات السابقة عدداً منتهياً من العناصر ورغم ذلك فقد لا نستطيع تعيين عدد هذه العناصر . من جهة

اخرى توجد مجموعات عدد عناصرها غير منته. ذلك هو حال مجموعة الأعداد الطبيعية، وكذا مجموعة نقاط مستقيم، ومجموعة دوائر المستوى، ومجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الناطقة، الخ. عندما نقول ان مجموعة ما غير منتهية فذلك يعني أنه يمكن استخراج عنصر من هذه المجموعة، ثم عنصر آخر، ثم عنصر آخر، الخ، وبعد استخراج كل عنصر تبقى في المجموعة المعتبرة عناصر أخرى.

إذا كانت مجموعتان منتهيتين فإنه يمكن مقارنتهما فيما بينهما والنظر فيما إذا كان عددا عناصرهما متساويين أو كانت مجموعة منهما تحوي عناصر أكثر مما تحويه المجموعة الثانية. هناك سؤال يطرح نفسه: هل يمكن القيام بمثل هذه المقارنة عندما يتعلق الأمر بمجموعات غير منتهية؟ بعبارة أخرى هل يعقل أن نتساءل عما إذا كان عدد الدوائر في المستوى، مثلاً، أكبر من عدد النقاط الناطقة على المستقيم العددي، أو، عما إذا كان عدد التوابع المعرَّفة على المجال المغلق [0, 1] مساوياً لعدد المستقيمات في الفضاء، الخ.؟

لنر كيف تتم مقارنة مجموعتين منتهيتين. يمكن، مثلا، أن نعد عناصر كل مجموعة ثم نقارن العددين المحصل عليهما. لكننا نستطيع اتباع طريقة أخرى: نحاول إيجاد تقابل بين عناصر هاتين المجموعتين أي تطبيق يلحق بكل عنصر من المجموعة عنصراً وحيداً من المجموعة الثانية والعكس بالعكس. من الواضح انه يمكن إيجاد تقابل بين مجموعتين منتهيتين إذا وفقط إذا كان عددا عناصرهما متساويين. فلكي نعرف مثلاً فيما إذا كان عدد طلبة فوج مساوياً لعدد مقاعد قاعة الدرس أم لا، يكفي، بدل عد عدد الطلبة وعدد المقاعد ومقارنة هذين العددين فيما بينهما، يكفي أن نطلب من كل طالب أن يجلس على مقعد؛ ثم نلاحظ: إذا جلس كل الطلبة ولم تبق مقاعد شاغرة فذلك يعني أن لدينا تقابلاً بين المجموعتين، ويرجع ذلك لكون هاتين المجموعتين تحويان عددي عناصر متساويين.

نشير الآن إلى أنه إذا كانت الطريقة الأولى (المتمثلة في عد عناصر المجموعات) لا تصلح إلّا من أجل المجموعات المنتهية، فإن الطريقة الثانية (المتمثلة في إيجاد تقابل بين المجموعتين) صالحة سواء كانت المجموعات منتهية أو غير منتهية.

2. المجموعات القابلة للعد.

إن ابسط المجموعات غير المنتهية هي مجموعة الأعداد الطبيعية. نسمي مجموعة قابلة للعد كل مجموعة يمكن أن نجد لها تقابلاً بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية. بعبارة أخرى فإننا نعرف مجموعة قابلة للعد على انها مجموعة يمكن ترقيم عناصرها ووضعها على شكل متتالية غير منتهية: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. لنعرض أمثلة لمجموعات قابلة للعد.

1. مجموعة الأعداد الصحيحة. نعرف تقابلاً بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي:

$$0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \ldots$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots$$

أي أننا نلحق بكل عدد موجب أو منعدم $n \geq 0$ العدد الطبيعي الفردي $2n + 1$، وبكل عدد n سالب $n < 0$ العدد الطبيعي الزوجي $2|n|$:

في حالة $0 \leq n$ $\quad n \leftrightarrow 2n + 1$

في حالة $0 > n$ $\quad n \leftrightarrow 2|n|$

2. مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والزوجية. هناك تقابل واضح وهو: $n \leftrightarrow 2n$.

3. المجموعة: $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ المؤلفة من قوى العدد 2. هناك أيضاً تقابل واضح بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية وهو: $n \leftrightarrow 2^n$

4. نعتبر الآن مثالاً أكثر تعقيداً: لنثبت أن مجموعة الأعداد الناطقة (أو الكسرية) مجموعة قابلة للعد. إنه يمكن أن نمثل كل عدد ناطق، بطريقة وحيدة، على شكل كسر غير قابل للإختصار: $\alpha = \frac{p}{q}$ حيث $q > 0$. ارتفاع العدد الناطق α هو تعريفاً المجموع $|p| + q$. من الواضح أن الكسور ذات الإرتفاع n (حيث n عدد معطى) عددها منته. فالارتفاع 1 مثلاً لا

يمكن أن يبلغه إلّا العدد $\frac{0}{1}$، والإرتفاع 2 لا يبلغه إلّا $\frac{1}{1}$ وَ $\frac{-1}{1}$، والارتفاع 3 لا يبلغه إلّا الأعداد: $\frac{2}{1}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{-2}{1}$، $-\frac{1}{2}$، الخ: لنرتب الأعداد الناطقة حسب الترتيب المتزايد للإرتفاع، أي اننا نضع في المرتبة الأولى الأعداد ذات الارتفاع 1، ثم الأعداد ذات الإرتفاع 2 وهكذا على التوالي. وبما أن ذلك يزود كل عدد ناطق برقم فإننا نحصل على تقابل بين مجموعة الأعداد الناطقة ومجموعة الأعداد الطبيعية.

نعرض فيما يلي بعض الخواص العامة للمجموعات القابلة للعد.

1. كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد مجموعة منتهية أو قابلة للعد.

البرهان. لتكن A مجموعة قابلة للعد و B مجموعة جزئية منها. نرقم عناصر A: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. لتكن $a_{n_1}, a_{n_2}, ...$ عناصر B. إذا كان من بين عناصر B عنصر أكبر من بقية العناصر في B، فإن المجموعة B منتهية، وإلّا فإن B مجموعة قابلة للعد لأن عناصرها مرقمة بواسطة الأعداد الطبيعية $1, 2, ...$.

2. إن كل اتحاد منته أو قابل للعد لمجموعات قابلة للعد مجموعة قابلة للعد.

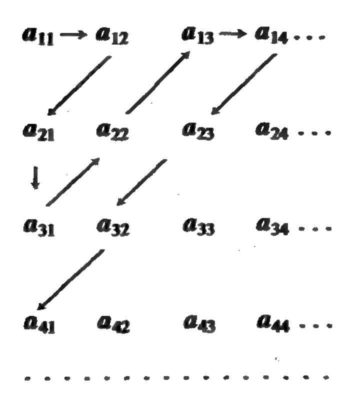
البرهان. لتكن: $A_1, A_2, ...$ مجموعات قابلة للعد. يمكن في جميع الأحوال اعتبار هذه المجموعات منفصلة مثنى مثنى (أي أن تقاطع كل مجموعتين من هذه المجموعات خال) لأنه لو لم يكن الأمر كذلك لكان بإمكاننا اعتبار المجموعات:

$$A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), ...$$

بدل المجموعات المعطاة، والمجموعات الجديدة هذه كلا منتهية أو قابلة للعد، واتحادها يساوي اتحاد المجموعات: $A_1, A_2, ...$. يمكن وضع عناصر المجموعات: $A_1, A_2, ...$ على الشكل الجدولي غير المنتهي التالي:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

حيث يمثل السطر الأول متتالية عناصر A_1 ، ويمثل السطر الثاني متتالية عناصر A_2 ، الخ. نرقم الآن كل هذه العناصر «قطرياً» أي أن a_{11} هو أول عنصر ، و a_{12} ثاني عنصر و a_{21} ثالث عنصر وهكذا على التوالي في الاتجاه الذي تحدده الأسهم الواردة في الجدول :



من الواضح أن هذه الطريقة تزود كل عنصر من المجموعات المعتبرة برقم معين؛ وبذلك نحصل إذن على تقابل بين مجموعة كافة عناصر ... $A_1, A_2,$ ومجموعة الأعداد الطبيعية وهو المطلوب.

تمارين. 1. أثبت أن مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الناطقة مجموعة قابلة للعد.

2. نقول عن عدد ع أنه جبري إذا كان جذراً لـكثير حدود ذي معاملات ناطقة. أثبت أن مجموعة الأعداد الجبرية قابلة للعد.

3. أثبت أن مجموعة المجالات الناطقة (أي المجالات المحدودة باعداد ناطقة) في المستقيم العددي مجموعة قابلة للعد.

4. أثبت أن مجموعة نقاط المستوى التي لها احداثيات ناطقة مجموعة قابلة للعد.

إشارة إلى الحل. طبق الخاصية الثانية.

3. كل مجموعة غير منتهية تحوي حتماً مجموعة جزئية قابلة للعد.

البرهان. لتكن M مجموعة غير منتهية. نختار في M عنصراً كيفياً a_1. بما أن M غير منته، يمكن أن نجد في M عنصراً a_2 مخالفاً لِـ a_1، ثم عنصراً a_3 مخالفاً لِـ a_1 وَ a_2، الخ. نواصل العمل بهذه الطريقة بدون انقطاع (الذي لا يمكن أن يتوقف بسبب «نقص» في العناصر، ذلك لأن M مجموعةٍ غير منتهية) وهكذا نحصل على مجموعة جزئية قابلة للعد:

$$A = \{ a_1, a_2, ..., a_n, ... \}$$

من المجموعة M، وهو المطلوب.

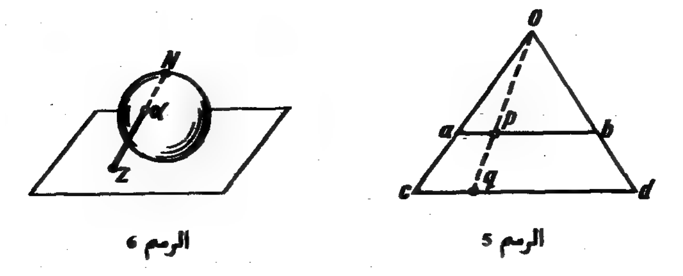
تبين هذه الخاصية أن المجموعات القابلة للعد هي «أصغر» المجموعات غير المنتهية. سنرى قريباً أنه توجد مجموعات غير منتهية غير قابلة للعد.

3. المجموعات المتساوية القوة.

بمقارنة مجموعات مختلفة غير منتهية بمتتالية الأعداد الطبيعية توصلنا إلى مفهوم المجموعة القابلة للعد. لكن المقارنة لا تقتصر على مجموعة الأعداد الطبيعية فحسب ذلك أن إنشاء تقابل بين مجموعتين يسمح بمقارنتهما فيما بينهما، وهذا مهما كانت المجموعتان المعتبرتين. لنقدم التعريف التالي:

تعريف. نقول عن مجموعتين M وَ N انهما متساويتا القوة (ونرمز لذلك بِـ: $M \sim N$) إذا أمكن إيجاد تقابل بين عناصر M وعناصر N.

إن مفهوم تساوي القوة ينطبق على المجموعات المنتهية كما ينطبق على المجموعات غير المنتهية. تكون مجموعتان منتهيتان متساويتي القوة إذا وفقط إذا كان عددا عناصرهما متساويين. يمكن الآن صياغة تعريف مجموعة قابلة للعد على الشكل التالي: نقول عن مجموعة انها قابلة للعد إذا كانت هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية متساويتي القوة.



الرسم 6 الرسم 5

من الواضح أنه إذا كانت مجموعتان متساويتي القوة مع مجموعة ثالثة، فإن هذه المجموعات الثلاث متساوية القوة؛ وهكذا نرى بصفة خاصة أن كل المجموعات القابلة للعد متساوية القوة

أمثلة. 1. إن كل مجالين مغلقين $[a, b]$ وَ $[c, d]$ باعتبارهما مجموعتي نقاط، مجموعتان متساويتا القوة. يوضح الرسم 5 كيف ننشئ تقابلاً بين هاتين المجموعتين: تكون النقطتان p وَ q ملحقتين الواحدة بالاخرى إذا وقعت هاتان النقطتان على نفس المستقيم المار بالنقطة 0 التي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين ac وَ bd.

2. إن مجموعة نقاط المستوى العقدي المكتمل ومجموعة نقاط سطح كرة مجموعتان متساويتا القوة. يمكن تعريف التقابل $\alpha \leftrightarrow z$ بواسطة الإسقاط المجسامي (أو الاستيريوغرافي) [الرسم 6].

3. إن مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية للمجال $(0, 1)$ ومجموعة نقاط المستقيم مجموعتان متساويتا القوة. يمكن تعريف تقابل بينهما بواسطة التابع التالي مثلاً:

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}$$

بالتمعن في الأمثلة السابقة والأمثلة الواردة في الفقرة 2، نلاحظ أنه بالإمكان أن تكون مجموعة غير منتهية متساوية القوة مع بعض اجزائها. فمثلاً نرى بأن «كمية» الأعداد الطبيعية هي نفس «كمية» الأعداد الصحيحة، وهي نفس «كمية» الأعداد الناطقة، وبأن «كمية» نقاط المجال $(0, 1)$ هي

نفس «كمية» نقاط المستقيم. ذلك أننا بيّنا في الفقرة 2 (الخاصية 3) بأن كل مجموعة غير منتهية M يمكن استخراج منها مجموعة جزئية قابلة للعد؛ لتكن $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ مثل هذه المجموعة الجزئية.

نقسم A إلى مجموعتين جزئيتين قابلتين للعد:

$$A_1 = \{a_1, a_3, a_5, ...\}$$

$$A_2 = \{a_2, a_4, a_6, ...\}$$

وننشئ تقابلاً بين A وَ A_1. باستطاعتنا تمديد هذا التقابل فيما بعد، إلى أن يصبح تقابلاً بين المجموعتين $M = A \cup (M \backslash A)$ وَ $M \backslash A_2 = A_1 \cup (M \backslash A)$ وذلك بالحاق كل عنصر من $M \backslash A$ بالعنصر نفسه. إن ذلك لا يعني بأن $M \backslash A_2 = M$ أي أن $M \backslash A_2$ مجموعة ذاتية من M (أي مجموعة جزئية من M وغير مساوية لِـ M). بهذا نكون قد برهنا على القضية التالية:

تقبل كل مجموعة غير منتهية مجموعة جزئية ذاتيّة بحيث تكون المجموعة الاخيرة والمجموعة المعتبرة متساويتيْ القوة. يمكن اعتبار هذه الخاصية بمثابة تعريف لمجموعة غير منتهية.

تمرين. نفرض أن M مجموعة كيفية غير منتهية وَ A مجموعة قابلة للعد. برهن على أن: $M \sim M \cup A$.

4. عدم قابلية العد لمجموعة الأعداد الحقيقية.

رأينا في الفقرة 2 بعض الأمثلة لمجموعات قابلة للعد، مع الملاحظة أنه يمكن عرض أمثلة كثيرة أخرى. من جهة أخرى كنا وضحنا أن اتحاد عدد منته أو متتالية غير منتهية من المجموعات القابلة للعد يساوي مجموعة قابلة للعد.

من الطبيعي إذن أن نتساءل: هل توجد فعلاً مجموعات غير قابلة للعد؟ تجيب النظرية الموالية عن هذا السؤال بنعم:

نظرية 1. إن مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 وَ 1 مجموعة غير قابلة للعد.

البرهان. لتكن α مجموعة جزئية قابلة للعد من مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية للمجال المغلق $[0, 1]$:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0,\ a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots a_{1n} \dots, \\ \alpha_2 = 0,\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots a_{2n} \dots, \\ \alpha_3 = 0,\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \dots a_{3n} \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n = 0,\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots a_{nn} \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

يرمز a_{ik} هنا للرقم العشري من المرتبة k للعدد α_i. لننشئ عدداً عشرياً:

$$\beta = 0, b_1\, b_2 \dots b_n \dots$$

بالطريقة القطرية لـكانتور (Cantor)، أي بحيث يكون b_1 رقماً كيفياً يخالف a_{11}، وَ b_2 رقماً كيفياً يخالف a_{22}، الخ.؛ بصفة عامة يجب أن يكون b_n رقماً مخالفاً لِـ a_{nn}. إن العدد β الذي نحصل عليه بهذه الطريقة لا ينتمي إلى المتتالية (1). ذلك أنه لا يساوي α_1 لأن رقميهما العشريين الأولين غير متساويين؛ وهو لا يساوي α_2 لأن رقميهما العشريين الواقعين في المرتبة الثانية غير متساويين، الخ.؛ وبصفة عامة فإن $\alpha_n \neq \beta$ لأن $b_n \neq \alpha_{nn}$ وذلك مهما كان العدد الطبيعي n، وعليه فإن β لا يساوي أي عنصر α_i من المتتالية (1). وبالتالي فإنه لا توجد مجموعة جزئية قابلة للعد من مجموعة النقاط $[0, 1]$ تستطيع احتواء كل عناصر $[0, 1]$.

يوجد في هذا البرهان «خطأ» صغير، ناتج من كون بعض الأعداد (وهي التي تكتب على الشكل $\frac{p}{10^q}$) تقبل نشرين عشريين مختلفين، واحد منهما له الدورة 0 والآخر له الدورة 9؛ مثال ذلك:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5000 \ldots = 0,4999 \ldots$$

إذن فحتى إذا كان عددان يقبلان نشرين عشريين مختلفين فذلك لا يعني انهما غير متساويين.

غير أننا إذا انشأنا العدد β بعناية أي بتفادي الرقمين 0 وَ 9، مثلاً، بوضع $b_n = 2$ إذا كان $a_{nn} = 1$ وَ $b_n = 1$ إذا كان $a_{nn} \neq 1$ فإننا نزيل من البرهان الخطأ المشار اليه.

تمرين. أثبت أن الأعداد القابلة لنشرين عشريين مختلفين تشكل مجموعة قابلة للعد.

وهكذا علمنا الآن بأن المجال المغلق $[0, 1]$ يمثل مجموعة غير قابلة للعد. لنورد بعض المجموعات المتساوية القوة مع المجال المغلق $[0, 1]$.

1. مجموعة نقاط كل مجال مغلق $[a, b]$ أو مجال مفتوح (a, b).

2. مجموعة نقاط مستقيم.

3. مجموعة نقاط المستوى، والفضاء، وسطح كرة، وداخلية (أو داخل) كرة، الخ.

4. مجموعة مستقيمات المستوى.

5. مجموعة التوابع المستمرة ذات متغير واحد أو ذات متغيرات متعددة.

إن البرهان على الحالتين الأولى والثانية لا يشكل أي صعوبة (راجع المثالين 1 وَ 3، الفقرة 3). أما الحالات الأخرى فإن طريقة البرهان المباشر تعد معقدة.

تمرين. بإستخدام نتائج هذه الفقرة والتمرين 2 من الفقرة 2 برهن على وجود اعداد متسامية (أو متصاعدة) أي اعداد غير جبرية.

5. نظرية كانتور – بارنشتاين (Cantor – Bernstein).

تعد النظرية الموالية من أهم نظريات المجموعات.

نظرية 2. (كانتور – بارنشتاين). لتكن A وَ B مجموعتين كيفيتين. إذا وجد تقابل f من المجموعة A على مجموعة جزئية B_1 من B، وتقابل g من المجموعة B على مجموعة جزئية A_1 من A، فإن المجموعتين A وَ B متساويتا القوة.

البرهان. ليكن x عنصراً ما في A. نضع $x_0 = x$ ونعرف بالتدريج جماعة عناصر بالطريقة التالية. نفرض أن x_n معرّف. إذا كان n زوجياً نأخذ في B العنصر x_{n+1} بحيث $x_n = f(x_{n+1})$، وإذا كان n فردياً نأخذ في A العنصر x_{n+1} بحيث: $x_n = g(x_{n+1})$، وذلك في حالة وجود مثل هذا العنصر. هناك احتمالان:

1. هناك عناصر n بحيث لا يوجد عنصر x_{n+1} يحقق الشرط المطلوب. حينئذٍ يسمى n رتبة x.

2. المتتالية (x_n) غير منتهية. حينئذٍ نقول عن العنصر x إنه من رتبة غير منتهية.

نقسم الآن A إلى ثلاثة أجزاء: A_E المؤلف من العناصر ذات الرتب الزوجية، A_0 المؤلف من العناصر ذات الرتب الفردية، A_I المؤلف من العناصر ذات الرتب غير المنتهية.

بعد تجزئة مماثلة للمجموعة B نلاحظ أن f يطبق A_E على B_0 وَ A_I على B_I، وأن g^{-1} يطبق A_0 على B_E. إذن فإن التطبيق ψ، المساوي لِـ f على $A_E \cup A_I$ ولِـ g^{-1} على A_0 تطبيق تقابلي من المجموعة A على المجموعة B. وبذلك يتم البرهان على النظرية.

6. مفهوم قوة مجموعة.

إذا كانت مجموعتان منتهيتان متساويتي القوة فإنهما يحويان نفس العدد من العناصر. إذا كانت M وَ N مجموعتين كيفيتين ومتساويتي القوة فإننا نقول انهما من نفس القوة. إذن فإن قوة مجموعة هي ما تشترك فيه مع أية مجموعة أخرى من نفس القوة. فيما يخص المجموعات المنتهية نلاحظ أن مفهوم القوة هو مفهوم عدد عناصر المجموعة. نشير لقوة مجموعة الأعداد الطبيعية (وبالتالي لقوة كل مجموعة قابلة للعد) بالرمز $\aleph_0$. أما المجموعات المتساوية القوة مع مجموعة الأعداد الحقيقية الواقعة في المجال المغلق $[0, 1]$ فنقول عنها أن لها قوة المستمر ونرمز لها بِـ c (أو بالرمز $\aleph$).

هناك سؤال مهم جداً وهو الذي يبحث عن وجود قوى محصورة بين $\aleph_0$ وَ c، ذلك ما سنعالجه ضمن الفقرة 4 الموالية.

نلاحظ أن المجموعات التي نتعرض لها في التحليل لها في أغلب الأحيان القوة $\aleph_0$ أو القوة c.

بخصوص قوى المجموعات المنتهية، أي من أجل الأعداد الطبيعية، فبالإضافة إلى مفهوم المساواة الصالح من أجل كافة المجموعات، لدينا أيضاً مفهوم «أكبر من» ومفهوم «أصغر من». نريد الآن تعميم هذين المفهومين ليشملا المجموعات غير المنتهية.

لتكن A وَ B مجموعتين كيفيتين. نرمز بِـ $m(A)$ وَ $m(B)$ لقوتيهما.

من ناحية شكلية، هناك اربعة حالات ممكنة:

1. A متساوي القوة مع مجموعة جزئية من B، وَ B متساوي القوة مع مجموعة جزئية من A.

2. تقبل A مجموعة جزئية متساوية القوة مع B، لكن B لا تقبل أية مجموعة جزئية متساوية القوة مع A.

3. تقبل B مجموعة جزئية متساوية القوة مع A، لكن A لا تقبل أية مجموعة جزئية متساوية القوة مع B.

4. A لا تقبل مجموعة جزئية متساوية القوة مع B، وكذلك الأمر فيما يخص B.

إذا نظرنا في الحالة الأولى وجدنا أن نظرية كانتور – بارنشتاين تستلزم ان المجموعتين A وَ B متساويتا القوة، أي أن:

$$m(A) = m(B)$$

أما في الحالة الثانية فمن الطبيعي أن نصطلح بأن: $m(A) > m(B)$؛ ونصطلح في الحالة الثالثة أن $m(A) < m(B)$. وأما في الحالة الرابع فينبغي اعتبار قوتيْ A وَ B غير قابلتين للمقارنة. لكن الواقع هو ان هذه الحالة مستحيلة! ذلك ما ينتج بالفعل من نظرية زارمولو (Zermelo) التي سنتعرض لها ضمن الفقرة 4. وهكذا يأتي أن من أجل كل مجموعتين A وَ B لدينا: إما $m(A) = m(B)$ (إذا كانت A وَ B متساويتيْ القوة) وإما $m(A) < m(B)$ وإما $m(A) > m(B)$.

كنا لاحظنا سابقاً أن المجموعات القابلة للعد هي «أصغر» المجموعات من بين المجموعات غير المنتهية. ثم بينّا وجود مجموعات غير منتهية لها «رتبة غير تناه أكبر» من المجموعات القابلة للعد؛ انها المجموعات التي لها قوة المستمر. نتساءل الآن عن وجود قوى أكبر من قوة المستمر. أو، بعبارة أعم، هل توجد قوة تمثل «أكبر» قوة؟ الجواب عن هذا السؤال يكمن في النظرية التالية.

نظرية 3. لتكن M مجموعة كيفية، وَ $\mathcal{M}$ المجموعة المؤلفة من كل اجزاء M. إن قوة المجموعة $\mathcal{M}$ أكبر من قوة M.

البرهان. من الواضح أن القوة m للمجموعة $\mathcal{M}$ لا يمكن ان تكون أصغر من القوة m للمجموعة M؛ ذلك ان المجموعات ذات العنصر الواحد من M

تشكل مجموعة جزئية من M متساوية القوة مع M . يبقى أن نبين بأن القوتين m وَ m مختلفتان. نفرض وجود تقابل بين العناصر $a, b, \ldots$ من المجموعة M وبعض العناصر $A, B, \ldots$ من المجموعة M (أي بعض المجموعات الجزئية من M) :

$$a \leftrightarrow A, b \leftrightarrow B, \ldots$$

لنثبت أن هذا التقابل لا يغطي المجموعة M. من أجل ذلك، ننشئ مجموعة $X \subset M$ لا يقابلها أي عنصر من M . لتكن X مجموعة عناصر M التي لا تنتمي إلى المجموعات الجزئية المقابلة لها. على وجه التحديد: إذا كان $a \leftrightarrow A$ وَ $a \in A$ فإن $a \notin X$ ؛ أما إذا كان $a \leftrightarrow A$ وَ $a \notin A$ فإن $a \in X$. من الواضح ان X مجموعة جزئية من M وعليه فهي عنصر من M . لنثبت أن X لا يقابله أي عنصر من M . لنفرض العكس، أي أنه يوجد عنصر x من M بحيث $x \leftrightarrow X$. لنرَ فيما إذا كان هذا العنصر ينتمي ام لا لِـX . نفرض أن $x \notin X$ ، لكن الفرض ينص على أن X يحوي كل عنصر من M الذي لا ينتمي إلى المجموعة الجزئية التي تقابله، ومنه يأتي $x \in X$. من جهة اخرى إذا فرضنا أن $x \in X$ فإننا نستنتج بأن $x \notin X$ لأن X لا يمكن أن يحوي عنصراً من M لا ينتمي إلى المجموعة الجزئية التي تقابله. إذن فإن العنصر x المعتبر ينبغي أن ينتمي والّا ينتمي إلى X في آن واحد. ومنه نستخلص أنه لا وجود لمثل هذا العنصر، وهو الامر الذي يثبت استحالة انشاء تقابل بين مجموعة عناصر المجموعة M ومجموعة اجزائه. وهو المطلوب.

إذن، مهما كانت قوة مجموعة معطاة فإنه يمكن انشاء مجموعة لها قوة أكبر من قوتها، ثم يمكن انشاء مجموعة ثانية قوتها أكبر من قوة المجموعة السابقة، الخ. نحصل بهذه الطريقة على سلم قوى غير محدود من الأعلى.

ملاحظة. نرمز لقوة المجموعة M بِـ2^m، حيث يرمز m لقوة M (يمكن للقارئ أن يفهم سر هذا الرمز باعتبار الحالة التي تكون فيها M مجموعة منتهية). نستطيع عندئذٍ التعبير عن نتيجة النظرية السابقة بالمتراجحة $m < 2^m$. بصفة خاصة نحصل على المتراجحة $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ من أجل $m = \aleph_0$.

لنثبت ان $\mathcal{N} = 2^{\mathcal{N}_0}$ أي أن قوة مجموعة اجزاء المتتالية الطبيعية تساوي قوة المستمر.

من أجل ذلك نقسم المجموعات الجزئية للمتتالية الطبيعية إلى قسمين $\mathcal{B}$ وَ $\mathcal{C}$، حيث نضع في $\mathcal{B}$ المجموعات الجزئية التي لها متممات غير منتهية، ونضع في $\mathcal{C}$ المجموعات الجزئية التي لها متممات منتهية. نلاحظ أن $\mathcal{C}$ تحوي بصفة خاصة المتتالية الطبيعية بأكملها لأن متممها خال. إن $\mathcal{C}$ مجموعة قابلة للعد (برهن على ذلك!). وهي لا تؤثر ابداً على قوة المجموعة: $\mathcal{M} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

يمكن انشاء تقابل بين المجموعات الجزئية المنتمية إلى $\mathcal{B}$ والاعداد الحقيقية α المنتمية للمجال $(0, 1)$.

من أجل ذلك نلحق بكل مجموعة جزئية $A \in \mathcal{B}$ العدد الحقيقي α، $0 \leq \alpha < 1$، الذي يقبل النشر المثنى (dyadique) التالي:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \dots$$

حيث ε_n يساوي 1 إذا انتمى n إلى المجموعة A ويساوي 0 إذا لم يكن الأمر كذلك. نترك التأكد من التفاصيل للقارئ.

تمرين. أثبت ان مجموعة التوابع العددية (أو، بعبارة أعم، مجموعة التوابع ذات القيم المنتمية إلى مجموعة تحوي على الأقل عنصرين) المعرفة على مجموعة كيفية M لها قوة أكبر من قوة M.

اشارة إلى الحل. استخدم النتيجة القائلة أن مجموعة التوابع المميزة (أي التوابع على M التي تأخذ قيمتين فقط: 0 وَ 1) متساوية القوة مع مجموعة اجزاء M.

§ 4. المجموعات المرتبة. الأعداد اللامتناهية

نعرض هنا المبادئ المرتبطة بمفهوم الترتيب في مجموعة، وسنقتصر على تقديم ابسط المعلومات في هذا الموضوع؛ لمزيد من التفاصيل يستطيع القارئ الرجوع إلى المؤلفات المشار اليها في قائمة مراجع هذا الكتاب.

1. المجموعات المرتبة.

لتكن M مجموعة كيفية وَ φ علاقة ثنائية في M (معرفة بواسطة مجموعة $M \times M \ni R_\varphi$). نقول عن φ إنها علاقة ترتيب إذا حققت الشروط التالية:

1) الإنعكاس: $a \varphi a$.

2) التعدي: إذا كان $a \varphi b$ وَ $b \varphi c$ فإن $a \varphi c$.

3) ضد التناظر: إذا كان $a \varphi b$ وَ $b \varphi a$ فإن $a = b$.

نصطلح على الرمز $\leq$ للإشارة إلى علاقة ترتيب. أي أن الكتابة $a \leq b$ تعني بأن الثنائية (a, b) تنتمي إلى المجموعة المعطاة R_φ. نقول في هذه الحالة أن a أصغر من b أو يساويه، أو أن a يسبق b. تسمى كل مجموعة مزودة بعلاقة ترتيب، مجموعة مرتبة. نسوق الآن بعض الأمثلة للمجموعات المرتبة.

1. يمكن أن نعتبر كل مجموعة، بطريقة بديهية، انها مرتبة وذلك بوضع $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a = b$. أي اننا نستطيع دوماً اعتبار علاقة ترتيب في مجموعة ما وهي علاقة التطابق ε الثنائية. لا شك في أن الفائدة المرجوة من هذا المثال قليلة جداً.

2. لتكن M مجموعة التوابع المستمرة على مجال مغلق $[\alpha, \beta]$. نضع $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان $f(t) \leq g(t)$ من أجل كل $t \in [\alpha, \beta]$، وبذلك نحصل بطبيعة الحالة على علاقة ترتيب.

3. إن مجموعة أجزاء مجموعة معطاة يمكن أن ترتب بعلاقة الاحتواء : $M_1 \leq M_2$ إذا كان $M_1 \subset M_2$.

4. إن مجموعة الأعداد الطبيعية مرتبة بِـ : $a \leq b$ التي تعني ان «a يقسم b» .

لتكن M مجموعة مرتبة كيفية : إذا كان $a \leq b$ وَ $a \neq b$ نستعمل الرمز $<$ أي أننا نكتب $a < b$ ونقول أن a اصغر من b أو أن a يسبق تماماً b . بدل $a \leq b$ نستعمل احياناً الكتابة المكافئة لها : $b \geq a$ ونقول عندئذٍ ان b أكبر من a أو يساويه (يكون b أكبر من a حينما يكون $b \neq a$) أو ان b يلي a . نقول ان $a \in M$ عنصر اعظمي لِـ M إذا كان $a \leq b$ تستلزم $b = a$. كما نقول عن a أنه عنصر اصغري لِـ M إذا كان $c \leq a$ تستلزم $c = a$.

إذا كان لكل عنصرين a وَ b من مجموعة ما عنصر c يليهما ($a \leq c$ ، $b \leq c$) نسمي عندئذٍ المجموعة المعتبرة مجموعة راشحة من اليمين .

2. التطبيقات المحافظة على الترتيب .

لتكن M وَ M' مجموعتين مرتبتين وَ f تطبيقاً من M في M' . نقول عن التطبيق f أنه يحافظ على الترتيب إذا كان $a \leq b$ (حيث $a \in M$ وَ $b \in M$) يستلزم $f(a) \leq f(b)$ (في M') . نقول عن f إنه تشاكل من M في M' المرتبتين إذا كان f تقابلاً وكانت العلاقة $f(a) \leq f(b)$ محققة إذا وفقط إذا كان $a \leq b$. نقول عندئذٍ أن المجموعتين M وَ M' متشاكلتان .

لتكن ، مثلاً ، M مجموعة الأعداد الطبيعية المرتبة بعلاقة قابلية القسمة (راجع المثال 4 ، الفقرة 1) ولتكن M' نفس المجموعة مزودة بترتيبها الطبيعي ، أي بحيث $b \geq a$ تكافئ ان $b - a$ عدد موجب . إن التطبيق من M على M' الذي يلحق بكل عدد طبيعي n العدد نفسه تطبيق يحتفظ بالترتيب (لكنه ليس تشاكلاً) .

من الواضح أن علاقة التشاكل بين المجموعات المرتبة تمثل علاقة تكافؤ (فهي تناظرية ومتعدية وانعكاسية) . وبالتالي ، إذا كانت لدينا كمية[1] مجموعات مرتبة فإنه يمكن دوماً تقسيمها إلى صفوف مجموعات متشاكلة . من الواضح أن الذي يهمنا هو الترتيب المعرف على مجموعة وليس طبيعة عناصرها ، ولذا يمكن اعتبار مجموعتين مرتبتين ومتشاكلتين كمجموعتين متطابقتين .

3. انماط التراتيب . المجموعات المرتبة كلية .

عندما تكون مجموعتان متشاكلتين ، نقول انهما من نمط ترتيب واحد . هذا يعني ان نمط الترتيب هو كل ما تشترك فيه المجموعات المرتبة المتشاكلة فيما بينها ، كما ان القوة هي كل ما تشترك فيه المجموعات المتساوية القوة (وذلك بقطع النظر عن علاقة الترتيب المزودة بها كل مجوعة) :

ليكن a وَ b عنصرين من مجموعة مرتبة . إنه بالإمكان الّا تتحقق أية علاقة من بين العلاقتين $a \leq b$ وَ $b \leq a$. عندئذٍ نقول عن العنصرين a وَ b انهما غير قابلين للمقارنة . إذا وجدت في مجموعة مرتبة M عناصر غير قابلة للمقارنة ، أي إذا كانت علاقة الترتيب معرّفة فقط من أجل بعض الثنائيات من عناصر M ، نقول ان M مجموعة مرتبة جزئياً . إذا كان الأمر غير ذلك ، أي إذا لم توجد في M عناصر غير قابلة للمقارنة فإننا نقول عن M إنها مجموعة مرتبة كلية . بعبارة اخرى نقول عن مجموعة M إنها مرتبة كلية إذا كانت مرتبة وإذا كان لدينا $a < b$ أو $b < a$ من أجل كل عنصرين مختلفين a وَ b من M .

إن المجموعات الواردة في الأمثلة من 1 إلى 4 ضمن الفقرة 1 ليست مرتبة كلية . وابسط امثلة لمجموعات مرتبة كلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية ، ومجموعة الأعداد الناطقة ، ومجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية للمجال $[0, 1]$ ،

(1) تحاشينا عبارة مثل «كل المجموعات المرتبة» لأنها في الحقيقية شبيهة بالعبارة «مجموعة كل المجموعات» المتناقضة مع نفسها والتي لا يمكن أن تقبل في نظرية رياضية متينة .

الخ . (مزودة بالعلاقتين الطبيعيتين «أكبر من» وَ «أصغر من» الخاصة بهذه المجموعات) . من الواضح أن كل مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة كلية هي نفسها مرتبة كلية .

بما أن الترتيب الكلي هو حالة خاصة من مفهوم الترتيب، فإنه يمكن تطبيق مفهوم التطبيق المحافظ على الترتيب، وبصفة خاصة مفهوم التشاكل، على المجموعات المرتبة كلية . نستطيع إذن التكلم عن نمط ترتيب مجموعة مرتبة كلية .

إن متتالية الأعداد الطبيعية 1، 2، 3، ... المزودة بعلاقة الترتيب الطبيعية تمثل أبسط مثال لمجموعة غير منتهية مرتبة كلية . نرمز لنمط ترتيبها بِـω .

إذا كانت مجموعتان مرتبتان متشاكلتين فإن لهما حتماً نفس القوة (لأن التشاكل تقابل) . وهكذا يتبين أنه يمكن التكلم عن القوة الموافقة لنمط الترتيب المعطى (مثلاً ، القوة الموافقة للنمط ω هي $\aleph_0$) . اما القضية العكسية فهي خاطئة : يمكن عموماً ترتيب مجموعة ذات قوة معينة بطرق كثيرة ومختلفة . لكن إذا تعلق الأمر بمجموعة منتهية مرتبة كلية فإن نمط الترتيب يعين بطريقة وحيدة بواسطة العدد n الممثل لعدد عناصر هذه المجموعة (نرمز لهذا النمط بِـn) . وأما فيما يخص المجموعات القابلة للعد فنلاحظ في مجموعة الأعداد الطبيعية مثلاً ان بالإضافة إلى النمط الطبيعي ω يمكن اعتبار النمط التالي مثلاً :

$$1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...$$

حيث يسبق كل عدد فردي كافة الأعداد الزوجية، ثم ان مجموعة الأعداد الفردية مرتبة ترتيباً متزايداً وكذا مجموعة الأعداد الزوجية . باستطاعتنا أن نثبت بأن مجموعة انماط الترتيب المختلفة الموافقة لنفس القوة $\aleph_0$ مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد .

4. المجموع الترتيبي للمجموعات المرتبة كلية .

لتكن M_1 وَ M_2 مجموعتين مرتبتين كلية ومنفصلتين (أي غير متقاطعتين) نرمز لنمطي ترتيبهما على التوالي بِـΘ_1 وَ Θ_2 . يمكن أن نعرف علاقة ترتيب

كلي على الاتحاد $M_1 \cup M_2$ وذلك باعتبار كل عنصر من M_1 كسابق لكل عنصر من M_2 ونترك ترتيب M_1 وَ M_2 بدون تغيير (تأكد من انها علاقة ترتيب كلي!) . تسمى المجموعة المرتبة كلية المحصل عليها بهذه الطريقة المجموع الترتيبي للمجموعتين M_1 وَ M_2 ونرمز له بِـ $M_1 + M_2$. من المفيد أن نؤكد على ان ترتيب الحدود هنا بالغ الأهمية : لأن المجموع الترتيبي $M_2 + M_1$ ليس متشاكلاً ، عموماً ، مع المجموع الترتيبي $M_1 + M_2$.

يسمى نمط الترتيب $M_1 + M_2$ المجموع الترتيبي للنمطين Θ_1 وَ Θ_2 ونرمز له بِـ $\Theta_1 + \Theta_2$.

يمكن تعميم هذا التعريف ، بسهولة ، ليشمل عدداً منتهياً كيفياً من الحدود $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_m$.

مثال . نعتبر نمطي الترتيب ω وَ n . نرى بسهولة أن : $n + \omega = \omega$ ؛ ذلك اننا إذا اضفنا للمتتالية $1, 2, 3, ..., k, ...$ عدداً منتهياً من الحدود على اليسار (أي يسار المتتالية) نحصل على نمط الترتيب ω . من جهة أخرى فإن نمط الترتيب $\omega + n$ أي نمط ترتيب المجموعة :

$$1, 2, 3, ..., k, ..., a_1, a_2, ..., a_n$$

لا يساوي ω .

5. المجموعات المرتبة جيداً . الأعداد اللامتناهية .

كنا ادخلنا سابقاً مفهوم الترتيب ، ثم مفهوم الترتيب الكلي . ندخل الآن مفهوم الترتيب الجيد وهو مفهوم دقيق وهام جداً .

تعريف . نقول عن مجموعة مرتبة كلية M إنها مرتبة جيداً ، إذا كان لكل مجموعة جزئية غير خالية في M اصغر عنصر (أي عنصر يسبق كل عناصر المجموعة الجزئية هذه) .

إذا كانت مجموعة مرتبة كلية منتهية فإنها مرتبة جيداً، وهذا بديهي. من بين المجموعات المرتبة كلية وغير المرتبة جيداً نذكر على سبيل المثال مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى المجال $[0, 1]$. إن لهذه المجموعة أصغر عنصر وهو 0، لكن المجموعة الجزئية المؤلفة من الأعداد الموجبة ليس لها أصغر عنصر.

من الواضح أن كل مجموعة جزئية (غير خالية) من مجموعة مرتبة جيداً هي مجموعة مرتبة جيداً أيضاً.

يسمى نمط ترتيب مجموعة مرتبة جيداً العدد الترتيبي (العدد الترتيبي اللامتناهي أو باختصار اللامتناهي وذلك عندما نريد التأكيد على أن الأمر يتعلق بمجموعة غير منتهية).

إن متتالية الأعداد الطبيعية (المزودة بعلاقة الترتيب الطبيعية) ليست مجموعة مرتبة كلية فحسب بل مرتبة جيداً. ولذا فإن نمط ترتيبها ω عدد ترتيبي (لامتناه!). كما أن نمط الترتيب $\omega + k$ للمجموعة:

$$1, 2, \ldots, n \qquad a_1, a_2, \ldots, a_k$$

يساوي عدداً ترتيبياً.

أما المجموعة:

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1 \qquad (1)$$

فهي مرتبة كلية لكنها غير مرتبة جيداً. إن لكل مجموعة جزئية غير خالية من (1) أكبر عنصر (أي عنصر يلي كل العناصر الأخرى) لكنها لا تقبل، عموماً، اصغر عنصر (فالمجموعة (1) نفسها، مثلاً، لا تقبل أصغر عنصر). نصطلح على الإشارة لنمط ترتيب المجموعة (1) (الذي لا يساوي عدداً ترتيبياً!) بـ ω^*.

لنبرهن على القضية البسيطة والهامة التالية:

توطئة 1. إن المجموع الترتيبي لعدد منته من المجموعات المرتبة جيداً مجموعة مرتبة جيداً.

لرؤية ذلك نعتبر مجموعة جزئية كيفية M من المجموع الرتيبي $M_1 + M_2 + ... + M_n$ المؤلف من n عنصراً مرتبة جيداً، وليكن M_k المجموعة الأولى من هذه المجموعات التي تحوي عناصر من M. إن تقاطع M وَ M_k مجموعة جزئية (غير خالية) من المجموعة المرتبة جيداً M_k ولذا فإن لها أصغر عنصر. وهذا العنصر هو أصغر عنصر في M.

نتيجة. إن المجموع الترتيبي لعدة أعداد ترتيبية عدد ترتيبي.

وهكذا يمكن، انطلاقاً من كمية معطاة من الاعداد الترتيبية انشاء اعداد ترتيبية جديدة. فمثلاً يمكن انطلاقاً من الأعداد الطبيعية (أي الأعداد الترتيبية المنتهية) ومن العدد الترتيبي ω الحصول على الأعداد الترتيبية

$$\omega + n, \ \omega + \omega, \ \omega + \omega + n, \ \omega + \omega + \omega, ...$$

يستطيع القارئ بسهولة انشاء مجموعات مرتبة جيداً توافق هذه الأعداد اللامتناهية.

كنا ادخلنا ضمن الفقرة 4 مفهوم المجموع الترتيبي لأنماط ترتيب. يمكننا أيضاً ادخال مفهوم الجداء الترتيبي: لتكن M_1 وَ M_2 مجموعتين مرتبتين كلية من النمط Θ_1 وَ Θ_2 على التوالي. لنأخذ عدداً من المجموعات M_1 كبيراً بكفاية، نأخذ على وجه التحديد عدداً من المجموعات M_1 يساوي عدد عناصر M_2، ولنعوض عناصر M_2 بهذه المجموعات. تسمى المجموعة التي نحصل عليها بهذه الطريقة الجداء الترتيبي لِـ M_1 وَ M_2 ونرمز له بِـ $M_1 \cdot M_2$. يمثل $M_1 \cdot M_2$ من الناحية الشكلية مجموعة الثنائيات (a, b) حيث $a \in M_1$ وَ $b \in M_2$، المرتبة كما يلي: يكون $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ إذا كان $b_1 < b_2$ (مهما كان a_1 وَ a_2)، وَ $(a_1, b) < (a_2, b)$ في حالة $a_1 < a_2$.

نعرف بطريقة مماثلة الجداء الترتيبي لعدد منته من العوامل

$M_1 M_2 \dots M_p$. يسمى نمط الترتيب Θ للجداء $M_1 \cdot M_2$ المكون من المجموعتين المرتبتين كلية M_1 وَ M_2 الجداء الترتيبي لنمطي الترتيب Θ_1 وَ Θ_2 :

$$\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$$

إن الجداء الترتيبي جداء غير تبديلي كما هو الشأن فيما يخص المجموع الترتيبي.

توطئة 2. إن الجداء الترتيبي لمجموعتين مرتبتين جيداً مجموعة مرتبة جيداً.

البرهان. لتكن M مجموعة جزئية من الجداء: $M_1 \cdot M_2$ ؛ M هي مجموعة ثنائيات (a, b). نعتبر كل العناصر الثانية b للثنائيات المنتمية إلى M . إنها تؤلف مجموعة جزئية من M_2 . لما كانت M_2 مرتبة جيداً فإن هذه المجموعة الجزئية تقبل أصغر عنصر. نرمز له بِـ b_0 ونعتبر كل الثنائيات من الشكل (a, b_0) المنتمية إلى M . إن عناصرها الاولى a تشكل مجموعة جزئية من M_1 . لما كانت M_1 مرتبة جيداً فإنه يوجد من بين عناصرها أصغر عنصر. نرمز له بِـ a_0 . يتبين عندئذٍ ان الثنائية (a_0, b_0) ، كما نرى ذلك بسهولة، هي أصغر عنصر في M .

نتيجة. إن الجداء الترتيبي لعدة اعداد ترتيبية عدد ترتيبي.

أمثلة. من الواضح أن $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ وان $\omega \cdot 3 = \omega + \omega + \omega$. كما انه من السهل انشاء مجموعات مرتبة جيداً انماط ترتيبها هي:

$$\omega \cdot n ، \omega^2 ، \omega^2 \cdot n ، \omega^3 ، \dots ، \omega^p ، \dots$$

وهذه المجموعات كلها قابلة للعد.

يمكن أيضاً تعريف عمليات اخرى على انماط الترتيب، مثلاً، الرفع إلى قوة ثم اعتبار الأعداد الترتيبية مثل ω^ω وَ ω^{ω^ω}، الخ.

6. مقارنة الأعداد الترتيبية

إذا كان n_1 وَ n_2 عددين ترتيبيين منتهيين فإن لدينا احد الاحتمالين التاليين: إما أن يكون n_1 وَ n_2 متساويين، وإما أن يكون احدهما أكبر من الآخر. لنعمم علاقة الترتيب هذه إلى حالة الأعداد الترتيبية اللامتناهية.

من أجل ذلك ندخل المفهومين التاليين: يعرف كل عنصر a من مجموعة مرتبة كلية M مقطعاً مبتدئاً P (أي مجموعة العناصر الأصغر من a) ومقطعاً متناهياً Q (أي مجموعة العناصر الأكبر من a أو المساوية له).

ليكن α وَ β عددين ترتيبيين و M وَ N مجموعتين من النمط α وَ β على التوالي. نقول أن $\alpha = \beta$ إذا وفقط إذا كانت المجموعتان M وَ N متشاكلتين، كما نقول أن $\alpha < \beta$ إذا كان M متشاكلاً مع مقطع مبتدئ من N، ونقول ان $\alpha > \beta$ إذا كان N متشاكلاً مع مقطع مبتدئ من M.

نظرية 1. من أجل كل عددين ترتيبيين α وَ β لدينا: إما $\alpha = \beta$ وإما $\alpha < \beta$ وإما $\alpha > \beta$.

للبرهان على هذه النظرية نبدأ بتقديم التوطئة التالية:

توطئة 3. إذا كان f تطبيقاً تشاكلياً من المجموعة المرتبة جيداً A على مجموعة جزئية $B \subset A$ فإن $f(a) \geq a$ من أجل كل العناصر $a \in A$.

من أجل ذلك نلاحظ انه إذا وجدت عناصر $a \in A$ بحيث $f(a) < a$ فإنه يوجد من بينها اصغر عنصر (وهذا بفضل الترتيب الجيد). نرمز لهذا العنصر بـa_0 ونضع $b_0 = f(a_0)$. عندئذٍ $b_0 < a_0$ ثم إن $f(b_0) < f(a_0) = b_0$ لأن التطبيق f تشاكلي، لكن المتراجحة الأخيرة مستحيلة وهذا لأن a_0 هو اصغر عنصر من بين العناصر المتمتعة بالخاصية المشار إليها.

ينتج من هذه التوطئة مباشرة أنه لا يمكن أن تكون مجموعة مرتبة جيداً متشاكلة مع مقطع مبتدئ. لو كانت المجموعة A متشاكلة مع مقطع

مبتدئ معرّف بالعنصر a لـكان $a < f(a)$، إذن لا يمكن ان تتحقق لدينا في آن واحد: $\beta = \alpha$ وَ $\beta < \alpha$.

نفس الإستدلال يثبت أنه لا يمكن أن يتحقق لدينا في آن واحد $\beta = \alpha$ وَ $\beta > \alpha$. كما أن العلاقتين: $\beta > \alpha$ وَ $\beta < \alpha$ لا يمكن أن تتحققا في آن واحد ولولاه لـكان $\alpha < \alpha$ (وذلك بفضل التعدي) وهذا مستحيل كما سبق وان بيّنا.

أثبتنا إذن أن العلاقات الثلاث $\alpha \lesseqgtr \beta$ لا يمكن أن تتحقق إلّا واحدة منها. لنثبت الآن أنه لا بد أن تتحقق إحدى هذه العلاقات، أي أن كل عددين ترتيبيين قابلان للمقارنة.

من أجل ذلك ننشيء في البداية مجموعة $W(\alpha)$ من أجل كل عدد ترتيبي α بحيث تكون هذه المجموعة «الممثلة المعيارية» لـα. لنأخذ $W(\alpha)$ مساوية لمجموعة الأعداد الترتيبية الاصغر من α. إن كل الاعداد الترتيبية المنتمية إلى $W(\alpha)$ تقبل المقارنة مثنى مثنى، ونمط ترتيب المجموعة $W(\alpha)$ (المرتبة حسب قيم الاعداد الترتيبية) هو α. ذلك أنه إذا كان نمط ترتيب المجموعة:

$$A = \{..., a, ..., b, ...\}$$

هو α فإنه يأتي، تعريفاً، أن الاعداد الترتيبية الاصغر من α تؤلف مجموعة متشـاكلة مع المقاطع المبتدئة للمجموعة A، وبالتالي، مع هذه المجموعة نفسها. بعبارة اخرى، يمكن ترقيم عناصر مجموعة نمط ترتيبها α بواسطة اعداد ترتيبية أصغر من α:

$$A = \{a_0, a_1, ..., a_\lambda, ...\}$$

ليكن الآن α وَ β عددين ترتيبيين؛ عندئذٍ تكون المجموعتان $A = W(\alpha)$ وَ $B = W(\beta)$ من نمط الترتيب α وَ β على التوالي. ليكن $C = A \cap B$، أي أن C تتألف من الاعداد الترتيبية الأصغر من α وَ β في آن واحد. إن المجموعة

C مرتبة جيداً. نرمز لنمط ترتيبها بِـγ ونثبت أن $\gamma \leq \alpha$. إذا كان $C = A$ فإن $\gamma = \alpha$؛ اما إذا كان $C \neq A$ فإن C مقطع مبتدئ في A، إذن

$$\gamma < \alpha \ .$$

ذلك أن مهما كان $\xi \in C$ وَ $\eta \in A \setminus C$ فإن العددين الترتيبيين ξ وَ η قابلان للمقارنة، أي ان $\eta \gtrless \xi$. الّا ان العلاقة: $\eta < \xi < \alpha$ مستحيلة ولولا ذلك لـكان $\eta \in C$. وبالتالي $\eta > \xi$ وهذا ما يثبت ان C مقطع مبتدئ من A، إذن $\gamma < \alpha$. بالاضـافة إلى ذلك فإن γ هو اصغر عنصر من المجموعة $A \setminus C$. لدينا إذن: $\gamma \leq \alpha$، ولدينا بطريقة مماثلة $\gamma \leq \beta$.

نشير ايضاً إلى ان الحالة: $\gamma < \alpha$، $\gamma < \beta$ مستحيلة ولولاه لحصلنا على: $\gamma \in A \setminus C$ وَ $\gamma \in B \setminus C$ وهذا يعني من جهة أن $\gamma \notin C$ وأن $\gamma \in A \cap B = C$ من جهة اخرى. ولذا فالحالات الوحيدة الممكنة هي:

$$\gamma = \alpha \ ، \ \gamma = \beta \ ، \ \alpha = \beta$$
$$\gamma = \alpha \ ، \ \gamma < \beta \ ، \ \alpha < \beta$$
$$\gamma < \alpha \ ، \ \gamma = \beta \ ، \ \alpha > \beta$$

وهذا يثبت ان α وَ β قابلان للمقارنة. وبذلك يتم البرهان على النظرية.

توجد، من أجل كل عدد ترتيبي، قوة معينة ملحقة به، ونلاحظ ان قابلية مقارنة الاعداد الترتيبية تستلزم، بطبيعة الحال، قابلية مقارنة القوى الملحقة بها. بعبارة اخرى:

إذا كانت A وَ B مجموعتين مرتبتين جيداً، فإنهما متسـاويتا القوة أو أن قوة احداهما اكبر من قوة الاخرى (أي أنه لا يمكن ان تكون مجموعتان مرتبتان جيداً ذات قوتين غير قابلتين للمقارنة).

نعتبر كل الاعداد الترتيبية الموافقة لقوى منتهية أو قابلة للعد. انها تكـوّن مجموعة مرتبة جيداً. من السهل ان نتأكد أن هذه المجموعة غير قابلة للعد. لرؤية ذلك نرمز بِـω_1 لنمط ترتيب مجموعة الاعداد اللامتناهية القابلة للعد،

وذلك طبقاً للرموز المعمول بها. إذا كانت القوة الملحقة بِـ ω_1 قابلة للعد فإن الأمر كذلك فيما يخص المجموعة التي لها نمط ترتيب يساوي $\omega_1 + 1$. وعلى الرغم من ذلك فمن الواضح أن ω_1 يلي كل الاعداد اللامتناهية التي لها قوى منتهية أو قابلة للعد. نرمز بِـ $\mathcal{N}_1$ للقوة الملحقة بالعدد الترتيبي اللامتناهي ω_1. من الواضح أنه لا توجد أية قوة m بحيث :

$$\mathcal{N}_0 < m < \mathcal{N}_1$$

لرؤية ذلك نلاحظ أنه لو وجدت مثل هذه القوة m، لـكانت المجموعة $W(\omega_1)$ المؤلفة من الاعداد الترتيبية اللامتناهية التي تسبق ω_1 تحوي مجموعة جزئية قوتها m. إن مثل هذه المجموعة مجموعة مرتبة جيداً وغير قابلة للعد. لكن ذلك يؤدي إلى ان نمط ترتيبها α يسبق ω_1 وهذا يتناقض وتعريف ω_1.

7. مسلمة الاختيار ونظرية زارمولو (Zermelo) وما يكافئهما.

إن قابلية مقارنة المجموعات المرتبة جيداً حسب قواها تؤدي بنا إلى طرح السؤال التالي: هل يمكن ترتيب أية مجموعة ترتيباً جيداً؟ نلاحظ أنه إذا كان الجواب بنعم فإن ذلك يعني بصفة خاصة عدم وجود قوى غير قابلة للمقارنة. كان زارمولو (Zermelo) قد اجاب عن هذا السؤال وبرهن على اننا نستطيع دوماً ترتيب أية مجموعة ترتيباً جيداً. إن البرهان على هذه النظرية (الذي لن نعيده هنا، انظر مثلاً [2]) يرتكز اساساً على القضية المسماة مسلمة الاختيار (أو الانتقاء) وهي تنحصر فيما يلي:

لتكن A مجموعة دليلات α، ونفرض اننا الحقنا بكل دليل α مجموعة ما M_α. تنص مسلمة الاختيار عندئذٍ أنه بالإمكان تعريف تابع φ على A يلحق بكل دليل $\alpha \in A$ عنصراً m_α من المجموعة M_α الموافقة لِـ α. بعبارة اخرى، يمكن تشكيل مجموعة باختيار عنصر وحيد من كل مجموعة M_α.

تعود نظرية المجموعات، بطريقة عرضها المقدم هنا، إلى عهد كانتور (Cantor) وزارمولو وهي تمثل ما يسمى بالنظرية «الساذجة» للمجموعات.

وقد ظهرت مسلمة الاختيار المسماة أيضاً مسلمة زارمولو في اطار هذه النظرية مع مسائل اخرى مثل «فرض المستمر» وهي المسألة التي تبحث عما إذا كانت قوة المستمر مساوية للقوة الأولى غير القابلة للعد $\aleph_1$، هذا وقد دارت حول مسلمة الاختيار العديد من المناقشات نتجت عنها سلسلة من الأعمال حول المنطق الرياضي واسس الرياضيات. نشير بصفة خاصة إلى «النظريات المسلمية» لغودال - بارنايس (Gödel – Bernays) وَزارمولو - فرانكل (Zermelo – Fraenkel).

توصلت هذه النظريات في النهاية إلى اثبات عدم تناقض واستقلال مسلمة الاختيار. يستطيع القارئ الرجوع إلى الكتابين المتخصصين:

1) «اسس نظرية المجموعات»

A. Fraenkel, I. Bar – Hillel «Foundations of set theory»
Amsterdam, 1958

2) «نظرية المجموعات وفرض المستمر»

P. J. Cohen «Set theory and the continuum hypothesis»
New York – Amsterdam, 1966

نلاحظ من جهة اخرى ان التخلي عن مسلمة الاختيار يؤدي إلى اضمحلال معتبر لمحتوى نظرية المجموعات.

إلّا ان نقد النظرية «الساذجة» للمجموعات ومحاولات التخلي عن مسلمة الاختيار ادت إلى انشاء نظريات بالغة الأهمية مثل نظرية التوابع التكرارية (récursives) وأدت أيضاً إلى ادخال مفاهيم جديدة مثل مفهوم العدد القابل للحساب.

نعرض فيما يلي بعض القضايا التي تكافئ كل واحدة منها مسلمة الاختيار (أي أنه يمكن البرهان على كل واحدة منها إذا قبلنا بمسلمة الاختيار، والعكس بالعكس، إذا فرضنا احدى هذه القضايا فإننا نستطيع البرهان على مسلمة الاختيار). من الواضح بادئ ذي بدء أن نظرية زارمولو قضية من

هذه القضـايا. لرؤية ذلك نفرض ان كل مجموعة M_α مرتبة جيداً، لإنشـاء التابع φ (الموجود حسب مسلمة الاختيار) يكفي أن نأخذ من كل M_α أصغر عنصر فيها.

لعرض قضـايا اخرى تكافئ مسلمة الاختيار ندخل أولاً المفاهيم التالية: لتكن M مجموعة مرتبة. إذا كانت A مجموعة جزئية من M كل عنصرين فيها يقبلان المقارنة (بمفهوم الترتيب المعرف على M) فإن A تسمى متسلسلة. نقول عن متسلسلة انها اعظمية إذا لم تكن محتواة، كجزء ذاتي، في متسلسلة اخرى من M. نقول عن عنصر a من المجموعة المرتبة M انه حاد اعلى للمجموعة الجزئية $M \supset M'$ إذا كان كل عنصر $a' \in M'$ سـابقاً لِـ a.

نظرية هوسدورف (Hausdorff). إن كل متسلسلة في مجموعة مرتبة محتواة في متسلسلة اعظمية.

إن ابسط قضية من الناحية العملية تكافئ مسلمة الاختيار هي:

توطئة زورن (Zorn). إذا كانت كل متسلسلة في مجموعة مرتبة M، تقبل حاداً اعلى فإن كل عنصر من M يسبق عنصراً اعظمياً.

بخصوص البرهان على تكافئ هذه القضـايا (مسلمة الاختيار، نظرية زارمولو، نظرية هوسدورف، توطئة زورن) يمكن الرجوع مثلاً إلى كتاب كوروش (Kurosh) «دروس في الجبر العالي»، انظر أيضـاً [8]. سوف لن نقدم هذه البراهين هنا.

إذا كانت مجموعة الحواد العليا للمجموعة الجزئية A تقبل أصغر عنصر a فإن a يسمى الحد الأعلى لِـ A؛ كما نعرف بنفس الطريقة الحد الأدنى لِـ A. إذا كانت مجموعة ما مرتبة وكل جزء منته وغير خال فيها يقبل حداً اعلى وحداً ادنى، فإنها تسمى مجموعة شبكية.

8. التدريج اللامتناهي.

من بين طرق البرهان المنتشرة هناك طريقة التدريج (أو التراجع). وهي، كما نعلم، تتمثل فيما يلي: لتكن $P(n)$ قضية نستطيع النص عليها من أجل كل n، نفرض أن:

1) القضية $P(1)$ محققة.

2) صحة القضية $P(k)$ من أجل كل $n \geq k$ تستلزم أن $P(n+1)$ محققة أيضاً.

عندئذٍ تكون القضية $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbf{N}$، ذلك أن عدم صحة هذه النتيجة تعني وجود اعداد n بحيث تكون $P(n)$ غير محققة، ليكن n_1 أصغر هذه الأعداد. من الواضح أن $n_1 > 1$ أي أن $n_1 - 1$ عدد طبيعي أيضاً، ومنه نصل إلى تناقض مع الشرط (2) أعلاه.

يمكن تطبيق طريقة مماثلة بتعويض المتتالية الطبيعية بمجموعة كيفية مرتبة جيداً. نسمي هذه الطريقة التدريج اللامتناهي.

تمثل طريقة التدريج اللامتناهي فيما يلي: لتكن A مجموعة كيفية مرتبة جيداً (قد تكون A هي مجموعة الاعداد الترتيبية اللامتناهية الاصغر من عدد ما منها) ولتكن $P(a)$ قضية ما نستطيع النص عليها من أجل كل $a \in A$ وبحيث تكون $P(a)$ محققة من أجل أصغر عنصر في A، ومحققة من أجل a في حالة صحتها من أجل العناصر التي تسبق a. عندئذٍ تكون $P(a)$ محققة من أجل كل العناصر $a \in A$.

ذلك أنه لو وجدت في A عناصر a بحيث تكون $P(a)$ خاطئة، لكانت مجموعة تلك العناصر تقبل أصغر عنصر a^*، وبالتالي نحصل على تناقض لأن القضية $P(a)$ تصبح محققة من أجل كل a بحيث $a < a^*$.

من جهة أخرى نعلم أنه بالإمكان ترتيب أية مجموعة ترتيباً جيداً حسب نظرية زارمولو، ولذا نرى أن التدريج اللامتناهي ينطبق، مبدئياً، على أية مجموعة. من الناحية العملية يستحسن في معظم الحالات استخدام توطئة زورن التي تتطلب فقط أن تكون المجموعة المعتبرة مرتبة. هذا ونلاحظ فيما يخص الكائنات المعتبرة في المسائل التي تستدعي استخدام توطئة زورن، أنه يوجد عادة ترتيب يظهر بصفة طبيعية «من تلقاء نفسه».

5§ . جماعات المجموعات

1. حلقة المجموعات .

تعرّف جماعة مجموعات على انها مجموعة عناصرها مجموعات . نعتبر فيما يلي ، إلّا إذا اشرنا لعكس ذلك ، جماعات مجموعات كل مجموعة فيها جزء من مجموعة مرجعية X . نرمز لجماعات المجموعات بحروف كبيرة من الأبجدية الألمانية . سنهتم اساساً بجماعات المجموعات المغلقة بالنسبة لبعض العمليات التي ادخلت في 1§ .

تعريف 1. تسمى جماعة مجموعات غير خالية $\mathfrak{R}$ حلقة إذا تمتعت بالخاصية التالية

$$\begin{cases} A \in \mathfrak{R} \\ B \in \mathfrak{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \Delta B \in \mathfrak{R} \\ A \cap B \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

بما أن لدينا :

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$
$$A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$$

من أجل كل مجموعتين كيفيتين A وَ B ، نستنتج ان العلاقتين : $A \in \mathfrak{R}$ وَ $B \in \mathfrak{R}$ تستلزمان $A \cup B \in \mathfrak{R}$ وَ $A \setminus B \in \mathfrak{R}$. إذن فإن حلقة المجموعات جماعة مجموعات مغلقة بالنسبة للإتحاد والتقاطع والطرح والفرق المتناظر لمجموعتين . من الواضح ان كل حلقة مجموعات مغلقة أيضاً بالنسبة لإتحاد وتقاطع عدد منته كيفي من المجموعات :

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad , \quad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

إن كل حلقة مجموعات تحوي المجموعة الخالية Φ لأن لدينا دوماً $A \setminus A = \Phi$. أما الجماعة التي تحوي المجموعة الخالية فقط فتمثل اصغر حلقة مجموعات .

1) إن المفاهيم المعتبرة في هذه الفقرة ستكون ضرورية في الفصل الخامس لدى عرض النظرية العامة للقياس . ولذا يمكن تأجيل قراءة هذه الفقرة . بالإضافة إلى ذلك يمكن للقارئ الذي يهتم فقط بنظرية القياس على المستوى (1§ ، الفصل الخامس) ان يهمل كل محتوى هذه الفقرة .

تسمى المجموعة E وحدة جماعة المجموعات $\mathcal{G}$ إذا كان $E \in \mathcal{G}$ وكان $A \cap E = A$ من أجل كل $A \in \mathcal{G}$.

وهكذا فإن وحدة جماعة مجموعات $\mathcal{G}$ ليست سوى المجموعة الأعظمية لهذه المجموعة، وهي تحوي كل المجموعات الاخرى المنتمية إلى $\mathcal{G}$.

إذا كانت لحلقة مجموعات وحدة فإننا نسميها جبر مجموعات.

أمثلة. 1. من أجل كل مجموعة A فإن الجماعة $\mathcal{M}(A)$ المؤلفة من كل المجموعات الجزئية جبر مجموعات وحدتها $E = A$.

2. من أجل كل مجموعة غير خالية A فإن الجماعة $\{A, \Phi\}$ المؤلفة من المجموعة A والمجموعة الخالية Φ جبر مجموعات وحدتها $E = A$.

3. إن جماعة المجموعات الجزئية المنتهية من مجموعة كيفية A حلقة مجموعات. تؤلف هذه الحلقة جبراً إذا وفقط إذا كانت المجموعة A نفسها منتهية.

4. إن جماعة كل المجموعات الجزئية المحدودة من المستقيم العددي حلقة مجموعات بدون وحدة.

نستنتج من تعريف حلقة مجموعات الخاصية التالية:

نظرية 1. إن التقاطع $\mathcal{R} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{R}_\alpha$ لمجموعة حلقات هو أيضاً حلقة.

ندرج فيما يلي نتيجة بسيطة وبالغة الأهمية من حيث استعمالها مستقبلاً

نظرية 2. من أجل كل جماعة غير خالية من المجموعات $\mathcal{G}$، توجد حلقة وحيدة $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ تحوي $\mathcal{G}$ وهي محتواة في كل حلقة $\mathcal{R}$ تحوي $\mathcal{G}$.

البرهان. من السهل ان نرى بأن الحلقة $\mathcal{R}$ معرفة بطريقة وحيدة بواسطة الجماعة $\mathcal{G}$. لإثبات وجود هذه الحلقة نعتبر الاتحاد $X = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A$ لكل المجموعات A المنتمية إلى $\mathcal{G}$، ونعتبر الحلقة $\mathcal{M}(X)$ المؤلفة من المجموعات

الجزئية من X . لتكن Σ مجموعة كل حلقات المجموعات المحتواة في $\mathcal{M}(X)$ التي تحوي $\mathcal{G}$. إن التقاطع :

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{R} \in \Sigma} \mathcal{R}$$

لكل هذه الحلقات هو الحلقة المطلوبة $\mathcal{R}(\mathcal{G})$.

ذلك ان مهما كانت الحلقة $\mathcal{R}^*$ التي تحوي $\mathcal{G}$، فإن :

$\mathcal{R} = \mathcal{R}^* \cap \mathcal{M}(X)$ حلقة من Σ ، إذن :

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$$

أي أن $\mathcal{B}$ يحقق بالفعل خاصية اصغر عنصر. تسمى هذه الحلقة الحلقة الاصغرية على $\mathcal{G}$ أو الحلقة المولدة عن $\mathcal{G}$ ونرمز لها بـ $\mathcal{R}(\mathcal{G})$.

2. نصف - حلقة مجموعات

نجد في بعض المسائل، في نظرية القياس مثلاً، ان هناك دوراً هاماً يلعبه مفهوم الحلقة، وهناك دور مماثل يلعبه مفهوم اشمل من السابق وهو مفهوم نصف - حلقة مجموعات.

تعريف 2. نقول عن جماعة مجموعات $\mathcal{G}$ إنها نصف - حلقة، إذا احتوت هذه الجماعة المجموعة الخالية، وكانت مغلقة بالنسبة للتقاطع وتمتع بالخاصية التالية: إذا كانت $A \in \mathcal{G}$ وَ $A_1 \in \mathcal{G}$ وَ : $A_1 \subset A$ فإنه يمكن كتابة A على الشكل $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ حيث A_k مجموعات من $\mathcal{G}$ منفصلة مثنى مثنى، مع العلم ان المجموعة الأولى من بين A_k هي المجموعة A_1 المشار اليها آنفاً.

نسمي كل جماعة مجموعات منفصلة مثنى مثنى : $A_1, A_2, \ldots, A_n$ اتحادها يساوي المجموعة المعطاة A تحليلاً (أو فكاً) منتهياً للمجموعة A.

إن كل حلقة مجموعات $\mathcal{R}$ تمثل نصف - حلقة لأنه إذا كانت $A \in \mathcal{R}$ وَ $A_1 \in \mathcal{R}$ وَ $A_1 \subset A$ فإننا نستنتج التحليل التالي:

$$A = A_1 \cup A_2$$

حيث $A_2 = A \setminus A_1 \in \mathcal{R}$.

نسوق الآن مثالاً لنصف – حلقة لا تمثل حلقة وذلك باعتبار مجموعة كل المجالات المفتوحة (a, b) والمغلقة $[a, b]$ ونصف – المفتوحة (أو نصف – المغلقة) $[a, b)$ وَ $(a, b]$ في المستقيم العددي [1]. هناك مثال آخر يتمثل في مجموعة المستطيلات «نصف – المفتوحة» $a < x \leq b$ ، $c < y \leq d$ في المستوى أو في مجموعة متوازيات المستطيلات نصف – المفتوحة في الفضاء.

لنبرهن على الخاصيات التالية التي تتمتع بها انصاف – حلقات المجموعات.

توطئة 1. لتكن: $A, A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات تنتمي إلى نصف الحلقة $\mathfrak{C}$. إذا كانت المجموعات A_i منفصلة مثنى مثنى ومحتواة كلها في A فإن جماعة المجموعات A_i $(i = 1, 2, ..., n)$. يمكن تتميمها بمجموعات $A_{n+1}, ..., A_s$ تنتمي إلى $\mathfrak{C}$ إلى أن نحصل على تحليل منته:

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k$$

(حيث $n \leq s$) للمجموعة A.

البرهان. نجري برهاناً بالتدريج. من أجل $n = 1$ نلاحظ ان نتيجة التوطئة تأتي مباشرة من تعريف نصف – الحلقة. لنفرض أن هذه النتيجة محققة من أجل $n = m$ ثم نعتبر $m + 1$ مجموعة: $A_1, ..., A_m, A_{m+1}$ تحقق شروط التوطئة. من فرض التدريج يأتي:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup B_1 \cup B_2 \dots \cup B_p$$

حيث B_q $(q = 1, 2, ..., p)$ مجموعات تنتمي إلى $\mathfrak{C}$.

نضع:

$$B_{q1} = A_{m+1} \cap B_q$$

من تعريف نصف – الحلقة نستنتج التحليل:

$$B_q = B_{q1} \cup B_{q2} \dots \cup B_{qr_q}$$

---

(1) بما في ذلك المجال الخالي (a, a) والمجال المغلق المؤلف من نقطة واحدة $[a, a]$.

حيث تنتمي المجموعات B_{qj} إلى $\mathcal{G}$. نرى بسهولة أن:

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1} \cup \bigcup_{q=1}^{p} \left(\bigcup_{j=2}^{r_q} B_{qj} \right)$$

وهكذا أثبتنا التوطئة من أجل المرتبة $m + 1$. وبذلك ينتهي البرهان.

توطئة 2. من أجل كل جماعة منتهية من المجموعات $A_1, \ldots, A_n$ المنتمية إلى نصف - الحلقة $\mathcal{G}$، توجد في $\mathcal{G}$ جماعة منتهية من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى: $B_1, \ldots, B_t$ بحيث يمكن كتابة كل مجموعة A_k على شكل اتحاد:

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$$

لبعض المجموعات B_s .

البرهان. التوطئة بديهية من أجل $n = 1$: يكفي أن نضع $t = 1$ وَ $B_1 = A_1$. نفرض صحة التوطئة من أجل $n = m$ ونعتبر في $\mathcal{G}$ جماعة مجموعات $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$. لتكن $B_1, B_2, \ldots, B_t$ المجموعات من $\mathcal{G}$ التي تحقق شروط التوطئة من أجل $A_1, A_2, \ldots, A_m$. نضع:

$$B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s$$

من التوطئة 1 نستنتج التحليل:

$$A_{m+1} = \bigcup_{s=1}^{t} B_{s1} \bigcup_{p=1}^{q} B'_p \tag{1}$$

حيث $B'_p \in \mathcal{G}$

ثم من تعريف نصف الحلقة يأتي التحليل:

$$B_s = B_{s1} \cup B_{s2} \cup \ldots \cup B_{sf_s}$$

حيث $B_{sj} \in \mathcal{G}$.

من السهل أن ندرك بأن:

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} \bigcup_{j=1}^{f_s} B_{sj} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

وأن المجموعات B_{s_j} وَ B'_p منفصلة مثنى مثنى. وبالتالي فإن المجموعات B_{s_j} ، B'_p تحقق شرطي التوطئة من أجل $A_1,...,A_m,A_{m+1}$. وبذلك ينتهي البرهان على التوطئة.

3. الحلقة المولدة عن نصف - الحلقة.

كنا رأينا في الفقرة 1 ان: من أجل كل جماعة مجموعات $\mathcal{G}$ توجد حلقة أصغرية وحيدة تحوي $\mathcal{G}$. إلا أنه ينبغي الاشارة إلى ان الانشاء الفعلي للحلقة $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ ، من أجل جماعة كيفية $\mathcal{G}$، بالغ التعقيد. لكن هذا الإنشاء يقبل الانجاز في الحالة الهامة التي يكون فيها $\mathcal{R}$ نصف حلقة. توضح النظرية الموالية هذا الإنشاء:

نظرية 3. إذا كانت $\mathcal{G}$ نصف حلقة فإن $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ تساوي الجماعة $\mathcal{B}$ المؤلفة من المجموعات A التي تقبل كل مجموعة منها تحليلاً من الشكل:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad , \quad A_k \in \mathcal{G}$$

البرهان. لنثبت أن الجماعة $\mathcal{B}$ حلقة. إذا كانت A وَ B مجموعتين كيفيتين من $\mathcal{B}$ فإن لدينا التحليلين:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad , \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j \quad , \quad A_i \in \mathcal{G}, B_j \in \mathcal{G}$$

لما كانت $\mathcal{G}$ نصف - حلقة فإن المجموعات:

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

تنتمي أيضاً إلى $\mathcal{G}$. من التوطئة 1 نستنتج التحليلين:

$$A_i = \bigcup_j C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{t_i} D_{ik} \quad , \quad B_j = \bigcup_i C_{ij} \cup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl} \tag{2}$$

حيث D_{ik} وَ E_{jl} مجموعات تنتمي إلى $\mathcal{G}$. من العلاقات (2) ينتج ان المجموعتين $A \cap B$ وَ $A \Delta B$ تقبلان التحليلين التاليين:

$$A \cap B = \bigcap_{i,j} C_{ij} \quad , \quad A \Delta B = \bigcup_{i,k} D_{ik} \cup \bigcup_{j,l} E_{jl}$$

وبالتالي فهما ينتميان أيضاً إلى B. وهكذا يتضح أن B حلقة ثم أنه من البديهي انها تمثل الحلقة الأصغرية في جماعة الحلقات التي تحوي $\mathfrak{G}$.

4. σ-جبور

تقودنا العديد من المسائل، وصفة خاصة نظرية القياس، إلى اعتبار اتحادات وتقاطعات مجموعات عددها منته أو متتالية مجموعات. ولهذا ينبغي إدخال المفهومين التاليين اضافة إلى مفهوم حلقة مجموعات.

تعريف 3 تسمى حلقة مجموعات σ-حلقة إذا كان احتواؤها لمتتالية مجموعات $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ يستلزم احتواءها لإتحاد هذه المجموعات $S = \bigcup_n A_n$.

تعريف 4 تسمى حلقة مجموعات δ-حلقة إذا كان احتواؤها لمتتالية مجموعات $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ يستلزم احتواءها لتقاطع هذه المجموعات $D = \bigcap_n A_n$.

من الطبيعي أن نسمي إذن σ-جبراً كل σ-حلقة ذات وحدة، وأن نسمي δ-جبراً كل δ-حلقة ذات وحدة. لكننا نرى بسهولة أن هذين المفهومين متطابقان: كل σ-جبر تمثل δ-جبراً وكل δ-جبر تمثل σ-جبراً. وهذه النتيجة تأتي من علاقتي الثنوية (راجع 1§):

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n)$$

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

إن ابسط مثال لـσ-جبر هو مجموعة أجزاء مجموعة كيفية A. إذا كانت لدينا جماعة مجموعات كيفية $\mathfrak{G}$ فإنه يوجد على الأقل σ-جبر يحوي هذه الجماعة. لرؤية ذلك نضع:

$$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{G}} A$$

ونعتبر الجماعة B المؤلفة من اجزاء المجموعة X . من الواضح ان B σ- جبر يحوي $\mathfrak{G}$. إذا كانت B σ- جبراً كيفياً يحوي $\mathfrak{G}$ وَ $\tilde{X}$ وحدته فإن كل مجموعة $A \in \mathfrak{G}$ محتواة في $\tilde{X}$ وبالتالي: $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{G}} A \subset \tilde{X}$. نقول عن B أنه جبر غير قابل للإختصـار (بالنسبة للجماعة $\mathfrak{G}$) عندما يكون: $\tilde{X} = \bigcup_{A \in \mathfrak{G}} A$. بعبارة أخرى فإن الـ σ- جبر غير القابلة للإختصـار σ- جبر لا يحوي نقاطاً غير منتمية إلى أية $A \in \mathfrak{G}$. من الطبيعي أن نعتبر في كل حالة الـ σ- جبور من هذا النوع لا غير.

لدينا نظرية مماثلة للنظرية 2 فيما يخص الـ σ- جبور غير القابلة للإختصـار:

نظرية 4. من أجل كل جماعة مجموعات غير خالية $\mathfrak{G}$، يوجد σ- جبر غير قابل للإختصـار (بالنسبة لهذه الجماعة) $B(\mathfrak{G})$ يحوي $\mathfrak{G}$ ومحتو في كل σ- جبر يحوي $\mathfrak{G}$.

البرهان هو برهان النظرية 2. تسمى الـ σ- جبر $B(\mathfrak{G})$ الـ σ- جبر الأصغري على الجماعة $\mathfrak{G}$.

تلعب المجموعات التي تسمى المجموعات البوريلية أو الـ B - مجموعات، دوراً هاماً في التحليل. إنها اجزاء المستقيم العددي التي تنتمي إلى الـ σ- جبر الأصغري على مجموعة كل المجالات المغلقة $[a, b]$.

5. جماعات المجموعات، والتطبيقات.

نشير إلى الخواص التالية التي سنستفيد منها لدى دراسة التوابع القابلة للقياس.

ليكن $y = f(x)$ تابعاً معرفاً على المجموعة M ذا قيم في المجموعة N ولتكن $\mathfrak{M}$ جماعة كيفية من أجزاء المجموعة M . نرمز بـ$f(\mathfrak{M})$ لجماعة الصور $f(A)$ للمجموعات المنتمية إلى $\mathfrak{M}$. من جهة أخرى، لتكن $\mathfrak{R}$ جماعة كيفية من

أجزاء N وَ $f^{-1}(\mathcal{R})$ جماعة الصور العكسية $f^{-1}(A)$ للمجموعات المنتمية إلى $\mathcal{R}$. لدينا في هذه الحالة الخواص التالية التي نطلب من القارئ التأكد منها :

1) إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة فإن $f^{-1}(\mathcal{R})$ حلقة أيضاً.

2) إذا كانت $\mathcal{R}$ جبراً فإن $f^{-1}(\mathcal{R})$ جبر أيضاً.

3) إذا كانت $\mathcal{R}$ σ - جبراً فإن $f^{-1}(\mathcal{R})$ σ - جبر أيضاً.

4) $\mathcal{R}\left(f^{-1}(\mathcal{R})\right) = f^{-1}\left(\mathcal{R}(\mathcal{R})\right)$.

5) $\mathcal{B}\left(f^{-1}(\mathcal{R})\right) = f^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathcal{R})\right)$

هل تبقى هذه الخواص قائمة عندما نستبدل f^{-1} بِـ f وَ $\mathcal{R}$ بِـ $\mathcal{M}$؟

الفصل الثاني

الفضاءات المترية والطوبولوجية

§1. مفهوم الفضاء المتري :

1. تعريف وأمثلة.

من العمليات ذات الأهمية البالغة في التحليل هي الإنتقال (أو المرور) إلى النهاية. تعتمد هذه العملية أساساً على مفهوم المسافة بين نقطتين المعرّفة على المستقيم العددي. هناك الكثير من النتائج الأساسية في التحليل التي لا ترتبط بالطبيعة الجبرية للأعداد الحقيقية (أي بكون هذه الأعداد تشكل حقلاً) وهي تعتمد على مفهوم المسافة لاغير. بتعميم فكرة الأعداد الحقيقية بصفتها مجموعة مزودة بمسافة نصل إلى مفهوم الفضاء المتري الذي يعتبر من أهم المفاهيم في الرياضيات الحديثة. نعرض هنا هذه الخطوط الأساسية لنظرية الفضاءات المترية وكذا تعميمها المتمثل في الفضاءات الطوبولوجية. هذا ونشير إلى أن نتائج الفصل ضرورية لبقية محتوى هذا الكتاب.

تعريف. نسمي فضاءً مترياً كل ثنائية (X, ϱ) مؤلفة من مجموعة عناصر (نقاط) X: (فضاء أو فراغ) ومن مسافة ϱ أي تابع حقيقي غير سالب $\varrho(x, y)$ معرّف من أجل كل x وَ y في X ويحقق المسلمات الثلاث التالية :

1) $\varrho(x, y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

2) (مسلمة التناظر) : $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$

3) (المتراجحة المثلثية) : $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

نرمز عادة للفضاء المتري أي للثنائية (X, ϱ) بحرف واحد :

$$R = (X, \varrho)$$

وإذا لم نخشَ التباساً، نرمز في معظم الأحيان للفضاء المتري بالحرف الذي يرمز لمجموعة نقاطه X.

نسوق فيما يلي أمثلة لفضاءات مترية، مع الملاحظة أن بعض هذه الفضاءات تلعب دوراً هاماً في التحليل.

1. لتكن X مجموعة كيفية. نضع من أجل كل عنصرين x وَ y منها:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \\ 1 & ; \quad x \neq y \end{cases}$$

بذلك نحصل على فضاء متري. يمكن أن نسمي هذا الفضاء فضاء النقاط المنعزلة.

2. إن مجموعة الأعداد الحقيقية المزودة بالمسافة:

$$\varrho(x, y) = |x - y|$$

فضاء متري، نرمز له بِـ$\mathbf{R}^1$.

3. إن مجموعة الجملة المرتبة المؤلفة من n عدداً حقيقياً:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

المزودة بالمسافة:

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} \tag{1}$$

تسمى الفضاء الحسابي الإقليدي ذي n بعداً ونرمز له بِـ$\mathbf{R}^n$. نلاحظ أن المسلمتين (1) وَ(2) بديهيتان في $\mathbf{R}^n$. لنثبت صحة المتراجحة المثلثية في $\mathbf{R}^n$.

لتكن $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ، $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ، $z = (z_1, \ldots, z_n)$. نكتب عندئذٍ المتراجحة المثلثية على الشكل:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} \tag{2}$$

بوضع $y_k - x_k = a_k$ و $z_k - y_k = b_k$ نحصل على:

$$z_k - x_k = a_k + b_k$$

وتصبح المتراجحة (2):

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{3}$$

لكن المتراجحة الأخيرة نتيجة مباشرة من المتراجحة الشهيرة وهي متراجحة كوشي - بونياكوفسكي[1](*) (Cauchy - Bouniakovsky):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \tag{4}$$

ذلك أنه يأتي من هذه المتراجحة أن:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2$$

ومنه تأتي المتراجحة (3)، ومنه المتراجحة (2).

4. نعتبر من جديد مجموعة الجمل المرتبة المؤلفة من n عدداً حقيقياً $x = (x_1, ..., x_n)$ ونعرف المسافة بين هذه العناصر بالعلاقة:

---

(1) تنتج هذه المتراجحة من المتطابقة:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2$$

التي يمكن التأكد منها بسهولة.

(*) تعرف أيضاً باسم متراجحة شفارتز (Schwarz). [المترجم].

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \qquad (5)$$

نلاحظ أن المسلمات الثلاث (1)، (2)، (3) بديهية هنا. نرمز لهذا الفضاء المتري المحصل عليه بالرمز $\mathbf{R}_1^n$.

5. نعتبر المجموعة المعرفة في المثالين 3 و 4 ونعرّف مسافة بين عناصر هذه المجموعة بواسطة العلاقة:

$$\varrho_0(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |y_k - x_k| \qquad (6)$$

من الواضح أن مسلمات تعريف المسافة بديهية هنا أيضاً. نرمز لهذا الفضاء المتري بـ $\mathbf{R}_0^n$، نشير إلى أن أهمية هذا الفضاء في العديد من مسائل التحليل تماثل أهمية الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$.

تبين الأمثلة الثلاثة السابقة أنه ينبغي أحياناً الإشارة لفضاء متري برمز يخالف الرمز المخصص لمجموعة نقاطه، ذلك لأن بالإمكان تزويد مجموعة بعدة مسافات.

6. إن المجموعة $C[a, b]$ المؤلفة من التوابع الحقيقية المستمرة المعرفة على المجال المغلق $[a, b]$ تشكل فضاءً مترياً عند تزويدها بالمسافة:

$$\varrho(f, g) = \max_{a \le t \le b} |g(t) - f(t)| \qquad (7)$$

نلاحظ هنا أيضاً بأن المسلمات الثلاث (1)، (2)، (3) محققة. يلعب هذا الفضاء دوراً بالغ الأهمية في التحليل. سنرمز له بـ$C[a, b]$ مثل مجموعة نقاطه. وبدل $C[0, 1]$ نكتب فقط C.

7. نرمز بـl_2 للفضاء المتري المؤلف من النقاط x:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

الممثلة لمتتاليات الأعداد الحقيقية التي تحقق:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

والمزود بالمسافة المعرفة بالدستور :

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \tag{8}$$

من المتراجحة البديهية :

$$(x_k \pm y_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2)$$

ينتج أن التابع $\varrho(x, y)$ معرف من أجل كل عنصرين x وَ y في l_2 ، أي أن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$ تتقارب في حالة صحة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \text{ وَ } \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty .$$

لنثبت الآن بأن التابع (8) يحقق مسلمات الفضاء المتري ، أن المسلمتين (1) وَ (2) بديهيتان؛ أما المتراجحة المثلثية فتكتب :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \tag{9}$$

مما سبق ينتج أن السلاسل الثلاث الواردة في (8) متقاربة . من جهة أخرى لدينا المتراجحة التالية من أجل كل n :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$

(راجع المثال 4) . إذا انتقلنا إلى النهاية $n \to +\infty$ في المتراجحة السابقة نحصل على المتراجحة (9)، أي المتراجحة المثلثية في l_2 .

8. نعتبر كما هو وارد في المثال 6، مجموعة التوابع المعرفة والمستمرة على المجال المغلق $[a, b]$، ونعرف المسافة بالعلاقة :

$$\varrho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt\right)^{1/2} \tag{10}$$

نرمز لهذا الفضاء المتري بِـ $C^2[a, b]$ ونسَميه فضاء التوابع المستمرة ذي المسافة التربيعية. نلاحظ هنا أيضا بداهة صحة المسلمتين (1) وَ (2)؛ أما المتراجحة المثلثية فتأتي من متراجحة كوشي-بونياكوفسكي في شكلها التكاملي[1]

$$\left(\int_a^b x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)\, \mathrm{d}t \cdot \int_a^b y^2(t)\, \mathrm{d}t$$

9. نعتبر مجموعة المتتاليات الحقيقية المحدودة

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

نضع:

$$\varrho(x, y) = \sup_k | y_k - x_k | \tag{11}$$

عندئذ نحصل على فضاء متري نرمز له بِـ m. نلاحظ أن المسلمات (1)، (2)، (3) بديهية.

10. إن مجموعة الجمل المرتبة ذات n عدداً حقيقياً، المزودة بالمسافة

$$\varrho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} | y_k - x_k |^p\right)^{1/p} \tag{12}$$

حيث p عدد كيفي أكبر من 1 أو يساويه، فضاء متري نرمز له بِـ $\mathbf{R}_p^n$. نلاحظ أن المسلمتين (1) و (2) بديهيتان. لنتأكد إذن من المسلمة (3). لتكن:

$$z_n = (z_1, ..., z_n) \text{ ، } y = (y_1, ..., y_n) \text{ ، } x = (x_1, ..., x_n)$$

(1) يمكن الحصول على هذه المتراجحة، مثلاً من المتطابقة التالية التي يمكن التأكد منها بسهولة:

$$\left(\int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t\right)^2 = \int_a^b x^2(t) \mathrm{d}t \int_a^b y^2(t) \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [x(s)y(t) - y(s)x(t)]^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \text{ ،}$$

ثلاث نقاط من $\mathbf{R}_p^n$. نضع :

$$y_k - x_k = a_k \quad , \quad z_k - y_k = b_k$$

عندئذٍ تأخذ المتراجحة التي نريد إثباتها $\varrho_p(x, z) \leq \varrho_p(x, y) + \varrho_p(y, z)$ الشكل التالي :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \qquad (13)$$

تسمى هذه المتراجحة متراجحة مينكوفسكي (Minkowski). إنها بديهية من أجل $p = 1$ (لأن طويلة مجموع أصغر من مجموع الطويلات)، ولهذا نعتبر $1 < p$ [1].

إن البرهان على المتراجحة (13) من أجل $p > 1$ يعتمد على متراجحة هولدر (Hölder) :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k \; b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \qquad (14)$$

حيث يكون العددان $1 < p$ وَ $1 < q$ مرتبطين بالعلاقة :

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (15)$$

نلاحظ أن المتراجحة (14) متجانسة؛ وذلك يعني أن صحتها من أجل شعاعين : $a = (a_1, ..., a_n)$ وَ $b = (b_1, ..., b_n)$ تستلزم صحتها من أجل الشعاعين λa وَ μb، حيث λ وَ μ عددان كيفيان. ولذا يكفي البرهان على المتراجحة (14) في الحالة التي يكون فيها :

---

(1) إن متراجحة مينكوفسكي خاطئة من أجل $p < 1$. بعبارة أخرى لو أردنا إعتبار الفضاء $\mathbf{R}_p^n$ من أجل $p < 1$ لكانت المتراجحة المثلثية غير محققة في مثل هذا الفضاء.

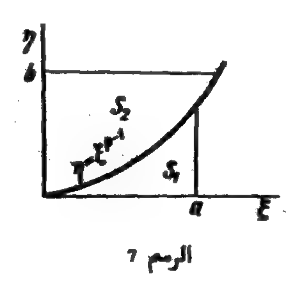
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1 \tag{16}$$

نفرض إذن بأن الشرط (16) محقق ولنبرهن أن:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k\, b_k| \le 1 \tag{17}$$

نعتبر على المستوى $(\xi\eta)$ المنحنى المعرف بالمعادلة: $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$، أي بالمعادلة $\xi = \eta^{q-1}$ (راجع الرسم 7). يتضح من الرسم أن لدينا: $s_1 + s_2 \ge ab$ من أجل كل قيمتين موجبتين a وَ b. لنحسب المساحتين s_1 وَ s_2:

$$s_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\, d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad s_2 = \int_0^b \eta^{q-1}\, d\eta = \frac{b^q}{q}$$



الرسم 7

وهكذا تأتي المتراجحة العددية:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \cdot$$

باستبدال a بِـ$|a_k|$ وَ b بِـ$|b_k|$ في هذه المتراجحة وبالجمع بالنسبة لِـk من 1 إلى n، نحصل بمراعاة (15) وَ (16)، على:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k\, b_k| \le 1$$

أي اننا نحصل على المتراجحة (17). وبالتالي فإن المتراجحة العامة (14) قد أثبتت أيضاً. إذا وضعنا $p = 2$ في متراجحة هولدر فإننا نجد من جديد متراجحة كوشي - بونياكوفسكي (4). ننتقل الآن إلى البرهان على متراجحة مينكوفسكي. من أجل ذلك نعتبر المطابقة:

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}|a| + (|a| + |b|)^{p-1}|b|$$

بتعويض a بـ a_k وَ b بـ b_k في المساواة السابقة وبالجمع بالنسبة لِـ k من 1 إلى n نحصل على:

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|b_k|$$

نطبق الآن متراجحة هولدر على كل من مجموعيْ الطرف الأيمن، نحصل عندئذٍ بمراعاة العلاقة $(p-1)q = p$، على:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(|a_k| + |b_k|\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q} \times \left(\left[\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right]^{1/p}\right)$$

نقسم طرفي المتراجحة السابقة على $\left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q}$ عندئذٍ يأتي:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$$

ومنه تأتي مباشرة المتراجحة (13). وهكذا نكون بذلك قد أثبتنا المتراجحة المثلثية في الفضاء $\mathbf{R}_p^n$.

إن المسافة ϱ_p المعتبرة في هذا المثال تساوي المسافة الإقليدية (راجع المثال 3) من أجل $p = 2$، والمسافة الواردة في المثال 4 من أجل $p = 1$. نستطيع البرهان على أن المسافة:

$$\varrho_0(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |y_k - x_k|$$

الواردة في المثال 5 تمثل نهاية المسـافة $\varrho_p(x, y)$، أي أن :

$$\varrho_0(x, y) = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}$$

من المتراجحة :

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، المثبتة أعلاه تنتج بسهولة متراجحة هولدر التكاملية وهي :

$$\int_a^b |x(t)\, y(t)|\, dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}$$

المحققة من أجل كافة التوابع $x(t)$ ، $y(t)$ التي يُوجد من أجلها تكاملا الطرف الأيمن. ومنه تأتي بدورها متراجحة مينكوفسكي التكاملية وهي :

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

11. نعالج هنا أيضـا مثالاً هاماً من الفضـاءات المترية. عناصر هذا الفضـاء هي متتاليات الأعداد الحقيقية :

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

المحققة لِـ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$$

حيث $p \ge 1$ عدد ثابت ؛ أما المسـافة المعرفة على هذه المجموعة فهي :

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p} \tag{18}$$

نرمز لهذا الفضاء بـ l_p.

لدينا المتراجحة التالية من أجل كل n وذلك بفضل متراجحة مينكوفسكي

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

بما أن السلسلتين:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

متقاربتان فرضاً فإن الانتقال إلى النهاية: $n \to +\infty$ في المتراجحة السابقة يعطي:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty \qquad (19)$$

وهكذا بينا أن المسافة المعرّفة على l_p بالدستور (18) موجودة فعلاً من أجل كل عنصر x وَ y في l_p. تثبت المتراجحة (19) أيضاً أن المتراجحة المثلثية محققة في l_p. أما المسلمتان (1) و(2) فهما بديهيتان.

نستطيع الحصول على عدد غير منته من الأمثلة الأخرى ويتم ذلك بالكيفية التالية. ليكن $R = (X, \varrho)$ فضاءً مترياً وَ M مجموعة جزئية كيفية من X. عندئذٍ نرى بأن الثنائية المكونة من المجموعة M والتابع $\varrho(x, y)$ الذي نفرضه، في هذه الحالة، معرفاً من أجل x وَ y في M، هي أيضاً فضاء متري؛ نسمي هذا الفضاء فضاءً جزئياً مترياً من الفضاء المتري R.

2. التطبيقات المستمرة من فضاء متري في آخر. التطبيق الأيزومتري.

ليكن X وَ Y فضاءين متريين وَ f تطبيقاً من X في Y. هذا يعني أننا نلحق بكل عنصر x من X عنصراً $y = f(x)$ من Y. نقول عن التطبيق f

أنه مستمر عند النقطة x_0 ، إذا إستطعنا ، من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد $\delta > 0$ بحيث تنتج من الشرط :

$$\varrho(x, x_0) < \delta \quad \forall x \in X$$

المتراجحة :

$$\varrho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(يرمز هنا ϱ للمسافة على X وَ ϱ_1 للمسافة على Y) . إذا كان التطبيق f مستمراً عند كل نقطة من الفضاء X فإننا نقول بأن f مستمر على X . إذا كانت X وَ Y مجموعتين عدديتين ، أي إذا كان f تابعاً عددياً معرفاً على مجموعة جزئية X من المستقيم العددي فإن التعريف أعلاه مطابق لتعريف الاستمرار المعروف في التحليل الأولي .

نستطيع أيضاً تعريف استمرار تابع (تطبيق) f ذي متغيرات متعددة $x_1 \in X_1$ ، ... ، $x_n \in X_n$ (حيث يرمز X_1 ، ... ، X_n لفضاءات مترية) يأخذ قيمه في فضاء متري Y ، ويتم ذلك بطريقة مماثلة للسابقة .

نشير إلى أن المسافة $\varrho(x, y)$ ، بإعتبارها تابعاً لمتغيرين x وَ y في X ، تابع مستمر . ينتج ذلك مباشرة من المتراجحة :

$$|\varrho(x, y) - \varrho(x_0, y_0)| \leq \varrho(x_0, x) + \varrho(y_0, y)$$

التي يمكن استخلاصها بسهولة من المتراجحة المثلثية .

إذا كان التطبيق $f: X \to Y$ تقابلاً فإنه يوجد تطبيق عكسي $x = f^{-1}(y)$ من الفضاء Y على الفضاء X . وإذا كان التطبيق f تقابلاً ومستمراً ثنوياً (أي إذا كان f وَ f^{-1} مستمرين) فإننا نسمي f تطبيقاً هوميومورفياً أو هوميومورفزم ويسمي الفضاءان X وَ Y عندئذٍ فضاءين هوميومورفيين . مثال ذلك المستقيم العددي $(-\infty, +\infty)$ ومجال مفتوح ما ، المجال $(-1, 1)$ مثلاً . نعرف الهوميومورفزم f في هذه الحالة بالعلاقة :

$$y \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x$$

هناك حالة خاصة هامة للتطبيقات الهوميومورفية وهو التطبيق الأيزومتري .

نقول عن التقابل f بين الفضاءين المتريين $R = (X, \varrho)$ وَ $R' = (Y, \varrho')$ أنه تطبيق أيزومتري إذا كان :

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho'(f(x_1), f(x_2))$$

وهذا من أجل كل x_1 وَ x_2 في R . نقول عن الفضاءين R وَ R' في هذه الحالة أنهما أيزومتريان .

إن القول بأن الفضاءين R وَ R' أيزومتريان يعني بأن العلاقات المترية بين عناصر المجموعتين واحدة ، والفرق الوحيد الذي قد يظهر لا يتعلق إلاّ بطبيعة تلك العناصر ، ولكن هذا غير مهم من وجهة نظر نظرية الفضاءات المترية . ولذا نعتبر الفضاءات المترية الأيزومترية في المستقبل كفضاءات متطابقة .

سنعود ثانية إلى المفهومين السابقين (الإستمرار والهوميومورفية) لمعالجتها من وجهة نظر أعم من السابقة وذلك ضمن 5§ الواردة في آخر هذا الفصل .

§ 2. التقارب . المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة .

1. نقاط التراكم . الملاصق .

نُدخل فيما يلي بعض المفاهيم الخاصة بنظرية الفضاءات المترية وهي المفاهيم التي سنكثر من إستعمالها مستقبلاً .

الكرة المفتوحة $B(x_0, r)$ في فضاء متري R هي تعريفاً مجموعة النقاط $x \in R$ المحققة للمتراجحة :

$$\varrho(x, x_0) < r$$

تسمى النقطة x_0 مركز الكرة ويسمى العدد r نصف قطر الكرة . الكرة المغلقة $B[x_0, r]$ في فضاء متري R هي تعريفاً مجموعة النقاط $x \in R$ المحققة للمتراجحة :

$$\varrho(x, x_0) \leq r$$

تسمى الـكرة المفتوحة $B(x_0, \varepsilon)$ ε – جواراً للنقطة x_0 ونرمز لها بِـ: $O_\varepsilon(x_0)$.

تمرين. أعط مثالاً لفضـاء متري يحوي كرتين $B(x, \varrho_1)$ وَ $B(y, \varrho_2)$ بحيث $\varrho_1 > \varrho_2$ وَ $B(x, \varrho_1) \subset B(y, \varrho_2)$.

نقول عن نقطة $x \in R$ أنها نقطة ملاصقة للمجموعة $M \subset R$ إذا احتوى كل جوار لِـ x على نقطة واحدة على الأقل من M . تسمى مجموعة النقاط الملاصقة لمجموعة M ملاصق M ونرمز له بِـ $[M]$. وهكذا عرفنا على مجموعات فضـاء متري عملية الملاصقة المتمثلة في الإنتقال من مجموعة M إلى ملاصقها $[M]$.

نظرية 1. تتمتع عملية الملاصق بالخواص التالية:

1) $M \subset [M]$

2) $[[M]] = [M]$

3) إذا كان $M_1 \subset M_2$ فإن $[M_1] \subset [M_2]$

4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

البرهان. إن الخاصية الأولى بديهية لأن كل نقطة من M نقطة ملاصقة لِـ M . لنثبت الخاصية الثانية.

لتكن x نقطة من $[[M]]$. إن كل جوار $O_\varepsilon(x)$ لهذه النقطة يحوي نقطة $x_1 \in [M]$. نضع $\varepsilon - \varrho(x, x_1) = \varepsilon_1$ ونعتبر الـكرة $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. إنها محتوية بأكملها في $O_\varepsilon(x)$. ذلك لأنه إذا كان $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ فإن $\varrho(z, x_1) < \varepsilon$ وبما أن $\varrho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$ فإن المتراجحة المثلثية تعطى:

$$\varrho(z, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon$$

أي أن $z \in O_\varepsilon(x)$. لما كان $x_1 \in [M]$ فإنه توجد في $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ نقطة

$M \ni x_2$. وفي هذه الحالة يأتي $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. ثم إن $O_\varepsilon(x)$ جوار كيفي لِـ x ، لدينا إذن $x \in [M]$. وبذلك يتم إثبات الخاصية الثانية .

أما الخاصية الثالثة فهي بديهية . لنثبت الخاصية الرابعة . إذا كان $x \in [M_1 \cup M_2]$ فإن x ينتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين $[M_1]$ وَ $[M_2]$ ، أي أن :

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2]$$

ثم لما كان $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ وَ $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ فإن الإتجاه الثاني للإحتواء السابق يأتي من الخاصية الثالثة .

وبذلك ينتهي البرهان على النظرية .

نقول عن نقطة $x \in R$ إنها نقطة تراكم في (أو لِـ) المجموعة $M \subset R$ إذا احتوى كل جوار لِـ x على عدد غير منته من نقاط M .

نلاحظ أن نقطة تراكم في المجموعة M قد تنتمي لهذه المجموعة وقد لاتنتمي اليها . فمثلاً إذا كانت M مجموعة الأعداد الناطقة (الكسرية) في قطعة المستقيم $[0, 1]$ فإن كل نقطة من هذه القطعة تمثل نقطة تراكم له .

نقول عن نقطة x من M إنها نقطة منعزلة لهذه المجموعة إذا وجد جوار $O_\varepsilon(x)$ لِـ x لايحتوي على أية نقطة من M غير x . نقترح على القارئ أن يثبت القضية التالية :

كل نقطة ملاصقة لِـ M هي حتماً نقطة تراكم لِـ M أو نقطة منعزلة لهذه المجموعة .

ومنه نستنتج أن كل ملاصق $[M]$ مؤلف من نقاط تنقسم إلى ثلاثة أنواع :

1) النقاط المنعزلة للمجموعة M .

2) نقاط تراكم M المنتمية إلى M .

3) نقاط تراكم M التي لا تنتمي إلى M .

وبالتالي نحصل على الملاصق $[M]$ لمجموعة M بضم إليها كل نقاط تراكمها.

2. التقارب.

لتكن: $x_1, x_2, ...$ متتالية نقاط من الفضـاء المتري R. نقول عن هذه المتتالية إنها متقاربة نحو x إذا احتوى كل جوار $O_\varepsilon(x)$ لِـ x كل النقاط x_n ابتداء من مرتبة معينة، أي إذا إستطعنا، من أجل كل $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد طبيعي N_ε بحيث يكون $O_\varepsilon(x)$ محتوياً لـكافة النقاط x_n إبتداء من $N_\varepsilon < n$. تسمى النقطة x نهاية المتتالية $\{x_n\}$.

نستطيع إعادة صياغة التعريف السـابق على النحو التالي:

تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ نحو x إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n \to +\infty} \varrho(x, x_n) = 0$$

نلاحظ من خلال التعريف أنه:

1) لا يمكن أن تكون لمتتالية نهايتان مختلفتان.

2) إذا تقاربت المتتالية $\{x_n\}$ نحو x فإن كل متتالية جزئية $\{x_n\}$ متقاربة نحو نفس النهاية x.

تبين النظرية الموالية الصلة المتينة بين مفهوم النقطة الملاصقة ومفهوم النهاية.

نظرية 2. لكي تكون نقطة x ملاصقة لمجموعة M يلزم ويكفي أن توجد متتالية $\{x_n\}$ من نقاط M تقبل x كنهاية لها.

البرهان. من الواضح أن الشرط لازم لأنه إذا كانت x نقطة ملاصقة للمجموعة M فإن كل جوار $O_{1/n}(x)$ لِـ x يحوي على الأقل نقطة x_n من M. ونلاحظ عندئذٍ أن هذه النقاط تكون متتالية (x_n) متقاربة نحو x. أما كفاية الشرط فهي بديهية.

إذا كانت x نقطة تراكم لِـ M فإن النقاط :

$$x_n \in O_{1/n}(x) \cap M$$

(الموافقة لأعداد n مختلفة) يمكن إختيارها بحيث تكون مختلفة مثنى مثنى وبالتالي :

حتى تكون x نقطة تراكم للمجموعة M يلزم ويكفي أن توجد في M متتالية نقاط مختلفة مثنى مثنى تقبل x كنهاية لها.

نستطيع الآن التعبير عن مفهوم إستمرار تطبيق من فضاء متري X في فضاء متري Y الوارد في 1 § بدلالة مفهوم تقارب المتتاليات. ويتم ذلك على النحو التالي : يكون التطبيق $y = f(x)$ مستمراً عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت المتتالية $\{y_n = f(x_n)\}$ متقاربة نحو : $y_0 = f(x_0)$ وذلك من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ متقاربة نحو x_0. إنه لا فرق بين البرهان على تكافؤ هذا التعريف والتعريف الوارد في 1 § والبرهان على تكافؤ التعريفين المماثلين («بدلالة δ, ε» وَ «بدلالة المتتاليات») الخاصين باستمرار التوابع العددية، ولذا نترك إثبات ذلك للقارئ.

3. المجموعات الجزئية الكثيفة.

لتكن A وَ B مجموعتين من فضاء متري R. نقول عن A إنها كثيفة في B إذا كان $B \subset [A]$. وبصفة خاصة نقول عن A إنها كثيفة أينما كان (في الفضاء R) إذا كان ملاصقها $[A]$ يساوي الفضاء R بأكمله. فمثلاً تشكل مجموعة الأعداد الناطقة مجموعة كثيفة أينما كان في مجموعة الأعداد الحقيقية. نقول عن مجموعة A إنها غير كثيفة في مكان إذا لم تكن هذه المجموعة كثيفة في أية كرة، أي إذا كانت كل كرة $B \subset R$ محتوية لكرة أخرى B' تحقق $B' \cap A = \Phi$.

● أمثلة لفضاءات تحوي مجموعة كثيفة أينما كان وقابلة للعد. يسمى كل فضاء متري يحوي مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان فضاءاً قابلاً للفصل. لندرس من وجهة النظر هذه الأمثلة الواردة في 1 §.

1. يحتوي الفضـاء «المتقطع» المعرّف في المثال 1 من § 1 على مجموعة كثيفة أينما كان وقابلة للعد إذا وفقط إذا كان هذا الفضـاء مجموعة قابلة للعد. ذلك لأن الملاصق $[M]$ لمجموعة ما M من هذا الفضـاء يسـاوي M نفسه.

نلاحظ بخصوص الأمثلة من 2 إلى 8 الواردة في § 1 أن الفضـاءات المعرفة فيها تحتوي كلها على مجموعات كثيفة أينما كان وقابلة للعد. نورد فيما يلي هذه المجموعة ونوصي القارئ بأن يجري كل البراهين مفصلة.

2. بخصوص الفضـاء $\mathbf{R}^1$ مجموعة الأعداد الناطقة كثيفة اينما كان.

3 - 5. في الفضـاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$ والفضـاءين $\mathbf{R}_0^n$ وَ $\mathbf{R}_1^n$: مجموعة الأشعة التي لها إحداثيات ناطقة.

6. في الفضـاء $C[a, b]$: مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الناطقة.

7. في الفضـاء l_2 : مجموعة المتتاليات ذات الحدود الناطقة والمنعدمة ماعدا عدداً منتهياً من هذه الحدود (وعدد الحدود غير المنعدمة يختلف عموماً باختلاف المتتاليات).

8. في الفضـاء $C^2(a, b]$: مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الناطقة.

أما فضـاء المتتاليات المحدودة m (المثال 9، § 1) فهو غير قابل للفصل.

لرؤية ذلك نعتبر كل المتتاليات الممكنة التي تتألف حدودها من 0 وَ 1. تشكل هذه المتتاليات مجموعة لها قوة المستمر (لأنه بالإمكان إنشـاء تقابل بين هذه المتتاليات والمجموعات الجزئية لمجموعة الأعداد الطبيعية) إن المسـافة بين نقطتين من هذا النوع، المعرّفة بواسطة الدستور (11) في § 1، تسـاوي 1. نحيط كل نقطة من هذه النقاط بكرة مفتوحة نصف قطرها 1/2. نلاحظ أن هذه الـكرات غير متقاطعة. إذا كانت مجموعة ما كثيفة أينما كان في m فإن كل كرة من الـكرات السـابقة ينبغي أن تحوي على الأقل نقطة من هذه المجموعة؛ وبالتالي فإن مثل هذه المجموعة لا يمكن أن تكون قابلة للعد.

4. المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة.

نعتبر أهم أنماط المجموعات في فضاء متري، وهي المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة.

نقول عن مجموعة M من الفضاء المتري R أنها مجموعة مغلقة إذا تساوت هذه المجموعة مع ملاصقها: $M = [M]$. أي إن M تكون مغلقة إذا وفقط إذا إحتوت على كافة نقاط تراكمها.

يتبين من النظرية 1 أن ملاصق كل مجموعة يساوي مجموعة مغلقة. ويأتي من نفس النظرية أن $[M]$ هو أصغر المجموعات المغلقة التي تحوي M. (برهن على ذلك!).

أمثلة. 1. كل مجال مغلق $[a, b]$ من المستقيم العددي مجموعة مغلقة.

2. كل كرة مغلقة مجموعة مغلقة. بصفة خاصة تشكل مجموعة التوابع f من الفضاء $C[a, b]$ المحققة للمتراجحة: $|f(t)| \leq K$ مجموعة مغلقة.

3. إن مجموعة التوابع f من $C[a, b]$ المحققة للمتراجحة $|f(t)| < K$ (وهي كرة مفتوحة) ليست مجموعة مغلقة، ذلك أن ملاصقها هو مجموعة التوابع التي تحقق الشرط $|f(t)| \leq K$.

4. مهما كان الفضاء المتري R فإن المجموعة الخالية Φ والمجموعة R نفسها مجموعتان مغلقتان.

5. كل مجموعة مؤلفة من عدد منته من العناصر مجموعة مغلقة.

تبرز النظرية التالية الخواص الأساسية للمجموعة المغلقة.

نظرية 3. إن كل تقاطع وكل إتحاد منته لمجموعات مغلقة مجموعتان مغلقتان.

البرهان. ليكن $F = \cap F_\alpha$ تقاطعا لمجموعات مغلقة F_α ولتكن x نقطة تراكم لـF. ذلك يعني أن كل جوار $O_\varepsilon(x)$ لـx يحوي عدداً غير منته من نقاط F. ومنه يتبين أن $O_\varepsilon(x)$ يحوي عددا غير منته من نقاط كل مجموعة F_α، وبما أن كل المجموعات F_α مغلقة فإن النقطة x تنتمي إلى كل F_α؛ وبالتالي: $x \in F = \cap F_\alpha$ أي أن F مغلق.

لتكن F إتحاد عدد منته من المجموعات المغلقة : $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ولتكن x نقطة لا تنتمي إلى F . لنثبت أن x لا يمكن أن تكون نقطة تراكم لِـ F . ذلك أن x لا ينتمي إلى أية مجموعة من المجموعات المغلقة F_i ؛ إذن فإن x لا يمكن أن يكون نقطة تراكم لأية مجموعة من هذه المجموعات . وبالتالي ، من أجل كل i يوجد جوار $O_{\varepsilon_i}(x)$ للنقطة x يحوي (على الأكثر) عدداً منتهياً من نقاط F_i . بأخذ أصغر الجوارات : $O_{\varepsilon_1}(x), \ldots, O_{\varepsilon_n}(x)$ نحصل على جوار $O_\varepsilon(x)$ للنقطة x يحوي على الأكثر عدداً منتهياً من نقاط F . وهكذا إذا لم ينتم x لِـ F فإنه من غير الممكن أن يكون هذا العنصر نقطة تراكم لِـ F ، أي أن F مجموعة مغلقة . وبذلك ينتهي برهان النظرية .

نقول عن نقطة x أنها نقطة داخلية للمجموعة M إذا وجد $O_\varepsilon(x)$ لهذه النقطة بحيث $O_\varepsilon(x) \subset M$.

إذا كانت مجموعة ما مساوية لمجموعة نقاطها الداخلية فإننا نقول عن المجموعة المعتبرة أنها مجموعة مفتوحة .

أمثلة . 6. كل مجال (a, b) مفتوح من المستقيم العددي R^1 مجموعة مفتوحة . ذلك أنه إذا كان $a < \alpha < b$ فإن الجوار $O_\varepsilon(\alpha)$ لِـ α ، حيث $\varepsilon = \min(\alpha - a, b - \alpha)$ ، محتو بأكمله في المجال (a, b) .

7. كل كرة مفتوحة $B(a, r)$ في فضاء متري R مجموعة مفتوحة . لرؤية ذلك نلاحظ أنه إذا كان $x \in B(a, r)$ فإن : $\varrho(a, x) < r$. نضع $\varepsilon = r - \varrho(a, x)$. عندئذٍ $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

8. تشكل مجموعة التوابع المستمرة على المجال المغلق $[a, b]$ بحيث $f(t) < g(t)$ ، حيث $g(t)$ تابع مستمر مثبت ما ، مجموعة جزئية مفتوحة من الفضاء $C[a, b]$.

نظرية 4. إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة M مفتوحة هو أن يكون متممها $R \setminus M$ مغلقاً .

البرهان. إذا كانت المجموعة M مفتوحة فإن كل نقطة $x \in M$ تقبل جواراً محتوياً في M ، أي جواراً ليس له أية نقطة مشتركة مع $R \setminus M$. إذن فليست هناك نقطة ملاصقة لـ$R \setminus M$ لا تنتمي إلى $R \setminus M$ ، وهذا يعني أن $R \setminus M$ مغلقة. والعكس بالعكس إذا كان $R \setminus M$ مغلقاً فإن كل نقطة M تقبل جواراً محتوياً في M أي أن M مفتوحة.

بما أن المجموعة الخالية وكل فضاء R مجموعتان مغلقتان، وبما أن كليهما متمم للثاني فإننا نستنتج بأن المجموعة الخالية والفضاء R مجموعتان مفتوحتان.

تنتج من النظرية 3 ومبدأ الثنوية (تقاطع المتممات يساوي متمم الاتحاد، واتحاد المتممات يساوي متمم التقاطع) النظرية الهامة التالية، الثنوية للنظرية 3.

نظرية 3. كل إتحاد (منته أو غير منته) وكل تقاطع منته لمجموعات مفتوحة، مجموعتان مفتوحتان.

تسمى المجموعات المنتمية إلى σ – الجبر الأصغري المولد عن كل المجموعات المفتوحة والمغلقة، مجموعات بوريلية (نسبة لبوريل Borel).

5. المجموعات المفتوحة والمغلقة على المستقيم.

من الممكن أن تكون بنية المجموعات المفتوحة والمغلقة في فضاء متري من الصعوبة بمكان. ونلقى هذه الصعوبة حتى في المجموعات المغلقة والمفتوحة من فضاء إقليدي ذي بعدين أو أكثر. إلا أن حالة بعد واحد، أي حالة المستقيم العددي لا تبدي أية صعوبة بل بإمكاننا وصف كافة المجموعات المفتوحة وصفاً كاملاً ودقيقاً (وذلك هو الشأن أيضاً بالنسبة للمجموعات المغلقة). والوصف هذا تعطيه النظرية التالية:

نظرية 5. كل مجموعة مفتوحة من المستقيم العددي إتحاد منته أو قابل للعد لمجالات[1] غير متقاطعة مثنى مثنى.

البرهان. لتكن G مجموعة مفتوحة من المستقيم العددي. ندخل على G علاقة تكافؤ بوضع $x \sim y$ عند وجود مجال (α, β) بحيث يكون x وَ y منتميين إلى $G \supset (\alpha, \beta)$. من الواضح أن هذه العلاقة إنعكاسية وتناظرية، وهي أيضاً متعدية لأنه إذا كان $x \sim y$ وَ $z \sim y$ فإن هناك مجالين $(\alpha ، \beta)$ وَ (γ, δ) بحيث:

$$x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$$
$$y, z \in (\gamma, \delta) \subset G$$

لكن $\gamma < \beta$ والمجال $G \supset (\gamma, \delta)$ وهو يحوي النقطتين x وَ z. وبالتالي فإن المجموعة G منقسمة إلى صفوف غير متقاطعة I_τ مؤلفة من نقاط متكافئة فيما بينها:

$$G = \cup I_\tau$$

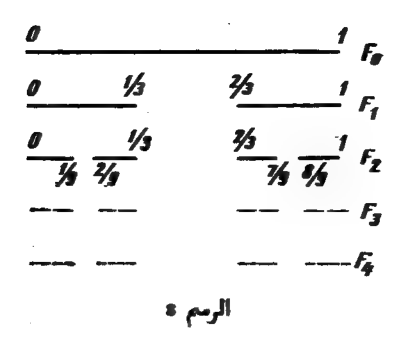
لنثبت أن كل I_τ مجال (a, b) حيث $a = \text{Inf}\, I_\tau$ وَ $b = \sup I_\tau$.

إن الإحتواء $I_\tau \subset (a, b)$ بديهي. من جهة أخرى إذا انتمى x وَ y إلى I_τ فإن تعريف I_τ يؤدي إلى $(x, y) \subset I_\tau$. توجد في كل مقربة (أو ضاحية) من a على اليمين وفي كل مقربة لِـ b على اليسار، نقاط من I_τ. إذن فإن I_τ يحوي كل مجال (a', b') طرفاه a' وَ b' ينتميان إلى (a, b)، ومنه يأتي $I_\tau = (a, b)$. إن جماعة المجالات غير المتقاطعة I_τ التي نحصل عليها بهذه الطريقة جماعة منتهية أو قابلة للعد، ذلك أننا إذا إخترنا بطريقة كيفية في كل مجال من هذه المجالات نقطة ناطقة فإننا نعين تقابلاً بين مجموعة هذه المجالات وجزء من مجموعة الأعداد الناطقة. وبذلك يتم البرهان على النظرية.

بما أن كل مجموعة مغلقة متممة لمجموعة مفتوحة نستنتج أن كل مجموعة مغلقة من المستقيم العددي يمكن الحصول عليها بإزالة عدد منته أو متتالية المجالات من المستقيم العددي.

---

(1) تعتبر المجموعات من الشكل $(-\infty, \infty)$، (α, ∞)، $(-\infty, \beta)$ هي الأخرى مجالات.



الرسم 8

كأمثلة أولية لمجموعات مغلقة من المستقيم العددي يمكن ذكر قطع المستقيم (أي المجالات المغلقة والمحدودة) والنقاط المنعزلة والإتحادات المنتهية لمثل تلك المجموعات. هناك مثال أكثر تعقيداً لمجموعة مغلقة في المستقيم العددي وهي مجموعة كانتور الثلاثية (أو الثالوثية) التي نعرّف بها هنا.

ليكن F_0 المجال المغلق $[0, 1]$. نزيل منه المجال المفتوح $(1/3, 2/3)$ ونرمز للمجموعة المغلقة المتبقية بـ F_1. نزيل بعد ذلك المجالين $(1/9, 2/9)$ وَ $(7/9, 8/9)$ ونرمز للمجموعة المغلقة المتبقية التي تحوي أربع قطع مستقيمة) بـ F_2. نزيل من كل قطعة من القطع الأربع المذكورة المجال المتوسط الذي طوله $(1/3)^3$، الخ. (الرسم 8) بإعادة هذه العملية نحصل على متتالية متناقصة من المجموعات المغلقة F_n. نضع:

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

إن F مجموعة مغلقة (لأنها تقاطع مجموعات مغلقة). وقد حصلنا على F من القطعة $[0, 1]$ وذلك بإزالة جماعة قابلة للعد من المجالات المحتوية في $[0, 1]$.

لندرس بنية المجموعة F. إنها تحوي النقاط:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \ldots \qquad (1)$$

أي أطراف المجالات المزالة. لكن المجموعة F تحوي نقاطاً أخرى بالإضافة إلى النقاط (1). ذلك أنه بالإمكان تمييز نقاط القطعة $[0, 1]$ المنتمية

إلى المجموعة F كما يلي: نكتب كل عدد من الأعداد x $(0 \le x \le 1)$ وفق الجملة التي أساسها 3، أي:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

حيث يمكن للأعداد a_n أن تأخذ القيم 0، 1، 2. كما هو الحال بالنسبة للنشر العشري فإنه يحتمل أن يكون لبعض الأعداد تمثيلان مختلفان مثلاً:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \dots + \frac{0}{3^n} + \dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots \frac{2}{3^n} + \dots$$

نتأكد بسهولة من أن المجموعة F تحوي النقاط x، $(0 \le x \le 1)$ التي تقبل نشراً ثلاثياً واحداً على الأقل بحيث تكون قيم عناصر المتتالية $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ تخالف كلها 1، ولا تحوي غير هذه النقاط. إذن نستطيع أن نلحق بكل نقطة $x \in F$ متتالية:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \tag{2}$$

حيث a_n يساوي 0 أو 2. إن لمجموعة هذه المتتاليات قوة المستمر. للإقتناع بذلك يكفي أن نلحق بكل متتالية (2) متتالية:

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \tag{2'}$$

حيث $b_n = 0$ لما $a_n = 0$ وَ $b_n = 1$ لما $a_n = 2$. يمكن أن نعتبر المتتالية (2′) كنشر مثنّى لعدد حقيقي y،$(0 \le y \le 1)$. نحصل بذلك على تطبيق من المجموعة F على قطعة المستقيم $(0, 1)$. ومنه نستنتج أن لِـ F قوة المستمر(1). لما كانت مجموعة النقاط (1) قابلة للعد فإن هناك نقاطاً أخرى تحتوي عليها المجموعة F.

تمارين 1. أثبت بطريقة مباشرة أن النقطة $\frac{1}{4}$ تنتمي إلى المجموعة F بدون أن تكون طرفاً لمجال مزال.

---

(1) إن التطبيق المعرف بين F وَ $[0, 1]$ تباين وليس تقابلاً (لأنه يحدث أن يكون لنفس العدد نشران مختلفان). ومنه ينتج أن لِـ F قوة المستمر على الأقل. لكن F جزء من القطعة $[0, 1]$، ولذا فإن قوتها لا تتجاوز قوة المستمر.

إشـارة إلى الحل: تقسم النقطة $\frac{1}{4}$ القطعة $[0, 1]$ وفق النسبة $1:3$، وهي تقسم وفق نفس النسبة القطعة $[0, 1/3]$ المتبقية بعد الإزالة الأولى، الخ.

تسمى النقاط (1) نقاط النوع الأول للمجموعة F، وتسمى النقاط الأخرى نقاط النوع الثاني للمجموعة F.

2. أثبت أن نقاط النوع الأول تشكل مجموعة كثيفة أينما كان في F.

3. أثبت أن الأعداد من الشكل $t_1 + t_2$ حيث $t_1 \in F$ وَ $t_2 \in F$ تملأ كل القطعة $[0, 2]$.

بينا أن للمجموعة F قوة المستمر؛ أي أنها تحوي كمية من النقاط مساوية لـكمية نقاط $[0, 1]$.

من المفيد أن نقارن ذلك بالنتيجة التالية: إن مجموعة الأطوال

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

وهي أطوال المجالات المزالة، يساوي بالضبط 1!

ملاحظات مكملة.

1. لتكن M مجموعة كيفية من الفضـاء المتري R وَ x نقطة من هذا الفضـاء. المسـافة بين النقطة x والمجموعة M هي العدد:

$$\varrho(x, M) = \operatorname*{Inf}_{a \in M} \varrho(x, a)$$

إذا انتمى x إلى M فلدينا $\varrho(x, M) = 0$، لكن المساواة: $\varrho(x, M) = 0$ لا تعني حتماً أن $x \in M$. من تعريف النقطة الملاصقة نستنتج مباشرة أن $\varrho(x, M) = 0$ إذا وفقط إذا كانت x نقطة ملاصقة للمجموعة M.

وهكذا يمكن تعريف عملية الملاصقة على أنها تمثل في إضـافة إلى المجموعة المعتبرة كل النقاط التي تفصلها عن هذه المجموعة مسـافة منعدمة.

2. نعرف بطريقة مماثلة المسافة بين مجموعتين A وَ B من فضاء متري R، ويتم ذلك بوضع:

$$\varrho(A, B) = \operatorname*{Inf}_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \varrho(a, b)$$

إذا كان $A \cap B \neq \Phi$ فإن $\varrho(A, B) = 0$، لكن القضية العكسية غير صحيحة عموماً.

3. لتكن M_K مجموعة كل التوابع f المنتمية للفضاء $C[a, b]$ والمحققة لشرط ليبشيتز (Lipschitz): من أجل كل عنصرين t_1 وَ t_2 في $[a, b]$ يجب أن يكون:

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq K|t_2 - t_1|$$

حيث K ثابت. إن المجموعة M_K مغلقة. وهي تساوي ملاصق مجموعة التوابع القابلة للإشتقاق على $[a, b]$ والمحققة لِـ:

$$|f'(t)| \leq K$$

4. إن المجموعة: $M = \bigcup_K M_K$ المؤلفة من كافة التوابع التي يحقق كل واحد منها شرط ليبشيتز من أجل قيمة لِـK مجموعة غير مغلقة. نلاحظ من جهة أخرى أن ملاصقها يساوي الفضاء $C[a, b]$ بأكمله.

5. نقول عن مجموعة مفتوحة G من الفضاء الاقليدي ذي n بعداً أنها مجموعة مترابطة إذا استطعنا وصل كل نقطتين x وَ y من G بخط منكسر محتوٍ كله في G. مثال ذلك داخلية (أو داخل) القرص: $x^2 + y^2 < 1$ فهي مجموعة مترابطة؛ وعلى الرغم من ذلك فإن إتحاد القرصين $x^2 + y^2 < 1$ وَ $(x - 2)^2 + y^2 < 1$ لا يساوي مجموعة مترابطة (مع أن لهذين القرصين نقطة ملاصقة مشتركة!). نقول عن مجموعة جزئية مفتوحة H من المجموعة المفتوحة G أنها مركبة مترابطة لِـG إذا كانت H مترابطة وغير محتوية في أية مجموعة جزئية مفتوحة ومترابطة (أكبر منه) من المجموعة G. تعرّف على G علاقة تكافؤ: $x \sim y$ إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة ومترابطة H من G تحوي x وَ y: $x, y \in H \subset G$.

نبين بسهولة، كما هو الحال بالنسبة للمستقيم، أن هذه العلاقة متعدية؛ يتألف إذن G من صفوف غير متقاطعة: $G \cup I$. وهذه الصفوف تمثل مركبات مترابطة ومفتوحة من G . ثم أنها تشكل مجموعة قابلة للعد، على الأكثر.

من أجل $n = 1$ ، أي على المستقيم نلاحظ أن كل مجموعة مفتوحة ومترابطة مجال [من بين هذه المجالات المجموعات $(-\infty, a)$ (b, ∞)، $(-\infty, \infty)$] . وهكذا يتضح أن النظرية 5 الخاصة ببنية المجموعات المفتوحة للمستقيم تتضمن تأكيدين: (أ) كل مجموعة مفتوحة من المستقيم إتحاد منته أو قابل للعد لمركبات مترابطة. (ب) كل مجموعة مفتوحة ومترابطة من المستقيم مجال. إن التأكيد الأول صالح أيضاً من أجل مجموعات الفضاءات الإقليدية ذات n بعداً (ويقبل هذا التأكيد، إضافة إلى ذلك، تعميمات أخرى) أما التأكيد الثاني فهو خاص بالمستقيم العددي.

§3. الفضاءات المترية التامة

1. تعريف وأمثلة لفضاءات مترية تامة

لا بد أن القارئ قد أدرك منذ الخطوات الأولى التي خطاها في دراسة التحليل الرياضي الدور الهام الذي تلعبه خاصية تمام المستقيم العددي، وهي الخاصية القائلة أن كل متتالية كوشية من الأعداد الحقيقية متتالية متقاربة نحو عدد حقيقي. يمثل المستقيم العددي أبسط مثال للفضاءات المترية التامة التي خصصنا لدراسة خواصها الأساسية هذا البند.

نقول عن متتالية نقاط $\{x_n\}$ من فضاء متري R أنها متتالية كوشية (أو من نوع كوشي) إذا حققت شرط كوشي وهو:

من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N_ε بحيث $\varrho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ مهما كان $N_\varepsilon < n'$ وَ $N_\varepsilon < n''$.

من المتراجحة المثلثية ينتج مباشرة أن كل متتالية متقاربة متتالية من نوع كوشي . ذلك أنه إذا تقاربت $\{x_n\}$ نحو x فإن : من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N_ε بحيث $\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ مهما كان $N_\varepsilon < n$. عندئذٍ نستخلص بأن :

$$\varrho(x_{n'}, x_{n''}) \leq \varrho(x_{n'}, x) + \varrho(x_{n'}, x) < \varepsilon$$

مهما كان $N_\varepsilon < n'$ وَ $N_\varepsilon < n''$.

تعريف 1. إذا كانت كل متتالية كوشية في فضـاء متري R متقاربة فإننا نقول أن هذا الفضـاء تام .

أمثلة . إن كل الفضـاءات المعتبرة في 1 § تامة عدا المثال 8 . لنوضح ذلك .

1. في فضـاء النقاط المنعزلة (المثال 1 ، 1 §) نلاحظ أن متتاليات كوشي الوحيدة هي المتتاليات المستقرة (نقول عن متتالية أنها مستقرة إذا كانت حدودها متسـاوية إبتداء من رتبة معينة) . من الواضح أن كل متتالية من هذا النوع متقاربة وبالتالي فإن الفضـاء المعتبر تام .

2. يُعرف تمام الفضـاء $\mathbf{R}^1$ المؤلف من الأعداد الحقيقية ويدرس ضمن دروس التحليل .

3. أما تمام الفضـاء الأقليدي $\mathbf{R}^n$ فيأتي مباشرة من تمام $\mathbf{R}^1$. (لرؤية ذلك نعتبر متتالية $\{x^{(p)}\}$ لـكوشي مؤلفة من نقاط في $\mathbf{R}^n$ ، وهذا يعني أن من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $N_\varepsilon = N$ بحيث :

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$$

وذلك من أجل كل $N < p$ وَ $N < q$. لدينا هنا :

$$x^{(p)} = \{x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\} .$$

وبالتالي من أجل كل $k\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ لدينا المتراجحة :

$$|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon$$

مهما كان $N < p$ وَ $N < q$ ، أي أن $\{x_k^{(p)}\}$ متتالية عددية من نوع كوشي.
نضع :

$$x_k = \lim_{p \to +\infty} x_k^{(p)}$$

$$x = (x_1, ..., x_n)$$

ومنه يأتي أن : $\lim_{p \to +\infty} x^{(p)} = x$.

4 - 5. لإثبات تمام الفضاءين $\mathbf{R}_0^n$ وَ $\mathbf{R}_1^n$ نتبع الإستدلال السابق.

6. لنثبت أن الفضاء $C[a, b]$ تام. لتكن $\{x_n(t)\}$ متتالية كوشية من $C[a, b]$. عندئذٍ، من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد عدد N بحيث :

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

من أجل كل $N < n$ وَ $N < m$ وَ $t \in [a, b]$. ومنه يأتي أن المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة بانتظام، ونحن نعلم في هذه الحالة أن النهاية $x(t)$ تابع مستمر. لنجعل m يؤول إلى $+ \infty$ في المتراجحة السابقة، نحصل حينئذٍ على :

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

من أجل كل t وكل $N < n$ ، وهذا يعني بأن المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة نحو $x(t)$ بمفهوم مسافة الفضاء $C[a, b]$.

7. الفضاء l_2 . لتكن $\{x^{(n)}\}$ متتالية كوشية في l_2 . عندئذٍ من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N بحيث :

$$\varrho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon \quad \forall n, m > N \tag{1}$$

حيث :

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...)$$

من (1) ينتج (من أجل كل k) أن لدينا :

$$(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$$

أي ان من أجل كل k فإن متتالية الأعداد الحقيقية $\{x_k^{(n)}\}$ متتالية كوشية، وعليه فهي متقاربة. نضع $x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ ونرمز بـ x للمتتالية $(x_1, x_2, ..., x_k, ...)$. علينا أن نثبت بأن:

أ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ أي أن $x \in l_2$.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = 0$

من أجل ذلك نلاحظ أن المتراجحة (1) تؤدي إلى:

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$$

وهذا من أجل كل M مثبت.

بما أن هذا المجموع لا يحوي الآن سوى عدد منته من الحدود نستطيع، بتثبيت n، الإنتقال إلى النهاية بجعل $m \to \infty$. ومنه يأتي:

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon$$

إن هذه المتراجحة صحيحة من أجل كل M. لنعد تركيب السلسلة غير المنتهية بالإنتقال إلى النهاية بجعل $M \to \infty$؛ نحصل عندئذٍ على:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon \qquad (2)$$

إن تقارب السلسلتين $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2$ وَ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$ يستلزم تقارب السلسلة $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ (وذلك بفضل المتراجحة البديهية: $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$).

وبذلك يتم برهان النقطة (أ). من جهة أخرى، بما أن ε صغير بالقدر الذي نريد فإن المتراجحة (2) تعني بأن:

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0$$

أي أن $x^{(n)} \to x$ بمفهوم مسافة l_2 . وهكذا ينتهي برهان (ب) .

8. نتأكد بسهولة من أن الفضاء $C_2[a, b]$ غير تام. نعتبر مثلاً متتالية التوابع المستمرة:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 , & -1 < t \le -\frac{1}{n} \\ nt , & -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 , & \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

إنها متتالية كوشية في $C_2[-1, 1]$ لأن:

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2 \, dt \le \frac{2}{\min(n, m)}$$

وعلى الرغم من ذلك فهي لا تتقارب نحو أي تابع من $C_2[-1, 1]$. لرؤية ذلك نعتبر تابعاً كيفياً f من $C_2[a, b]$ وتابعاً متقطعاً ψ يساوي -1 من أجل $t < a$ وَ $+1$ من أجل $t \ge 0$.

بفضل متراجحة مينكوفسكي التكاملية (القائمة أيضاً من أجل التوابع المستمرة بتقطع) ، لدينا:

$$\left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \psi(t))^2 \, dt\right)^{1/2} \le \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi_n(t))^2 \, dt\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \psi(t))^2 \, dt\right)^{1/2}$$

لما كان التابع f مستمراً فإن تكامل الطرف الأيسر يخالف الصفر. من جهة أخرى يتضح أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \psi(t))^2 \, dt = 0$$

وبالتالي فإن التكامل: $\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi_n(t))^2 \, dt$ لا يمكن أن يؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى ∞.

تمرين. أثبت أن فضـاء المتتاليات المحدودة المؤلفة من أعداد حقيقية (المثال 9، § 1) فضـاء تام.

2. نظرية الـكرات المتداخلة.

نستعمل في التحليل بشكل واسع قضية تسمى نظرية المجالات المتداخلة. هناك نظرية مماثلة في الفضـاءات المترية نسميها نظرية الـكرات المتداخلة وهي:

نظرية 1. لكي يكون فضـاء متري R تاماً يجب ويكفي أن تكون كل متتالية كرات مغلقة ومتداخلة (في R وأنصـاف أقطارها تؤول إلى الصفر) ذات تقاطع غير خالٍ.

البرهان. لنثبت لزوم الشرط. نفرض أن الفضـاء R تام ونعتبر في R متتالية $B_1, B_2, \ldots$ من الـكرات المغلقة والمتداخلة. ليكن r_n نصف قطر الـكرة B_n وَ x_n مركزها. أن متتالية المراكز $\{x_n\}$ متتالية كوشية لأن $\varrho(x_n, x_m) < r_n$ من أجل $n < m$ وَ $r_n \to 0$ لما $n \to \infty$. بما أن R تام فإن النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ موجودة. نضع:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

عندئذٍ $x \in \bigcap_n B_n$. لرؤية ذلك نلاحظ أن الـكرة B_n تحوي كل نقاط المتتالية $\{x_n\}$ عدا النقاط $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ التي قد تكون غير محتواة في B_n. وهكذا يتبين أن x نقطة ملاصقة لكل كرة B_n. وبما أن B_n مجموعة مغلقة فإن $x \in B_n$ من أجل كل n.

لإثبات كفاية الشرط نعتبر في R متتالية كوشية كيفية $\{x_n\}$ ونبرهن على أنها متقاربة. لما كانت المتتالية المعتبرة متتالية كوشية فإنه يمكن اختيار، من بين حدودها، نقطة x_{n_1} تحقق: $\varrho(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ من أجل كل $n_1 \leq n$. نرمز بـ B_1 للكرة المغلقة المتمركزة في x_{n_1} والتي لها نصف قطر 1. نختار بعد ذلك في $\{x_n\}$ نقطة x_{n_2} بحيث $n_1 < n_2$ وَ $\varrho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ من أجل كل $n_2 \leq n$. نرمز بـ B_2 للكرة المغلقة المتمركزة في x_{n_2} والتي لها نصف قطر 1/2. بصفة عامة إذا كانت النقاط $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k) x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ قد تم اختيارها فإننا نختار نقطة $x_{n_{k+1}}$ بحيث $n_{k+1} > n_k$ و:

$$\varrho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

من أجل كل $n_{k+1} \leq n$، ونحيط هذه النقطة بكرة مغلقة B_{k+1} نصف قطرها $\frac{1}{2^k}$. نواصل هذا الإنشاء فنحصل على متتالية كرات مغلقة ومتداخلة B_k أنصاف أقطارها $\frac{1}{2^{k-1}}$. ينص الفرض على أن لهذه الكرات نقطة مشتركة؛ نرمز لها بـ x. من الواضح أن هذه النقطة x تمثل نهاية المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$. نشير هنا إلى أنه إذا قبلت متتالية كوشية متتالية جزئية متقاربة نحو x فإن هذه المتتالية الكوشية متقاربة أيضاً نحو x. ولذا نستطيع أن نكتب في هذه الحالة: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. انتهى برهان النظرية.

تمارين. 1. برهن على أن تقاطع الكرات المغلقة والمتداخلة الواردة في النظرية السابقة يساوي مجموعة ذات نقطة واحدة.

2. قطر مجموعة M من فضاء متري هو تعريفاً العدد:

$$d(M) = \sup_{x,y \in M} \varrho(x, y)$$

أثبت أن كل متتالية مجموعات (غير خالية) مغلقة ومتداخلة وقطرها يؤول إلى الصفر لها تقاطعاً غير خالٍ إذا كان الفضاء المتري المعتبر تاماً.

3. أعطِ مثالاً لفضاء متري تام ولمتتالية في هذا الفضاء مؤلفة من كرات مغلقة ومتداخلة تقاطعها خالٍ.

4. برهن على أن كل فضاء جزئي من فضاء متري تام R يكون تاماً إذا وفقط إذا كان مغلقاً في R.

3. نظرية بير (Baire).

تلعب النظرية التالية دوراً أساسياً في نظرية الفضاءات المترية التامة.

نظرية 2 (لبير). لا يمكن أن يكتب فضاء متري تام R على شكل إتحاد قابل للعد لمجموعات إذا كانت كل مجموعة من هذه المجموعات غير كثيفة في مكان.

البرهان. لنفرض العكس. ليكن $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ حيث M_n مجموعة غير كثيفة في مكان من أجل كل n. لتكن S_0 كرة مغلقة نصف قطرها 1. بما أن المجموعة M_1 غير كثيفة في مكان، فهي غير كثيفة في S_0، توجد إذن كرة مغلقة S_1 نصف قطرها أصغر من $\frac{1}{2}$ بحيث $S_1 \subset S_0$ وَ: $S_1 \cap M_1 = \Phi$. بما أن المجموعة M_2 غير كثيفة في S_1 فإن الكرة S_1 تحوي، لنفس السبب، كرة مغلقة S_2 نصف قطرها أصغر من 1/3 بحيث $S_2 \cap M_2 = \Phi$، الخ. نحصل بهذه الطريقة على متتالية كرات مغلقة ومتداخلة $\{S_n\}$ أنصاف أقطارها تؤول إلى الصفر وبحيث: $S_n \cap M_n = \Phi$. إذا استندنا إلى النظرية 1 وجدنا أن التقاطع $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ يحوي نقطة x. يبين إنشاء هذه النقطة أنها لا تنتمي لأية مجموعة M_n، وبالتالي $x \notin \bigcup_n M_n$ أي أن $R \neq \bigcup_n M_n$ وهذا يناقض الفرض.

بصفة خاصة نلاحظ أن كل فضاء متري تام بدون نقاط منعزلة فضاء قابل للعد. ذلك لأن كل نقطة في مثل هذا الفضاء مجموعة غير كثيفة في مكان.

4. تتميم فضاء

إذا كان R فضاء مترياً غير تام فإنه يمكن دوماً إدخاله (بطريقة وحيدة، طبقاً لمفهوم معين) في فضاء تام.

تعريف 2. ليكن R فضاءً مترياً. نقول عن فضاء متري تام R^* أنه متممة (أو تتمة) الفضاء R إذا كان:

1) R فضاء جزئياً من R^*.

2) R كثيفاً أينما كان في R^* أي: $[R] = R^*$

[يرمز $[R]$ هنا بطبيعة الحال إلى ملاصق الفضاء R في R^*].

إن المستقيم $\mathbf{R}^1$ (مثال 2، §1) مثلاً يمثل متممة لمجموعة الأعداد الناطقة (المزودة بنفس المسافة المعرفة على $\mathbf{R}^1$).

نظرية 3. يقبل كل فضاء متري R متممة، وهذه المتممة وحيدة بتقدير تطبيق أيزومتري يترك نقاط R لا متغيرة.

البرهان. نبدأ بالوحدانية. علينا أن نبين أنه إذا كان R^* وَ R^{**} متممتين للفضاء R يوجد تطبيق تقابلي φ من الفضاء R^* على R^{**} يحقق:

1) $\varphi(x) = x$ مهما كان $x \in R$.

2) إذا كان $x^* \leftrightarrow x^{**}$ وَ $y^* \leftrightarrow y^{**}$ فإن: $\varrho_1(x^*, y^*) = \varrho_2(x^{**}, y^{**})$
حيث ترمز ϱ_1 للمسافة على R^* وَ ϱ_2 للمسافة على R^{**}.

ننشئ التطبيق φ بالطريقة التالية. لتكن x^* نقطة كيفية من R^*. من تعريف المتممة توجد متتالية $\{x_n\}$ من نقاط R متقاربة نحو x^*. ثم إن نقاط $\{x_n\}$ تنتمي أيضاً إلى R^{**}. لما كان R^{**} تاماً فإن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة في R^{**} نحو نقطة x^{**}. من الواضح أن x^{**} لا يتعلق باختيار المتتالية $\{x_n\}$ المتقاربة نحو x^*. نضع $\varphi(x^*) = x^{**}$. إن φ تطبيق أيزومتري.

لرؤية ذلك نلاحظ من الإنشاء أن $\varphi(x) = x$ من أجل كل $x \in R$. من جهة أخرى، لتكن:

$$\{x_n\} \to x^* \quad \text{في} \quad R^*$$
$$\{x_n\} \to x^{**} \quad \text{في} \quad R^{**}$$
$$\{y_n\} \to y^* \quad \text{في} \quad R^*$$
$$\{y_n\} \to y^{**} \quad \text{في} \quad R^{**}$$

عندئذٍ، لما كانت المسافة تابعاً مستمراً فإن:

$$\varrho_1(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \varrho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$$

ولنفس السبب لدينا:

$$\varrho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \varrho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$$

وبالتالي:

$$\varrho_1(x^*, y^*) = \varrho_2(x^{**}, y^{**})$$

نبرهن الآن على وجود المتممة. إن الفكرة التي يعتمد عليها هذا البرهان هي فكرة النظرية الكانتورية للأعداد الحقيقية. بل أن المسألة هنا أبسط من مثيلتها في نظرية الأعداد الحقيقية لأنه ينبغي علينا في إطار النظرية الأخيرة إعادة تعريف كل العمليات الحسابية على الكائنات الجديدة التي أدخلت وهي الأعداد غير الناطقة (الصماء).

ليكن R فضاء مترياً كيفياً. نقول عن متتاليتي كوشي $\{x_n\}$ وَ $\{x'_n\}$ من R أنهما متكافئتان (ونرمز لذلك بِـ: $(\{x_n\} \sim \{x'_n\})$) إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x'_n) = 0 \,.$$

استعملنا آنفاً لفظ «التكافؤ» لأن العلاقة المعرفة إنعكاسية ومتناظرة ومتعدية. ومنه ينتج أن كل متتاليات كوشي التي يمكن تشكيلها بنقاط من الفضاء R تنقسم إلى صفوف متتاليات متكافئة. ننشئ الآن الفضاء R^*. نقبل كنقاط في R^* كل صفوف متتاليات كوشي المتكافئة ونعرف المسافة بينها بالطريقة التالية:

ليكن x^* وَ y^* صفين من الصفوف السابقة نختار في كل واحد منهما ممثلاً أي متتالية كوشية، نرمز لهذين الممثلين بِـ$\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$ على التوالي. نضع[1]:

$$\varrho(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) \tag{3}$$

نبرهن أن لتعريف هذه المسافة معنى، أي أن النهاية (3) موجودة ولا تتعلق باختيار الممثلين $\{x_n\} \in x^*$ وَ $\{y_n\} \in y^*$.

(1) كيلا نزيد في تعقيد الكتابة نرمز لمسافة R^* بنفس الرمز الذي يشير لمسافة الفضاء الأول R.

بما أن $\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$ متتاليتان كوشيتان فإنه من المتراجحة:

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| \leq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_n, y_m) \tag{4}$$

نستنتج:

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

من أجل n وَ m كبيرين بكفاية.

وهكذا يتضح أن متتالية الأعداد الحقيقية $S_n = \varrho(x_n, y_n)$ تحقق شرط كوشي، وبالتالي فإن لها نهاية.

إن هذه النهاية لا تتعلق باختيار $\{x_n\} \ni x^*$ وَ $\{y_n\} \ni y^*$. ذلك أننا إذا اعتبرنا $\{x_n\}$ وَ $\{x'_n\}$ في x^* وَ $\{y_n\}$ وَ $\{y'_n\}$ في y^*، فإنه يتبين من خلال حساب مماثل لِـ(4) أن:

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x'_n, y'_n)| \leq \varrho(x_n, x'_n) + \varrho(y_n, y'_n)$$

لما كان:

$$\{x_n\} \sim \{x'_n\} \text{ وَ } \{y_n\} \sim \{y'_n\}$$

فإنه ينتج أن:

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x'_n, y'_n)$$

لنثبت الآن أن مسلمات الفضاء المتري محققة في R^*.

تنتج المسلمة (1) مباشرة من تعريف المتتاليات الكوشية المتكافئة.

أما المسلمة (2) فهي بديهية.

لنثبت أن المتراجحة المثلثية محققة أيضاً. بما أن هذه المسلمة محققة في الفضاء الأول R فإن:

$$\varrho(x_n, z_n) \leq \varrho(x_n, y_n) + \varrho(y_n, z_n)$$

لنجعل n يؤول إلى ∞، نحصل عندئذٍ على:

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \varrho(y_n, z_n)$$

أي أن :

$$\varrho(x^*, z^*) \le \varrho(x^*, y^*) + \varrho(y^*, z^*)$$

لنثبت الآن بأنه يمكن اعتبار R كفضـاء جزئي من الفضـاء R^* . يوافق كل نقطة $x \in R$ صف المتتاليات الـكوشية المتكافئة ، وهي مجموعة المتتاليات المتقاربة نحو النقطة x . نلاحظ أن هذا الصف غير خالٍ لأنه يحوى المتتالية المستقرة المعرّفة بحدودها المسـاوية لِـ x . من جهة أخرى ، إذا كان :

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{وَ} \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

فإن :

$$\varrho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$$

وبالتالي إذا ألحقنا بكل نقطة $x \in R$ الصف x^* المؤلف من متتاليات كوشي المتقاربة نحو x ، نحصل على تطبيق أيزومتري من R في الفضـاء R^* .

يمكننا في المستقبل عدم التفرقة بين الفضـاء R وصورته في R^* أي إعتبار R كفضـاء جزئي من R^* .

نثبت الآن بأن R كثيف أينما كان في R^* . من أجل ذلك نعتبر نقطة كيفية x^* من R^* وليكن $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً كيفياً . نختار في x^* مثلاً أي متتالية كوشية $\{x_n\}$. ليكن N عدداً بحيث $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ من أجل كل $N < n$ وَ $N < m$. لدينا إذن :

$$\varrho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \varrho(x_n, x_m) \le \varepsilon ،$$

مهما كان $N < n$ ، وهذا يعني أن كل جوار للنقطة x^* يحوي نقطة من R . وبالتالي فإن ملاصق R في R^* يسـاوي R^* بأكمله .

يبقى أن نثبت بأن R^* تام . نلاحظ أولاً بأن إنشـاء R^* يؤدي إلى أن كل متتالية كوشية :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

من نقاط R متقاربة في R^* نحو نقطة معينة، وهذه النقطة هي على وجه التحديد النقطة $x^* \in R^*$ المعرفة بفضل المتتالية ذاتها. من جهة أخرى، لما كان R كثيفاً في R^* فإن من أجل كل متتالية كوشية: $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, ...$ من نقاط R^* يمكن إنشاء متتالية مكافئة لها $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ من نقاط R. يكفي أن نأخذ x_n مساوية لأية نقطة في R تحقق $\varrho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$. إن المتتالية المنشأة بهذه الطريقة متتالية كوشية في R وهي متقاربة، تعريفاً، نحو نقطة $x^* \in R^*$. وفي هذه الحالة ندرك أن المتتالية $\{x_n^*\}$ متقاربة أيضاً نحو x^*. انتهى برهان النظرية.

§ 4. مبدأ التقليصات وتطبيقاته

1. مبدأ التقليصات

هناك العديد من المسائل المتعلقة بوجود ووحدانية حلول بعض أنماط المعادلات (المعادلات التفاضلية، مثلاً) التي يمكن ردها لمسألة وجود ووحدانية نقطة ثابتة (أو صامدة) لتطبيق من الفضاء المتري الموافق لها في نفسه. من بين المقاييس المختلفة لوجود ووحدانية نقطة ثابتة لمثل هذه التطبيقات هناك مقياس، وهو أبسطها واهمها، يسمى مبدأ التقليصات.

ليكن R فضاءً مترياً. نقول عن تطبيق A من الفضاء R في نفسه أنه تطبيق مقلص (أو تقليص) إذا وجد عدد $\alpha < 1$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية من أجل كل x وَ y في R:

$$\varrho(Ax, Ay) \leq \alpha\, \varrho(x, y) \qquad (1)$$

إن كل تطبيق مقلص مستمر. ذلك أنه إذا كانت: $x_n \to x$ فإن: $Ax_n \to A$ بفضل (1).

نقول عن نقطة x أنها نقطة ثابتة للتطبيق A إذا كان $Ax = x$، بعبارة أخرى فإن النقاط الثابتة هي حلول المعادلة $Ax = x$.

نظرية 1. (مبدأ التقليصات)

يقبل كل تقليص معرّف على فضاء متري تام R نقطة ثابتة، وهذه النقطة وحيدة.

البرهان. لتكن x_0 نقطة كيفية من R . نضع :

$$x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A^2 x_0, ..., x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$$

لنثبت أن $\{x_n\}$ متتالية كوشية . من أجل ذلك نضع ، لتوضيح البرهان ، $n \leq m$. لدينا :

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_m) = \varrho(A^n x_0, A^m x_0) &\leq \alpha^n \cdot \varrho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n \{\varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_1, x_2) + ... + \varrho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\ &\leq \alpha^n \varrho(x_0, x_1) \{1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-n-1}\} \\ &\leq \alpha^n \varrho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}\end{aligned}$$

بما أن $\alpha < 1$ فإن كمية الطرف الأخير تؤول إلى الصفر لما $n \to \infty$. ثم إن الفضاء R تام وعليه فإن متتالية كوشي $\{x_n\}$ تقبل نهاية في R . نضع :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

عندئذٍ يأتي من استمرار التطبيق A أن :

$$Ax = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} Ax_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x$$

وهكذا أثبتنا وجود النقطة الثابتة . لنبرهن على وحدانية هذه النقطة . إذا كان :

$$Ax = x \text{ وَ } Ay = y$$

فإن المتراجحة (1) تأخذ الشكل :

$$\varrho(x, y) \leq \alpha \varrho(x, y)$$

وبما أن $\alpha < 1$ ، يأتي : $\varrho(x, y) = 0$ أي أن $x = y$.

تمرين. أثبت من خلال مثال أن التطبيق A الذي يحقق الشرط $\varrho(Ax, Ay) < \varrho(x, y)$ من أجل العناصر x وَ y بحيث $x \neq y$ ، يمكن ألّا يقبل نقطة ثابتة.

2. تطبيقات بسيطة لمبدأ التقليصات

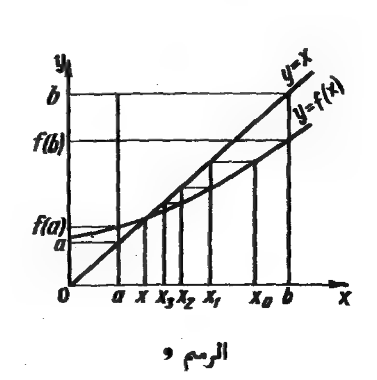
نستطيع تطبيق مبدأ التقليصات على برهان نظرية وجود ووحدانية الحل من أجل العديد من أنماط المعادلات. بالإضافة إلى وجود ووحدانية حل المعادلة $Ax = x$ ، يقدم مبدأ التقليصات طريقة عملية لحساب هذا الحل تقريبياً (طريقة التقريبات المتوالية). لنعالج بعض الأمثلة البسيطة.

1. ليكن f تابعاً معرفاً على القطعة $[a, b]$ ويحقق شرط ليبشيتز:

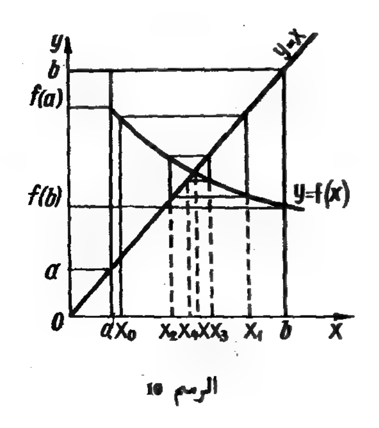
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K |x_2 - x_1|$$

حيث K ثابت < 1. إن التطبيق f تطبيق من $[a, b]$ في $[a, b]$. ومنه فإن f تقليص وبالاستناد إلى النظرية السابقة يتبين أن المتتالية: $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots$ متقاربة نحو الحل الوحيد للمعادلة $x = f(x)$.
بصفة خاصة، يكون f تقليصاً إذا كان قابلاً للاشتقاق على المجال $[a, b]$ وَ $|f'(x)| \leq K < 1$.

يوضح الرسمان 9 وَ 10 تطور التقريبات المتوالية من أجل $0 < f'(x) < 1$ ومن أجل $-1 < f'(x) < 0$ على التوالي.



الرسم 9



الرسم 10

لتكن الآن معادلة من الشكل $F(x) = 0$ بحيث $F(a) < 0$ وَ $F(b) > 0$ وَ $0 < K_1 \leq F'(x) \leq K_2$ على $[a, b]$. ندخل التابع: $f(x) = x - \lambda F(x)$ ونبحث عن حل للمعادلة $x = f(x)$ المكافئة لِـ $F(x) = 0$. لما كان:

$$f'(x) = 1 - \lambda F'(x) \quad \text{فإن} \quad 1 - \lambda K_2 \leq f'(x) \leq 1 - \lambda K_1 \text{؛}$$

وعليه فمن الممكن أن نختار λ بشكل يسمح بتطبيق طريقة التقريبات المتوالية. وهي طريقة جد منتشرة للبحث عن الجذور.

2. نعتبر تطبيقاً A من فضاء ذي n بعداً في نفسه، معطى بجملة المعادلات الخطية:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

إذا كان A تقليصاً، نستطيع تطبيق طريقة التقريبات المتوالية لحل المعادلة $x = Ax$.

ما هي الشروط إذن التي تجعل التطبيق A تقليصاً؟ إن الجواب عن هذا السؤال يتعلق باختيار المسافة. لنعالج الحالات الثلاث التالية:

أ) الفضاء $\mathbf{R}_0^n$، أي أن: $\varrho(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$؛

$$\varrho(y', y'') = \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \left| \sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \leq$$

$$\leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \, |x'_j - x''_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j|$$

$$= \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \varrho(x', x'')$$

ومنه يأتي الشرط المطلوب:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

ب) الفضاء $\mathbf{R}_1^n$، أي أن $\varrho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$$\varrho(y', y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i |\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)| \leq$$

$$\leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leq (\max_j \sum_i |a_{ij}|) \varrho(x', x'')$$

ومنه يأتي الشرط المطلوب :

$$\sum_i |a_{ij}| \leq \alpha < 1 , \ j = 1, ..., n \qquad (3)$$

ج) الفضـاء R^n ، أي أن

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

بالاستناد إلى متراجحة كوشي - بونياكوفسكي لدينا :

$$\varrho^2(y', y'') = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right)^2 \leq \left(\sum_i \sum_j a^2_{ij}\right) \varrho^2(x', x'')$$

ومنه يأتي الشرط المطلوب :

$$\sum_i \sum_j a^2_{ij} \leq \alpha < 1 \qquad (4)$$

إذن ، إذا تحقق واحد من الشروط[1] (2), (3), (4) فإنه توجد نقطة ، وهذه النقطة وحيدة ، $(x_1, x_2, ..., x_4)$ بحيث :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$$

(1) ينتج عن كل شرط من الشروط (2) ، (3) ، (4) أن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

أما التقريبات المتوالية لهذا الحل فهي من الشكل :

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$$

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$$

. . . .

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$$

حيث :

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)} + b_i$$

أما $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ فهو أية نقطة من $\mathbf{R}^n$.

نرى إذن أن أي شرط من الشروط (2)، (3)، (4) كافٍ ليكون التطبيق $y = Ax$ تقليصاً. أما بخصوص الشرط (2) فيمكن أن نبين بأنه أيضاً لازم ليكون التطبيق $y = Ax$ تقليصاً (بمفهوم المسافة (أ)).

ليس هناك شرط لازم، من بين الشروط (2)، (3)، (4)، لتطبيق طريقة التقريبات المتوالية.

إذا كان $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ فإن الشروط الثلاثة محققة ويمكن تطبيق طريقة التقريبات المتوالية في هذه الحالة.

إذا كان $|a_{ij}| \geq \frac{1}{n}$ فإن الشروط الثلاثة غير محققة.

3. نظريات الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية.

عالجنا في الفقرة السابقة مثالين بسيطين في تطبيق مبدأ التقليصات في فضاء ذي بعد واحد وفي فضاء ذي n بعداً. إلا أن أهم التطبيقات لهذا المبدأ في التحليل تظهر في حالة الفضاءات التابعية ذات البعد غير المنتهي. نوضح فيما يلي كيف يمكن البرهان على نظرية الوجود والوحدانية للحل من أجل بعض أنماط المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية وذلك تطبيقاً لهذا المبدأ.

1. مسألة كوشي. لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5}$$

ذات الشرط الابتدائي:

$$y(x_0) = y_0 \tag{6}$$

حيث f تابع معرّف ومستمر في ساحة مستوية G تحوي النقطة (x_0, y_0)، ويحقق في هذه الساحة شرط ليبشيتز بالنسبة لِـ y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$$

لنثبت في هذه الحالة وجود حل وحيد $y = \varphi(x)$ للمعادلة (5) معرّف على قطعة مستقيم $|x - x_0| \leq d$ ويحقق الشرط الإبتدائي (6) (نظرية بيكار (Picard)).

نلاحظ أن المعادلة (5) مع الشرط الإبتدائي (6) تكافئ المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)\, dt \tag{7}$$

بفضل استمرار f لدينا: $|f(x, y)| < K$ في ساحة $G \supset G'$ تحوي النقطة (x_0, y_0). نختار $0 < d$ بحيث يكون الشرطان التاليان محققين:

1) $G' \ni (x, y)$ إذا كان $|x - x_0| \leq d$ وَ $|y - y_0| \leq Kd$

2) $Md < 1$

نرمز بِـ C^* لفضاء التوابع المستمرة φ المعرفة على قطعة المستقيم $|x - x_0| \leq d$ والمحققة لِـ $|\varphi(x) - y_0| \leq Kd$، مع العلم أن هذا الفضاء مزود بالمسافة:

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

إن الفضاء C^* تام وذلك لأنه فضاء جزئي مغلق من الفضاء التام

المؤلف من التوابع المستمرة على $[x_0 - \mathrm{d}, x_0 + \mathrm{d}]$. نعتبر التطبيق $\psi = A\varphi$ المعرف بالدستور:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

حيث نعتبر $|x - x_0| \leq \mathrm{d}$. إنه تطبيق من الفضاء التام C^* في نفسه ويمثل تقليصاً في هذا الفضاء. لرؤية ذلك نعتبر $\varphi \in C^*$، $|x - x_0| \leq \mathrm{d}$.

نجد عندئذٍ:

$$|\psi(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leq K\mathrm{d}$$

وبالتالي $A(C^*) \subset C^*$. من جهة أخرى:

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t) - f(t, \varphi_2(t)|\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq M\mathrm{d} \max_{x} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

لما كان $M\mathrm{d} < 1$ فإن A تقليص.

ينتج من ذلك أن المعادلة $\varphi = A\varphi$ (أي المعادلة (7)) تقبل في الفضاء C^* حلاً وأن هذا الحل الوحيد.

2. مسألة كوشي لجملة معادلات. لتكن جملة المعادلات التفاضلية التالية:

$$\varphi_i'(x) = f_i\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big),\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

ذات الشروط الإبتدائية:

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i} \quad , \quad i = 1, 2 \ldots, n \tag{9}$$

حيث f_i توابع معرّفة ومستمرة في ساحة G من الفضاء $\mathbf{R}^{n+1}$ تحوي النقطة $(x_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})$، وتحقق شرط ليبشيتز:

$$\left|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})\right| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|$$

لنبرهن على وجود حل في المجال المغلق $|x - x_0| \leq d$ (وعلى وحدانيته) للمسألة الابتدائية (8) وَ (9)، أي أننا نبرهن على وجود جملة وحيدة مؤلفة من توابع φ_i تحقق المعادلات (8) والشروط الابتدائية (9).

نلاحظ أن الجملة (8) مع الشروط الإبتدائية (9) تكافئ جملة المعادلات التكاملية:

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))\, dt, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{10}$$

من استمرار التوابع f_i نستنتج أنها محدودة في ساحة $G \supset G'$ تحوي النقطة $(x_0, y_{01}, ..., y_{0n})$، أي أنه يوجد ثابت K بحيث:

$$|f_i(x, y_1, ..., y_n)| \leq K$$

نختار $d > 0$ بحيث يتحقق الشرطان:

1) $(x, y_1, ..., y_n) \in G'$ إذا كان: $|x - x_0| \leq d$ وَ $|y_i - y_{0i}| \leq Kd$ من أجل $i = 1, 2, ..., n$.

2) $Md < 1$

نعتبر الفضاء C_n^* المؤلف من الجمل $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ذات n تابعاً معرفاً ومستمراً من أجل $|x - x_0| \leq d$ وبحيث: $|\varphi_i(x) - y_{0i}| \leq Kd$. نعرف مسافة على C_n^* بالدستور:

$$\varrho(\varphi, \psi) = \max_{x,i} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|$$

إن الفضاء C_n^* تام. كما أن التطبيق $\psi = A\varphi$ المعطى بجملة العلاقات:

$$\psi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))\, dt$$

تطبيق مقلص من الفضاء التام C_n^* في نفسه، ذلك أن:

$$\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x) = \int_{x_0}^{x} [f_i(t, \varphi_1^{(1)}(t), ..., \varphi_n^{(1)}(t)) -$$

$$f_i(t, \varphi_1^{(2)}(t), ..., \varphi_n^{(2)}(t))]\, dt$$

وبالتالي :

$$\max_{x,i} |\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)| \leq Md \max_{x,i} |\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|$$

ومنه نرى بأن التطبيق A تقليص لأن $Md < 1$. وهكذا ينتج أن المعادلة المؤثرية $\varphi = A\varphi$ تقبل في الفضاء C_n^* حلاً وأن هذا الحل وحيد .

4. تطبيق مبدأ التقليصات على المعادلات التكاملية

1. معادلات فريدولم (Fredholm). نستخدم الآن مبدأ التقليصات لإثبات وجود ووحدانية حل معادلة تكاملية خطية غير متجانسة لفريدولم من النوع الثاني ، وهي المعادلة ذات الشكل :

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) \, dy + \varphi(x) \tag{11}$$

حيث K (المسمى نواة) وَ φ تابعان معينان وَ f هو التابع المطلوب إيجاده وλ وسيط كيفي .

سنرى أن طريقة التقليصات لا تقبل التطبيق إلا في الحالات التي تكون فيها قيم الوسيط λ صغيرة بكفاية .

نفرض أن $K(x, y)$ وَ $\varphi(x)$ مستمران من أجل $a \leq x \leq b$ وَ $a \leq y \leq b$ ، وبالتالي فأن $|K(x, y)| \leq M$. نعتبر التطبيق $g = Af$ من الفضاء التام $C[a, b]$ في نفسه المعرّف بالدستور :

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) \, dy + \varphi(x)$$

لدينا :

$$\varrho(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M |b - a| \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

وبالتالي فإن التطبيق A تقليص من أجل $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

من مبدأ التقليصات نستخلص أن معادلة فريدولم تقبل حلاً مستمراً وحيداً من أجل قيم λ التي تحقق $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$. أما التقريبات المتوالية لهذا الحل : $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ فهي من الشكل :

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) \, dy + \varphi(x)$$

حيث يمكن أن نأخذ $f_0(x)$ مساوياً لأي تابع مستمر.

2. المعادلات التكاملية غير الخطية. نستطيع تطبيق مبدأ التقليصات أيضاً على المعادلات التكاملية غير الخطية من النمط:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y)) \, dy + \varphi(x) \tag{12}$$

حيث K وَ φ تابعان مستمران، وبالإضافة إلى ذلك نفرض أن النواة K تحقق شرط ليبشيتز بالنسبة لمتغيره «التابعي»:

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \le M |z_1 - z_2|$$

نلاحظ في هذه الحالة أن لدينا المتراجحة التالية من أجل التطبيق $g = Af$ من الفضاء التام $C[a, b]$ في نفسه، المعرّف بالدستور:

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y)) \, dy + \varphi(x) \tag{13}$$

$$\max |g_1(x) - g_2(x)| \le |\lambda| \, M \, (b - a) \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

حيث $g_1 = Af_1$ ، $g_2 = Af_2$. إذن فإن التطبيق A تقليص من أجل $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

3. معادلات فولتيرا (Volterra). نعتبر أخيراً معادلة فولتيرا التكاملية:

$$f(x) = \lambda \int_a^x [K(x, y) f(y)] \, dy + \varphi(x) \tag{14}$$

نلاحظ هنا الفرق بين هذه المعادلة ومعادلة فريدولم، وهو أن التكامل في معادلة فولتيرا له حد أعلى يساوي المتغير x . نستطيع، من الناحية الشكلية، اعتبار هذه المعادلة كحالة خاصة من معادلة فريدولم وذلك بتمديد التابع K طبقاً للمساواة: $K(x, y) = 0$ من أجل $x < y$.

وعلى الرغم من ذلك فقد سبق أن رأينا فيما يخص معادلة فريدولم التكاملية أننا إضطررنا إلى أخذ قيم لِـ λ صغيرة بكفاية؛ أما في حالة معادلة

فولتيرا فإن مبدأ التقليصات (وطريقة التقريبات المتوالية) تقبل التطبيق من أجل كل قيم λ. وعلى وجه التحديد نقول أن الأمر يتعلق بالتعميم التالي لمبدأ التقليصات:

ليكن A تطبيقاً مستمراً من فضاء تام R في نفسه. نفرض أن المؤثر $B = A^n$ تقليص؛ عندئذٍ تقبل المعادلة:

$$Ax = x$$

حلاً وهذا الحل الوحيد.

لرؤية ذلك نفرض أن x نقطة ثابتة للتطبيق B، أي أن $Bx = x$. لدينا:

$$Ax = A\,B^k x = B^k Ax = B^k x_0 \rightarrow x \qquad (k \rightarrow \infty)$$

ذلك لأن تقلص التطبيق B يجعل المتتالية: $Bx_0, B^2x_0, \ldots$ متقاربة من أجل كل $R \ni x_0$ نحو النقطة الثابتة x للتطبيق B. وبالتالي فإن:

$$Ax = x$$

إن النقطة الثابتة هذه وحيدة لأن كل نقطة ثابتة للتطبيق A ثابتة أيضاً للتطبيق المقلص A^n الذي لا يمكن أن يقبل أكثر من نقطة ثابتة.

لنثبت الآن أنه توجد قوة للتطبيق:

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}y + \varphi(x)$$

تتمتع بخاصية التقلص. ليكن f_1 وَ f_2 تابعين مستمرين على القطعة $[a, b]$. عندئذٍ:

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, y)\big(f_1(y) - f_2(y)\big)\, \mathrm{d}y \right| \leq$$

$$\leq |\lambda| M(x - a) \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

حيث:

$$M = \max |K(x, y)|$$

ومنه نستنتج أن :

$$|A^2f_1(x) - A^2f_2(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max|f_1(x) - f_2(x)|$$

وبشكل أعم :

$$|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leq |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!}$$

حيث $m = \max|f_1(x) - f_2(x)|$.

من أجل كل قيمة لِـλ، يمكن إختيار العدد n كبيراً بكفاية لنحصل على :

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1$$

عندئذٍ يكون التطبيق A^n تقليصاً. وبالتالي تقبل معادلة فولتيرا (14) حلاً، وهذا الحل وحيد، من أجل كل قيم λ.

5 § الفضـاءات الطوبولوجية

1. تعريف وأمثلة للفضـاءات الطوبولوجية

أدخلت المفاهيم الأسـاسية لنظرية الفضـاءات المترية (نقطة تراكم، نقطة ملاصقة، ملاصق مجموعة، الخ) بواسطة مفهوم الجوار أو بواسطة مفهوم المجموعة المفتوحة وهما مفهومان متشـابهان. وكنا عرّفنا هذين المفهومين (الجوار والمجموعة المفتوحة) بواسطة المسـافة المعطاة في الفضـاء المعتبر. لـكنه بالإمكان إتباع طريقة أخرى: نتخلى عن إدخال أية مسـافة على المجموعة المعتبرة R ونعرّف في هذه المجموعة المجموعات المفتوحة مباشرة بواسطة مسلمات. تؤدي هذه الطريقة، التي نجد فيها حرية أكثر من السـابق، إلى مفهوم الفضـاء الطوبولوجي الذي يعتبر الفضـاء المتري حالة خاصة منه، وهذا على الرغم من الأهمية البالغة التي يمتاز بها الفضـاء المتري.

تعريف. لتكن X مجموعة كيفية، نسميها حاملاً. نسمي طوبولوجيا لِـX كل جماعة τ من المجموعات الجزئية $G \subset X$ تحقق الشرطين التاليين:

1. المجموعة X نفسها والمجموعة Φ تنتميان إلى τ.

2. كل إتحاد $\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$ (منته أو غير منته) وكل تقاطع منته $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ من مجموعات من τ، ينتميان إلى τ.

تسمى المجموعة X المزودة بطوبولوجيا معطاة τ (أي الثنائية (X, τ)) فضاء طوبولوجياً.

نقول عن المجموعات المنتمية إلى الجماعة τ أنها مفتوحة.

كما أن الفضاء المتري مؤلف من مجموعة نقاط («الحامل») ومن مسافة معرّفة على هذه المجموعة، فإن الفضاء الطوبولوجي مؤلف كذلك من مجموعة نقاط وطوبولوجيا معرّفة على هذه المجموعة. إذن فإن تعيين فضاء طوبولوجي يتم بتعيين مجموعة X وبتعيين طوبولوجيا τ في هذه المجموعة، أي بتعيين المجموعات الجزئية من X المعتبرة مفتوحة.

من الواضح أنه يمكن تعريف طوبولوجيات مختلفة على نفس المجموعة بحيث تستطيع هذه المجموعة أن تكون حاملاً للعديد من الفضاءات الطوبولوجية. ورغم ذلك سنرمز لفضاء طوبولوجي أي لثنائية من الشكل (X, τ) بحرف واحد مثلاً بِـT. وسنسمي عناصر فضاء طوبولوجي نقاطاً.

نسمى المتممات $T \setminus G$ للمجموعات المفتوحة مجموعات مغلقة في الفضاء الطوبولوجي T. ينتج من المسلمتين (1) وَ(2) بفضل علاقتي الثنوية (§1، الفصل 1)، أن:

1. المجموعة الخالية Φ والفضاء T بأكمله مجموعتان مغلقتان.

2. كل تقاطع (منته أو غير منته) وكل إتحاد منته لمجموعات مغلقة مجموعات مغلقة.

نعتمد على هذه التعاريف لندخل بصفة طبيعية في كل فضاء طوبولوجي مفاهيم النقطة الملاصقة والملاصق لمجموعة، الخ. وعلى وجه التحديد:

نسمي جواراً[1] لنقطة $x \in T$ كل مجموعة مفتوحة $G \subset T$ تحوي النقطة x، ونقول عن نقطة $x \in T$ أنها نقطة ملاصقة لمجموعة $M \subset T$ إذا كان كل جوار لِـ x يحوي على الأقل نقطة من M؛ ونقول عن x إنها نقطة تراكم للمجموعة M إذا كان كل جوار لِـx يحوي على الأقل نقطة من M تخالف x. تسمى مجموعة النقاط الملاصقة للمجموعة M ملاصق M ونرمز لها بِـ$[M]$. نبرهن بسهولة (ونترك ذلك للقارئ) على أن المجموعات المغلقة (المعتبرة، طبقاً للتعريف أعلاه، كمتممات للمجموعات المفتوحة) هي المجموعات الوحيدة التي تحقق الشرط $M = [M]$. نلاحظ كما هو الحال في الفضاءات المترية أن $[M]$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي M.

إن تعريف المجموعات البوريلية، الوارد في آخر الفقرة الرابعة من (§1، الفصل الثاني) والخاص بالفضاءات المترية يشمل الفضاءات الطوبولوجية بدون إجراء أي تغيير عليه.

تمرين. أثبت أن عملية الملاصقة $[M]$ بواسطة الطوبولوجية تمتع بالخاصيات من (1) إلى (4) الواردة في النظرية 1 من §2.

أمثلة. 1. يتضح من النظرية ′3 §2 أن المجموعات المفتوحة لكل فضاء متري تحقق المسلمتين (1) وَ (2) الواردتين في تعريف فضاء طوبولوجي. وبالتالي فإن كل فضاء متري فضاء طوبولوجي.

2. لتكن T مجموعة كيفية. نعتبر كل مجموعاتها الجزئية كمجموعات مفتوحة. من الواضح أن المسلمتين (1) وَ (2) محققتان؛ إذن، نحصل بالفعل على فضاء طوبولوجي. نلاحظ أن كل المجموعات الجزئية في هذا الفضاء مجموعات مفتوحة ومغلقة في آن واحد. وبالتالي فإن كلاً منها مساوية لملاصقها. يعتبر الفضاء المتري الوارد في المثال 1، §1 مثالاً لهذه الطوبولوجيا التافهة.

3. نحصل على حالة متطرفة أخرى، بأن نعتبر على مجموعة كيفية X

---

(1) هناك من يعرف جوار نقطة x على أنه مجموعة تحوى مجموعة مفتوحة تنتمي اليها x. (المترجم).

الطوبولوجيا المؤلفة من X وَ Φ لاغير. يكون ملاصق أية مجموعة غير خالية، في هذه الحالة، مساوياً لِـ X بأكمله. يمكن أن نسمي هذا الفضاء الطوبولوجي «فضاء نقاط ملتصقة».

4. لتكن T مجموعة مؤلفة من نقطتين a وَ b. نعتبر الطوبولوجيا المؤلفة من المجموعة T والمجموعة الخالية والمجموعة المكونة من النقطة b. إن المسلمتين (1) وَ (2) محققتان. إن المجموعات المغلقة في هذا الفضاء (المسمى عادة ثنائية نقطتين مترابطة) هي: T والمجموعة الخالية والمجموعة المكونة من النقطة a. نلاحظ أن ملاصق المجموعة الوحيدة العنصر $\{b\}$ هو T بأكمله.

تمرين. شيد كل الطوبولوجيات الممكنة لمجموعة X مؤلفة من نقطتين، ثلاث نقاط، أربع نقاط، خمس نقاط.

2. مقارنة الطوبولوجيات

نعتبر طوبولوجيتين τ_1 وَ τ_2 معرفتين على نفس الحامل X (نحصل عندئذٍ على فضاءين طوبولوجيين $T_1 = (X, \tau_1)$ وَ $T_2 = (T, \tau_2)$). نقول أن الطوبولوجيا τ_1 أقوى (أو أدق) من الطوبولوجيا τ_2 إذا كانت جماعة المجموعات τ_2 محتواة في τ_1. نقول أيضاً في هذه الحالة أن الطوبولوجيا τ_2 أضعف (أو أخشن) من τ_1.

ندخل بصفة طبيعية على مجموعة كافة الطوبولوجيات الممكنة في مجموعة X علاقة ترتيب جزئي (تكون الطوبولوجيا τ_2 سابقة لِـ τ_1 إذا كانت τ_2 أضعف من τ_1). يوجد في مجموعة الطوبولوجيات هذه عنصر أعظمي: وهو يمثل الطوبولوجيا التي تحوي كل المجموعات الجزئية من X (المثال 2)، كما يوجد عنصر أصغري لهذه المجموعة وهو يمثل الطوبولوجيا التي تحوي X وَ Φ لاغير (المثال 3).

نظرية 1. إن كل تقاطع $\tau = \bigcap_{\alpha} \tau_\alpha$ لطوبولوجيات لِـ X طوبولوجيا لِـ X، والطوبولوجيا τ أضعف من كلّ الطوبولوجيات τ_α.

البرهان. من الواضح أن $\bigcap_\alpha \tau_\alpha$ تحوي X وَ Φ. من جهة أخرى، لما كان كل إتحاد لعناصر من τ_α عنصراً من τ_α، وكل تقاطع منته لعناصر من τ_α عنصراً من τ_α فإن الأمر كذلك فيما يخص $\tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$.

نتيجة. لتكن $\mathcal{B}$ جماعة كيفية من أجزاء X، توجد عندئذٍ طوبولوجيا أصغرية لِـ X تحوي $\mathcal{B}$.

توجد بالفعل طوبولوجيات تحوي $\mathcal{B}$ (مثلاً تلك التي تحوي كل المجموعات الجزئية $A \subset X$). إن تقاطع كل هذه الطوبولوجيات يساوي الطوبولوجيا المطلوبة. نقول عن هذه الطوبولوجيا أنها أصغرية ومولدة عن الجماعة $\mathcal{B}$ ونرمز لها بِـ: $\tau(\mathcal{B})$.

لتكن X مجموعة كيفية و A مجموعة جزئية من X. نسمي أثر الجماعة $\mathcal{B}$ على المجموعة الجزئية A الجماعة $\mathcal{B}_A$ المؤلفة من أجزاء X من الشكل $A \cap B$ حيث $B \in \mathcal{B}$. من السهل أن نرى بأن الأثر (على A) للطوبولوجيا τ (المعرّفة على X) طوبولوجيا τ_A لِـ A. وهكذا يتضح أن كل مجموعة جزئية A من فضاء طوبولوجي هي نفسها فضاء طوبولوجي. يسمى الفضاء الطوبولوجي (A, τ_A) فضاءً جزئياً من الفضاء الطوبولوجي الأول (X, τ). كما يتضح أنه يمكن أن تولد طوبولوجيتان مختلفتان τ_1 وَ τ_2 لِـ X نفس الطوبولوجيا لِـ $A \subset X$. تسمى الطوبولوجيا τ_A الطوبولوجيا المقتصرة من τ على A.

3. جمل الجوارات الأساسية. الأساس. مسلمات قابلية العد

كنا رأينا بأن تعريف طوبولوجيا على مجموعة كيفية يعني تعيين جماعة المجموعات المفتوحة في هذه المجموعة. لكن من الملاحظ في المسائل الملموسة أنه يستحسن عادة تعيين جزء فقط من الطوبولوجيا؛ لمزيد من التوضيح نقول أنه يستحسن تعيين جماعة مجموعات مفتوحة تسمح بتعيين كافة المجموعات المفتوحة للطوبولوجيا وذلك بطريقة وحيدة. ففي الفضاءات المترية مثلاً كنا أدخلنا في البداية مفهوم الكرة (الـε- جوار) ثم عرفنا المجموعات المفتوحة كمجموعات تحوي مع كل نقطة ε - جواراً لهذه النقطة.

بعبارة أخرى تكون مجموعة في فضاء متري مفتوحة إذا وفقط إذا كانت مساوية لاتحاد (منته أو غير منته) كرات مفتوحة. بصفة خاصة تكون مجموعة من المستقيم العددي مفتوحة إذا وفقط إذا كانت تساوي اتحاد مجالات. تقودنا هذه الإعتبارات إلى المفهوم الهام لأساس فضاء طوبولوجي.

تعريف. تسمى جماعة $\mathfrak{G}$ من المجموعات المفتوحة أساساً لفضاء طوبولوجي T إذا كانت كل مجموعة مفتوحة من T مساوية لإتحاد (منته أو غير منته) مجموعات من $\mathfrak{G}$.

وهكذا نرى مثلاً أن مجموعة الكرات المفتوحة (ذات مراكز وانصاف أقطار كيفية) في فضاء متري أساس لهذا الفضاء. بصفة خاصة تمثل مجموعة كافة المجالات المفتوحة أساساً للمستقيم العددي. نحصل أيضاً على أساس للمستقيم العددي باعتبار المجالات المفتوحة ذات الأطراف الناطقة، لأن كل مجال (وبالتالي كل مجموعة مفتوحة من المستقيم العددي) يكتب على شكل إتحاد لمجالات مفتوحة من النوع المذكور.

نستطيع إذن تعريف طوبولوجيا τ لفضاء T بتعيين أساس $\mathfrak{G}$ لهذا الفضاء، تصبح الطوبولوجيا τ مساوية لجماعة المجموعات التي يمكن تمثيلها على شكل إتحادات مجموعات من $\mathfrak{G}$.

إن كل أساس $\mathfrak{G}$ لفضاء طوبولوجي $T = (X, \tau)$ يتمتع بالخاصيتين التاليتين:

1) كل نقطة $x \in X$ تنتمي حتماً إلى مجموعة $G \in \mathfrak{G}$.

2) إذا انتمى x إلى تقاطع مجموعتين G_1 وَ G_2 من $\mathfrak{G}$ فإنه توجد مجموعة G_3 من $\mathfrak{G}$ تحقق:

$$x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2$$

ذلك أن الخاصية (1) تعني فقط بأن المجموعة X، بصفتها مجموعة مفتوحة، ممثلة باتحاد مجموعات من $\mathfrak{G}$، أما الخاصية (2) فهي ناتجة من أن $G_1 \cap G_2$ مجموعة مفتوحة وعليه فهي ممثلة باتحاد مجموعات الأساس $\mathfrak{G}$.

بخصوص القضية العكسية، نعتبر مجموعة X كيفية وَ $\mathfrak{G}$ جماعة أجزاء من X تتمتع بالخاصيتين (1) وَ (2). عندئذٍ نلاحظ أن جماعة المجموعات التي يمكن تمثيلها على شكل اتحادات لمجموعات من $\mathfrak{G}$ طوبولوجيا على X (أي أنها تحقق المسلمتين (1) وَ (2) من الفضاء الطوبولوجي).

لرؤية ذلك نعتبر الجماعة $\tau(\mathfrak{G})$ التي تحوي المجموعات الجزئية من X التي يمكن وضعها على شكل إتحادات لمجموعات من $\mathfrak{G}$. حينئذٍ ينتج أن المجموعة الخالية (1) والمجموعة X بأكملها وكل اتحاد مجموعات من $\tau(\mathfrak{G})$ تنتمي إلى $\tau(\mathfrak{G})$. لنثبت أن كل تقاطع منته لمجموعات من $\tau(\mathfrak{G})$ ينتمي إلى $\tau(\mathfrak{G})$. يكفي أن نتأكد من ذلك من أجل تقاطع مجموعتين. لتكن:

$$A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha \quad \text{وَ} \quad B = \bigcup_{\alpha} B_\alpha \text{ ؛}$$

عندئذٍ:

$$A \cap B = \bigcup_{\alpha,\beta} (G_\alpha \cap G_\beta)$$

بالاستناد إلى الخاصية (2) يأتي أن $G_\alpha \cap G_\beta$ تنتمي إلى $\tau(\mathfrak{G})$. ومنه: $A \cap B \in \tau(\mathfrak{G})$.

وبذلك نحصل على النتيجة التالية:

نظرية 2. لكي تكون جماعة $\mathfrak{G}$ من الأجزاء G لمجموعة X أساساً لطوبولوجيا لِـ X يلزم ويكفي أن تتمتع $\mathfrak{G}$ بالخاصيتين (1) وَ (2).

لتكن الآن τ طوبولوجيا معينة من الفضاء T. نعتبر في T جماعة $\mathfrak{G}$ مؤلفة من مجموعات مفتوحة تحقق الخاصيتين (1) وَ (2). تتخذ $\mathfrak{G}$ أساساً، نحصل عندئذٍ على طوبولوجيا $\tau(\mathfrak{G})$ لِـ T مساوية للطوبولوجيا الأولى τ أو أضعف منها. بودنا الآن أن نجد الشروط التي تجعل الجماعة $\mathfrak{G}$ تولد بالضبط الطوبولوجيا المعطاة τ.

نظرية 3. لكي تكون جماعة مجموعات مفتوحة $\mathfrak{G} \subset \tau$ أساساً لطوبولوجيا τ يلزم ويكفي أن تتحقق الخاصية:

(1) يمكن اعتبارها كاتحاد جماعة خالية من مجموعات الجماعة $\mathfrak{G}$.

3) من أجل كل مجموعة مفتوحة G وكل نقطة $x \in G$ ، توجد مجموعة $G_x \in \mathcal{G}$ بحيث $x \in G_x \subset G$.

البرهان. إذا كانت الخاصية (3) محققة فإن كل مجموعة مفتوحة G تكتب على الشكل :

$$G = \bigcup_{x \in G} G_x$$

وهذا يعني أن $\mathcal{G}$ أساس للطوبولوجيا τ . والعكس بالعكس ، إذا كان $\mathcal{G}$ أساساً للطوبولوجيا τ فإن كل مجموعة $G \in \tau$ تساوي إتحاد مجموعات من τ ، وعندئذٍ من أجل كل $x \in G$ توجد مجموعة $G_x \in \mathcal{G}$ بحيث $x \in G_x \subset G$.

تمرين. ليَكن $\mathcal{G}_1$ وَ $\mathcal{G}_2$ أساسين لطوبولوجيتين τ_1 وَ τ_2 على التوالي في مجموعة X (أي أن $\mathcal{G}_1$ وَ $\mathcal{G}_2$ جماعتان تحققان الشرطين (1) و (2) الواردين أعلاه) . برهن على أن $\tau_1 \subset \tau_2$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل $G_1 \in \mathcal{G}_1$ وكل نقطة $x \in G_1$ ، توجد مجموعة $G_2 \in \mathcal{G}_2$ بحيث $x \in G_2 \subset G_1$.

نبرهن بسهولة بواسطة النظرية 3 على أن مجموعة الكرات المفتوحة في فضاء متري أساس لطوبولوجيته. وكذلك الشأن فيما يخص مجموعة الكرات التي لها نصف قطر ناطق. نحصل على أساس في المستقيم العددي مثلاً إذا إعتبرنا مجموعة المجالات المفتوحة الناطقة (أي ذات الأطراف الناطقة) .

هناك صنف هام من الفضاءات المترية تكونه الفضاءات ذات الأساس القابل للعد ، أي الفضاءات التي تحوي على الأقل أساساً يتألف من عدد منته أو غير منته وقابل للعد من المجموعات. تسمى الفضاءات ذات الأساس القابل للعد الفضاءات المحققة لمسلمة قابلية العد الثانية .

إذا قبل فضاء طبوبولوجي T أساساً قابلاً للعد فإنه توجد مجموعة قابلة للعد كثيفة أينما كان في T ، أي مجموعة قابلة للعد ملاصقها يساوي T . لرؤية ذلك نرمز بـ$\{G_n\}$ لمثل هذا الأساس. نختار في كل عنصر من عناصره نقطة كيفية x_n . إن المجموعة $X = \{x_n\}$ كثيفة أينما كان في T ، لأن عدم تحقيق ذلك يجعل المجموعة المفتوحة غير الخالية $G = T \setminus [X]$ لاتنتمي إليها أية نقطة من X ، وهذا مستحيل نظراً لكون G إتحاداً لمجموعات من الجماعة $\{G_n\}$ وَ $x_n \in G_n$.

نقول عن فضاء طوبولوجي يحوي مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان أنه فضاء قابل للفصل، كما هو الشأن بالنسبة للفضاءات المترية.

بخصوص الفضاءات المترية لدينا أيضاً النظرية العكسية للنظرية التي برهنا عليها آنفاً.

إذا كان فضاء متري R قابلاً للفصل فإن له أساساً قابلاً للعد. لرؤية ذلك، نقول أن مثل هذا الأساس هو مثلاً مجموعة الكرات المفتوحة $B(x_n, 1/m)$ حيث $\{x_n\}$ مجموعة قابلة للعد كثيفة أينما كان، أما n وَ m فهما عددان كيفيان ومستقلان في مجموعة الأعداد الطبيعية. لدينا إذن النظرية التالية:

نظرية 4. يكون فضاء متري R قابلاً لأساس قابل للعد إذا وفقط إذا كان قابلاً للفصل.

بفضل هذه النظرية نرى أن الفضاءات المترية القابلة للفصل أمثلة للفضاءات المترية المحققة لمسلمة قابلية العد الثانية. ليس للفضاء غير القابل للفصل المؤلف من المتتاليات المحدودة (راجع المثال 9، §1) أساس قابل للعد.

ملاحظة. إن النظرية 4 ليست، عموماً، محققة من أجل الفضاءات الطوبولوجية الكيفية (غير المترية): يمكن تقديم أمثلة لفضاءات قابلة للفصل بدون أساس قابل للعد. لنفسر هذه الظاهرة. توجد في فضاء متري R، من أجل كل نقطة x، مجموعة قابلة للعد $\mathfrak{U}$ من الجوارات (مثلاً، مجموعة الكرات المفتوحة $B(x, 1/n)$) تتمتع بالخاصية التالية: من أجل كل مجموعة مفتوحة G تحوي النقطة x، يوجد في $\mathfrak{U}$ جوار لِـ x محتوٍ في G. تسمى المجموعة $\mathfrak{U}$ جملة جوارات أساسية لِـ x.

إذا كانت النقطة x من فضاء طوبولوجي T تقبل جملة جوارات أساسية نقول عن هذه النقطة أنها تحقق مسلمة العد الأولى. إذا صح ذلك من أجل كل نقطة من الفضاء T، نقول عن هذا الفضاء أنه يحقق مسلمة قابلية العد الأولى.

إن كل فضاء متري ، حتى ولو كان غير قابل للفصل ، يحقق حتماً مسلمة قابلية العد الأولى . أما في فضاء طوبولوجي كيفي (حتى ولو كان قابلاً للعد) فإن المسلمة الأولى لقابلية العد ليست محققة في جميع الحالات . ولذلك نرى أن الإستدلالات التي سمحت لنا بالقول ، في حالة الفضاءات المترية ، أن وجود مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان يستلزم وجود أساس قابل للعد ، لا تقوم في حالة فضاء طوبولوجي كيفي . بالإضافة إلى ذلك فحتى لو كان فضاء طوبولوجي قابلاً للفصل ويحقق مسلمة قابلية العد الأولى فقد يخلو هذا الفضاء من كل أساس قابل للعد .

نقول عن جماعة المجموعات $\{M_\alpha\}$ أنها تغطية لمجموعة X إذا كان $\bigcup_\alpha M_\alpha = X$. نقول عن تغطية فضاء طوبولوجي T مؤلفة من مجموعات مفتوحة (مغلقة ، على التوالي) أنها تغطية مفتوحة (مغلقة ، على التوالي) . إذا كان جزء $\{M_{\alpha i}\}$ من التغطية $\{M_\alpha\}$ يمثل تغطية للفضاء T نقول أن $\{M_{\alpha i}\}$ تغطية جزئية لِـ $\{M_\alpha\}$.

نظرية 5. إذا كان T فضاءً طوبولوجياً له أساس قابل للعد ، فإنه يمكن إستخراج تغطية جزئية منتهية أو قابلة للعد من كل تغطية مفتوحة لِـ T .

البرهان. لتكن $\{O_\alpha\}$ تغطية مفتوحة للفضاء T . عندئذٍ تكون كل نقطة $x \in T$ منتمية إلى مجموعة من $\{O_\alpha\}$. ليكن ، من جهة أخرى ، $\{G_n\}$ أساساً قابلاً للعد لِـ T . من أجل كل نقطة $x \in T$ يوجد عنصر $G_n(x)$ من هذا الأساس بحيث $x \in G_n(x) \subset O_\alpha$. إن جماعة المجموعات $G_n(x)$ المختارة بهذه الطريقة ، منتهية أو قابلة للعد وهي تغطي كل الفضاء T . إذا اخترنا من أجل كل مجموعة $G_n(x)$ مجموعة O_α من بين المجموعات التي تحوي $G_n(x)$ ، نحصل على تغطية جزئية منتهية أو قابلة للعد من التغطية $\{O_\alpha\}$.

انتهى برهان النظرية .

من تعريف فضاء طوبولوجي يأتي أن المجموعة الخالية والفضاء T نفسه مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد .

يسمى الفضاء الذي لا يحوى مجموعات مفتوحة ومغلقة في آن واحد عدا المجموعة T نفسها والمجموعة الخالية ، فضاءً مترابطاً . يمثل المستقيم العددي

R^1 أبسط مثال لفضاء مترابط. لكن لو نزيل نقطة أو عدة نقاط من R^1 فإن الفضاء المتبقي يصبح غير مترابط.

4. المتتاليات المتقاربة في T.

من السهل تعميم مفهوم تقارب متتالية الذي رأيناه في حالة الفضاءات المترية ليشمل حالة الفضاءات الطوبولوجية.

نقول عن متتالية نقاط ... $x_1, x_2, ..., x_n$, من T أنها متقاربة نحو النقطة x إذا كان كل جوار للنقطة x يحوي كل نقاط هذه المتتالية إبتداء من رتبة معينة. نشير بهذا الخصوص أن مفهوم التقارب لايلعب دوراً هاماً في الفضاءات الطوبولوجية مثلما يلعبه في حالة الفضاءات المترية. ذلك لأن في فضاء متري R تكون نقطة x ملاصقة لمجموعة $M \subset R$ إذا وفقط إذا وجدت في M متتالية متقاربة نحو x، أما في الفضاءات الطوبولوجية فالأمر ليس كذلك عموماً. إذا كان T فضاء طوبولوجياً فإن الفرض بأن x نقطة ملاصقة للمجموعة M (أي $x \in [M]$) لايؤدي إلى وجود متتالية في M متقاربة نحو x. نعتبر على سبيل المثال القطعة $[0, 1]$ ونعرّف المجموعات المفتوحة فيها على أنها كل المجموعات الجزئية من $[0, 1]$ (بما في ذلك المجموعة الخالية) التي نحصل عليها بإزالة عدد منته أو متتالية نقاط من $[0, 1]$. من السهل أن نتأكد من أن شرطي التعريف الوارد في الفقرة الأولى من 5§ محققان وهو ما يبين أن لدينا فضاءً طوبولوجياً. إن المتتاليات المتقاربة الوحيدة في هذا الفضاء هي المتتاليات المستقرة أي تلك التي لها حدود متساوية ابتداء من مرتبة ما: $x_n = x_{n+1} = ...$ (برهن على ذلك!) . من جهة أخرى لو نأخذ مثلاً $M = (0, 1]$ فإن النقطة 0 تصبح ملاصقة لِـ M (تأكد من ذلك!) رغم أنه لا توجد أية متتالية نقاط في M متقاربة في الفضاء المعتبر نحو النقطة 0.

نلاحظ أن المتتاليات المتقاربة «تسترجع حقوقها» إذا كانت الفضاءات الطوبولوجية غير كيفية وتحقق مسلمة قابلية العد الأولى أي إذا قبلت كل نقطة x من الفضاء T جملة قابلة للعد من الجوارات الأساسية. في هذه الحالة يمكن أن نعتبر كل نقطة ملاصقة x لمجموعة كيفية $M \subset T$ كنهاية متتالية نقاط من M.

لرؤية ذلك نعتبر جملة قابلة للعد من الجوارات الأساسية للنقطة x، نرمز لهذه الجملة بـ$\{O_n\}$ يمكن أن نفرض دوماً بأن $O_{n+1} \subset O_n$ (وإلا فنعوض O_n بـ $\bigcap_{k=1}^{n} O_k$). لتكن x_k نقطة كيفية من M تنتمي إلى O_k $(k = 1, 2, ...)$. من الواضح أن مثل هذه النقطة موجودة ولولاه لما كانت x نقطة ملاصقة لـM. إن المتتالية $\{x_k\}$ متقاربة نحو x.

سبق وأن قلنا بأن كل الفضاءات المترية تحقق مسلمة قابلية العد الأولى وهو الأمر الذي سمح لنا بصياغة بعض المفاهيم مثل مفهوم الملاصق والنقطة الملاصقة، الخ.، بدلالة تقارب متتاليات في الفضاءات المترية.

5. التطبيقات المستمرة. الهوميومورفسم

نستطيع تعميم مفهوم التطبيق المستمر، الذي أدخلناه في 1§ بخصوص الفضاءات المترية، ليشمل بصفة طبيعية الفضاءات الطوبولوجية الكيفية.

تعريف. ليكن X وَ Y فضاءين طوبولوجيين. نقول عن التطبيق f من الفضاء X في الفضاء Y إنه مستمر عند النقطة x_0، إذا استطعنا، من أجل كل جوار U_{y_0} للنقطة $y_0 = f(x_0)$، إيجاد جوار V_{x_0} للنقطة x_0 بحيث $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$. نقول عن التطبيق $f: X \to Y$ أنه مستمر إذا كان مستمراً عند كل نقطة $x \in X$. بصفة خاصة إذا كان f تطبيقاً من الفضاء الطوبولوجي X في المستقيم العددي فإننا نسمي f تابعاً مستمراً على X.

نتأكد بسهولة من أن التعريف السابق يطابق، في حالة اعتبار فضاءات مترية، تعريف استمرار تطبيق من فضاء متري في آخر الوارد في 1§.

نلاحظ أن التعريف السابق ذو طبيعة «محلية». ذلك أن تعريف استمرار التطبيق f على كل الفضاء X يتم بواسطة تعريف استمرار f عند كل نقطة من X. نشير بهذا الصدد أن استمرار تطبيق من فضاء طوبولوجي في آخر يمكن صياغته بدلالة المجموعات المفتوحة أي بدلالة طوبولوجيا هذين الفضاءين.

نظرية 6. لكي يكون تطبيق f من الفضاء الطوبولوجي X في الفضاء الطوبولوجي Y مستمراً يلزم ويكفي أن تكون الصورة العكسية $\Gamma = f^{-1}(G)$ لكل مجموعة مفتوحة $G \subset Y$ مفتوحة (في X).

البرهان. الشرط لازم. نفرض أن التطبيق f مستمر ولتكن G مجموعة مفتوحة في Y. نبرهن على أن المجموعة $\Gamma = f^{-1}(G)$ مفتوحة. لتكن x نقطة كيفية من Γ وَ $y = f(x)$. عندئذٍ يكون G جواراً للنقطة y.

من تعريف الاستمرار يأتي وجود جوار V_x للنقطة x بحيث: $f(V_x) \subset G$ أي $V_x \subset \Gamma$. بعبارة أخرى، إذا كان $x \in \Gamma$ يوجد جوار V_x لِـ x محتوٍ في Γ، وهذا يعني أن Γ مجموعة مفتوحة.

الشرط كافٍ. نفرض أن $\Gamma = f^{-1}(G)$ مفتوح من أجل كل مفتوح $G \subset Y$. نعتبر نقطة كيفية $x \in X$ وجواراً كيفياً $\cup_y$ للنقطة $y = f(x)$. لما كان $y \in \cup_y$ فإن $x \in f^{-1}(\cup_y)$. وبالتالي فإن المجموعة المفتوحة $f^{-1}(\cup_y)$ جوار للنقطة x التي تحقق: $f(x) \in \cup_y$. وبذلك ينتهي برهان النظرية.

ملاحظة. لتكن X وَ Y مجموعتين كيفيتين وَ f تطبيقاً من X في Y. إذا عرفنا على Y طوبولوجيا τ (أي جماعة مفتوحة تحوى Φ وَ Y «مغلقة» من أجل كل إتحاد وكل تقاطع منته من المجموعات) فإن الصورة العكسية لهذه الطوبولوجيا τ (أي جماعة كل المجموعات $f^{-1}(G)$، حيث $G \in \tau$) طوبولوجيا لِـ X.

لإثبات ذلك يكفي أن نتذكر النظريات حول الصور العكسية لإتحاد وتقاطع مجموعات (راجع 2 §، الفصل 1) نرمز لهذه الطوبولوجيا بِـ $f^{-1}(\tau)$. إذا كان X وَ Y فضاءين طوبولوجيين، وَ τ_x وَ τ_y طوبولوجيتيهما على التوالي، فإن النظرية 6 تصاغ أيضاً كما يلي:

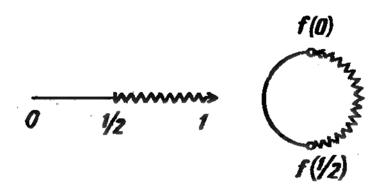
يكون التطبيق $f: X \to Y$ مستمراً إذا وفقط إذا كانت الطوبولوجيا τ_x أقوى من الطوبولوجيا $f^{-1}(\tau_y)$.

نظراً لكون الصورة العكسية للمتمم تساوي متمم الصورة العكسية فإننا نستنتج النظرية التالية، الثنوية للنظرية 6.

نظرية $6'$. لكي يكون تطبيق f من فضاء طوبولوجي X في فضاء طوبولوجي Y مستمراً يلزم ويكفي أن تكون الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة من Y مجموعة مغلقة (في X).

نتأكد بسهولة من أن صورة مجموعة مفتوحة (مغلقة على التوالي) بواسطة تطبيق مستمر ليست حتماً مفتوحة (مغلقة على التوالي).

نعتبر مثلاً تطبيقاً مستمراً من المجال نصف المفتوح $[0, 1[$ على دائرة. إن صورة المجموعة $(1/2, 1($ المغلقة في $[0, 1[$ مجموعة غير مغلقة على الدائرة (الرسم 11).



الرسم 11

لدينا النظرية التالية الخاصة بالتطبيقات المستمرة وهي تماثل النظرية الشهيرة في التحليل الخاصة باستمرار تابع مركب.

نظرية 7. لتكن X وَ Y وَ Z ثلاثة فضاءات طوبولوجية. إذا كان التطبيقان $f: X \to Y$ وَ $\varphi: Y \to Z$ مستمرين فإن التطبيق $x \to \varphi(f(x))$ من X في Z مستمر أيضاً.

نحصل على برهان لهذه النظرية مباشرة من النظرية 6.

إن مفهوم الهوميومورفسم الذي أدخل في 1 § بخصوص الفضاءات المترية يُعمَّم إلى الفضاءات الطوبولوجية. ويتم ذلك كما يلي: نقول عن تطبيق f من فضاء طوبولوجي X في فضاء طوبولوجي Y إنه هوميومورفسم إذا كان تقابلاً ومستمراً وكذا تطبيقه العكسي، ونقول عندئذٍ عن الفضاءين X وَ Y أنهما فضاءان هوميومورفيان. يتمتع كل فضاءين هوميومورفيين بنفس الخواص الطوبولوجية. ومن وجهة النظر الطوبولوجية، نستطيع إعتبارهما نسختين من نفس الفضاء. تمثل طوبولوجيتا فضاءين هوميومورفيين الصورة والصورة العكسية، الواحدة للأخرى. إن علاقة الهوميومورفية علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية، وعليه نستطيع تقسيم كل مجموعة فضاءات طوبولوجية إلى صفوف غير متقاطعة من الفضاءات الهوميومورفية فيما بينها.

ملاحظة. الجدير بالملاحظة أن الخواص المترية (أو المسافية) لفضاءين متريين هوميومورفيين يمكن أن تكون مختلفة[1]. فمثلاً يمكن أن يكون الواحد منهما تاماً والآخر غير تام. إن المجال $(-\pi/2, \pi/2)$ مثلاً والمستقيم العددي هوميومورفيان (الهوميومورفسم هو مثلاً التابع $x \to \text{tg}\, x$)، في حين أن المستقيم العددي فضاء تام، أما المجال $(-\pi/2, \pi/2)$ فهو عكس ذلك.

6. مسلمات الفصل

على الرغم من أن العديد من المفاهيم الأساسية للفضاءات المترية يمكن تعميمها، بدون عناء، إلى الفضاءات الطوبولوجية الكيفية، فإن هذه الأخيرة تمثل كائنات عامة جداً بالمقارنة بما تتطلبه مسائل التحليل الرياضي. فنحن نتعرض في معظم الأحيان إلى حالات، في هذه الفضاءات، تختلف إختلافاً كبيراً عن الحالات التي نجدها في الفضاءات المترية. فقد رأينا في هذا الصدد، أن مجموعة منتهية من النقاط في فضاء طوبولوجي قد لا تكون مغلقة (المثال 4، الفقرة 1 من § 5) الخ.

نستطيع أن نختار من بين الفضاءات الطوبولوجية فضاءات تمتاز بطبيعة خاصياتها القريبة من خاصيات الفضاءات المترية. من أجل ذلك ينبغي أن نضيف إلى المسلمتين (1) وَ(2) الواردتين في تعريف الفضاء الطوبولوجي بعض الشروط الأخرى. ذلك هو حال مسلمتي قابلية العد مثلاً؛ فهما يسمحان بدراسة طوبولوجيا فضاء إنطلاقاً من مفهوم التقارب.

هناك شروط أخرى من نمط هام تعطيها مسلمات الفصل. نقدم فيما يلي مسلمات هذا النوع حسب ترتيب ترابطها ببعضها.

المسلمة T_1 (مسلمة الفصل الأولى) : مهما كانت النقطتان المختلفتان x وَ y من الفضاء T، يوجد جوار O_x للنقطة x لا يحوي y، وجوار O_y للنقطة y لا يحوي النقطة x.

نرمز للفضاءات التي تحقق هذه المسلمة بِـ T_1 فضاءات. تمثل ثنائية

---

(1) تعرّف مسافة فضاء متري R (بطريقة وحيدة) طوبولوجيا R، لكن القضية العكسية غير صحيحة : يمكن الحصول على نفس الطوبولوجيا للفضاء $R = (X, \varrho)$ بواسطة مسافتين مختلفتين على X.

النقطتين المترابطة فضـاء طوبولوجياً غير محقق للمسلمة T_1 (أي أنه ليس T_1 – فضـاء) .

نلاحظ أن كل مجموعة وحيدة العنصر في T_1 – فضـاء مجموعة مغلقة . ذلك أنه إذا كان $x \neq y$ فإنه يوجد جوار O_y للنقطة y لا يحوي x ، أي أن $[\{x\}] \not\ni y$. ولذا فإن $\{x\} = [\{x\}]$. وبالتالي فإن كل مجموعة منتهية من النقاط في T_1 – فضـاء مجموعة مغلقة . بالإضـافة إلى ذلك نتأكد بدون عناء أن المسلمة T_1 تكافئ الشرط القائل أن كل المجموعات من هذا النوع مجموعات مغلقة .

كنا عرّفنا نقطة تراكم لمجموعة M من الفضـاء الطوبولوجي T على أنها نقطة $x \in T$ بحيث $M \setminus \{x\} \cap U \neq \Phi$ ، حيث U جوار كيفي للنقطة x .

إذا لم يحقق فضـاء طوبولوجي المسلمة T_1 فإنه من الممكن أن تكون فيه مجموعة منتهية قابلة لنقاط تراكم . لرؤية ذلك نعتبر ثنائية نقطتين مترابطة T . يمثل هذا الفضـاء طوبولوجياً المجموعات Φ ، $\{b\}$ ، $\{a, b\}$. إن النقطة a نقطة تراكم للمجموعة $M = \{b\}$.

إن هذه الظاهرة مستحيلة في T_1 – فضـاء . وعلى وجه التحديد لدينا :

توطئة . لكي تكون النقطة x نقطة تراكم لمجموعة M من T_1 – فضـاء يلزم ويكفي أن يكون كل جوار U لهذه النقطة يحتوي عدداً غير منته من نقاط M .

من الواضح أن هذا الشرط كافٍ . لنبرهن على أنه لازم . لتكن x نقطة تراكم لِـ M ؛ نفرض وجود جوار U للنقطة x لا يحوي سوى عدد منته من نقاط M . لتكن $x_1, x_2, ..., x_n$ هذه النقاط عدا النقطة x (إن كانت هذه النقطة منتمية إلى M) . عندئذٍ يكون $V = U \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ جواراً لِـ x وَ :

$$V \cap M \setminus \{x\} = \Phi$$

كل فضـاء متري هو حتماً T_1 – فضـاء . ولهذا فإن مفهوم نقطة تراكم لمجموعة في فضـاء متري قد أدخل إنطلاقاً من الخاصية المشار اليها في التوطئة أعلاه .

تعتبر المسلمة التالية تعزيزاً لمسلمة الفصل الأولى.

المسلمة T_2 (مسلمة الفصل الثانية أو مسلمة هوسدورف (Hausdorff)).

من أجل كل نقطتين مختلفتين x وَ y من فضاء طوبولوجي T، يوجد جواران O_x وَ O_y غير متقاطعين.

نرمز للفضاءات التي تحقق هذه المسلمة بـ T_2 - فضاءات وتسمى أيضاً فضاءات هوسدورف. كل فضاء هوسدورف هو حتماً T_1 - فضاء. لكن القضية العكسية غير صحيحة. كمثال لِـ T_1 - فضاء لايحقق المسلمة الثانية هو القطعة $[0, 1]$ التي نعرف طوبولوجيتها بأنها تضم المجموعة الخالية وكل المجموعات المحصل عليها من هذه القطعة بإزالة مجموعة (منتهية أو قابلة للعد) من النقاط.

المسلمة الثالثة T_3 (مسلمة الفصل الثالثة): كل نقطة وكل مجموعة مغلقة لاتحوي هذه النقطة تقبلان جوارات غير متقاطعة.

نشير إلى أننا نسمي جواراً لمجموعة M، في فضاء طوبولوجي T، كل مجموعة مفتوحة U تحوي M.

نستطيع صياغة هذه المسلمة على الشكل المكافئ التالي:

من أجل كل جوار U لنقطة كيفية x يوجد جوار لِـ x محتوٍ هو وملاصقه في U.

يمكن للقارئ أن يبرهن على ذلك في إطار التمارين.

لما كان بالإمكان أن تكون مجموعة ذات عنصر واحد في فضاء طوبولوجي كيفي غير مغلقة، فإن مسلمة الفصل الثالثة لا تكون ذات أهمية إلا في حالة الفضاءات التي تحقق المسلمة الأولى. تسمى الفضاءات التي تحقق المسلمتين T_1 وَ T_3 في آن واحد الفضاءات النظامية.

كل فضاء نظامي فضاء لهوسدورف. نحصل على مثال لفضاء هوسدورف غير نظامي باعتبار القطعة $[0, 1]$ حيث نعرّف جوارات كل النقاط ماعدا 0 كالمعتاد، أما فيما يخص النقطة 0 فجواراتها هي كل المجالات نصف المفتوحة $[0, \alpha)$ التي نزيل منها النقاط من النمط $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

إنه فضاء لهوسدورف غير نظامي لأن النقطة 0 والمتتالية $\{\frac{1}{n}\}$ (التي تمثل مجموعة مغلقة لا تحوي النقطة 0) ليست لهما جوارات غير متقاطعة.

لانحتاج عادة في التحليل إلى فضاءات أعم من الفضاءات النظامية. بل إن الأمر عكس ذلك، فالفضاءات الأكثر أهمية من وجهة نظر التحليل، هي تلك التي تحقق زيادة على ذلك الشرط القوي التالي المسمى شرط «ناظمية» الفضاء:

المسلمة T_4 (مسلمة الناظمية): نقول عن T_1 – فضاء أنه فضاء ناظمي إذا إستطعنا، من أجل كل مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين من هذا الفضاء، إيجاد جوارين لهما غير متقاطعين.

نرى بصفة خاصة، أن كل الفضاءات المترية ناظمية. ذلك أنه إذا كانت X وَ Y مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين من الفضاء المتري R فإن كل نقطة $x \in X$ تقبل جواراً O_x لا يلتقي بِـ Y، وبالتالي فهي تقع على مسافة موجبة ϱ_x من Y. كما أن المسافة التي تفصل كل نقطة $y \in Y$ عن المجموعة X عدد موجب ϱ_y. نعتبر المجموعتين المفتوحتين[1] التاليتين:

$$U = \bigcup_{x\in X} B\left(x, \frac{\varrho_x}{2}\right) \;,\; V = \bigcup_{y\in Y} B\left(y, \frac{\varrho_y}{2}\right)$$

نلاحظ أن $X \subset U$ وَ $Y \subset V$. ولنثبت أن تقاطع U وَ V خالٍ. من أجل ذلك نفرض أن هناك نقطة $z \in U \cap V$. عندئذٍ توجد في X نقطة x_0 بحيث $\varrho(x_0, z) < \varrho_{x_0}/2$، وتوجد في Y نقطة y_0 بحيث $\varrho(z, y_0) < \varrho_{y_0}/2$. لتكن مثلاً $\varrho_{x_0} \leq \varrho_{y_0}$. نجد حينئذٍ أن:

$$\varrho(x_0, y_0) \leq \varrho(x_0, z) + \varrho(z, y_0) < \frac{\varrho_{x_0}}{2} + \frac{\varrho_{y_0}}{2} \leq \varrho_{y_0}$$

---

(1) ترمز هنا $B(x, r)$ كالعادة لكرة مفتوحة نصف قطرها r ومركزها x.

(2) نقول عن خاصية أنها وراثية إذا كان تمتّع فضاء طوبولوجي بها يستلزم أن كل الفضاءات الجزئية من هذا الفضاء تمتع بها أيضاً.

(3) هذه النتيجة (غير البديهية) تأتي من النظرية التالية لِـ ب.س أوريسون (P. S. Urysohn): إذا كان T فضاء ناظمياً وَ F_1 وَ F_2 مجموعتين جزئيتين ومغلقتين وغير متقاطعتين من T، فإنه يوجد تابع f مستمر على T يحقق الشرط $0 \leq f(x) \leq 1$ ومنعدم على F_1 ويساوي 1 على F_2.

أي أن : $x_0 \in B(y_0, \varrho_{y_0})$ ، لكن هذا يناقض تعريف ϱ_{y_0}، وبذلك يتم البرهان.

إن كل فضاء جزئي من فضاء متري هو نفسه فضاء متري، وعليه فكل فضاء جزئي من فضاء متري فضاء ناظمي. إن هذه النتيجة لا تصدق دوماً إذا تعلق الأمر بفضاءات ناظمية كيفية : فإنه لا يمكن القول أن كل فضاء جزئي من فضاء ناظمي فضاء ناظمي. أي أن الخاصية الناظمية للفضاءات ليست خاصية وراثية(2).

تمثل الفضاءات الطوبولوجية النظامية تماماً مثالاً تتوفر فيه الخاصية الوراثية «للنظامية التامة» التي تعزز خاصية «النظامية». نقول عن T_1 – فضاء أنه نظامي تماماً إذا كان من أجل كل مجموعة مغلقة $T \supset F$ ومن أجل كل نقطة x_0 من $T \setminus F$ ، يوجد تابع حقيقي f مستمر على T ومنعدم عند x_0 ويساوي 1 على F ويحقق الشرط $0 \leq f(x) \leq 1$. إن كل فضاء ناظمي نظامي تماماً، لكن القضية العكسية غير صحيحة. كل فضاء جزئي من فضاء نظامي تماماً (قد يكون هذا الفضاء ناظمياً) هو أيضاً نظامي تماماً. يعود مفهوم الفضاء النظامي تماماً إلى أ. تيخونوف (A. Tikhonov) الذي أثبت من جهة أخرى أن صف الفضاءات النظامية تماماً هو صف كل الفضاءات الجزئية من الفضاءات الناظمية.

من وجهة نظر التحليل، نلاحظ أن الفضاءات النظامية تماماً هامة بفضل وجود توابع مستمرة «بكمية كافية» على مثل هذه الفضاءات، وبعبارة أدق، ترجع أهمية هذه الفضاءات إلى الخاصية التالية : من أجل كل نقطتين x وَ y مختلفتين من فضاء نظامي تماماً T ، يوجد تابع حقيقي f معرّف ومستمر على T بحيث $f(x) \neq f(y)$.

7. طرق مختلفة لتعريف الطوبولوجيا على فضاء. قابلية المسافة.

إن الطريقة المباشرة أكثر من غيرها لتعريف طوبولوجيا فضاء تمثل في تحديد المجموعات التي يجب اعتبارها مفتوحة. من اللازم أن تحقق هذه المجموعات الشرطين (1) وَ (2) الواردين في تعريف الفقرة 1 من 5§. هناك

طريقة أخرى مكافئة للسابقة وثنويتها، وهي تتمثل في تحديد جماعة مجموعات مغلقة تحقق المسلمتين (1) وَ (2) الواردتين في الفقرة 1 من 5§. والواقع أن هذه الطريقة ليست جد عملية. وهكذا يستحيل، حتى في حالة المستوى مثلاً، أن نعطي وصفاً مباشراً لكل المجموعات الجزئية المفتوحة [بخلاف حالة المستقيم (أنظر النظرية 5، 2§)].

هناك طريقة معمول بها لتعريف الطوبولوجيا وهي تتمثل في اختيار أساس، والملاحظ هو أن هذه هي الطريقة التي كنا استخدمناها لتعريف طوبولوجيا فضاء متري، حيث اخترنا انطلاقاً من المسافة المعطاة الأساس المؤلفة من مجموعة الكرات المفتوحة.

وهناك طريقة أخرى لتعريف الطوبولوجيا على فضاء وهي تتمثل في إدخال مفهوم التقارب على هذا الفضاء. لكن إذا استثنينا الفضاءات المترية وجدنا أن هذه الطريقة ليست مستحسنة دوماً لأن الإنتقال من مجموعة إلى ملاصقها لا يمكن أن نعبّر عليه في جميع الحالات بدلالة المتتاليات المتقاربة كما أشرنا لذلك ضمن الفقرة 4. بإستطاعتنا أن نجعل هذه الطريقة صالحة في جميع الأحوال شرط تعميم مفهوم تقارب متتالية نفسه تعميماً لائقاً (راجع، مثلاً، الفصل الثاني من [29]).

نستطيع إدخال طوبولوجيا في فضاء بتعريف عملية الملاصقة بطريقة تسليمية. نقول أننا عرّفنا في مجموعة X عملية الملاصقة إذا ألحقنا بكل $A \subset X$ مجموعة $[A] \subset X$، وتسمى $[A]$ ملاصق A، بحيث يكون الإنتقال من A إلى $[A]$ متمتعاً بالخاصيات (1) حتى (4) الواردة في نص النظرية 1، 2§. نعرّف فيما بعد المجموعات المغلقة على أنها المجموعات A المحققة للمساواة $[A] = A$. نرى عندئذٍ بأن صف هذه المجموعات يحقق بالفعل الشرطين (1) وَ (2) الخاصين بالمجموعات المغلقة في الفقرة الأولى من 5§، وبالتالي فهو يعرّف طوبولوجيا على X.

إن تعريف طوبولوجيا بواسطة تعيين مسافة من أهم طرق تعريف الطوبولوجيات إلا أنها بعيدة عن صفة الشمول، فقد رأينا مثلاً أن كل فضاء متري فضاء ناظمي يحقق مسلمة قابلية العد الأولى؛ ونلاحظ أن كل فضاء غير ناظمي وغير محقق لمسلمة قابلية العد الأولى لا يمكن أبداً أن نعرّف طوبولوجيته بواسطة مسافة.

تعريف. نقول عن فضاء طوبولوجي T أنه قابل لمسافة إذا تمكنا من تعريف طوبولوجيته بواسطة مسافة.

بالإستناد إلى ما ذكرناه سابقاً نرى أن شرط الناظمية ومسلمة قابلية العد الأولى شرطان ضروريان ليكون الفضاء المعتبر قابلاً لمسافة. نشير من جهة أخرى أن الشرطين السابقين مجتمعين لا يكفيان لقبول الفضاء مسافة. وبهذا الخصوص لدينا النظرية التالية لِـ ب. س أوريسون (P. S. Urysohn):

لكي يقبل فضاء طوبولوجي، له أساس قابل للعد، مسافة يلزم ويكفي أن يكون هذا الفضاء ناظمياً.

من الواضح أن هذا الشرط لازم. أما البرهان على كفايته فنجده مثلاً في [2].

§ 6. التراص

1. مفهوم التراص. تلعب النتيجة التالية في التحليل دوراً أساسياً وهي تعرف بتوطئة هاين - بوريل (Heine-Borel):

يمكن، من كل تغطية لقطعة $[a, b]$ للمستقيم العددي بواسطة مجالات مفتوحة، استخراج تغطية جزئية منتهية.

تبقى هذه النتيجة صحيحة عند تعويض المجالات المفتوحة بالمجموعات المفتوحة.

من كل تغطية مفتوحة للقطعة $[a, b]$ يمكن استخراج تغطية جزئية منتهية.

إنطلاقاً من هذه الخاصية الهامة التي تتمتع بها قطع المستقيم العددي، ندخل المفهوم الهام التالي:

تعريف. نقول عن فضاء طوبولوجي T أنه فضاء متراص إذا احتوت كل تغطية مفتوحة لِـT على تغطية جزئية منتهية.

المتراص هو تعريفاً فضاء طوبولوجي متراص يحقق مسلمة الفصل لهوسدورف.

سنرى، مستقبلاً، أن التراص خاصية تمتع بها زيادة على قطع المستقيم كل المجموعات الجزئية المغلقة والمحدودة من كل فضاء إقليدي بعده منته. في حين يمثل المستقيم والمستوى والفضاء ذي ثلاثة أبعاد أبسط الأمثلة للفضاءات غير المتراصة.

نقول عن جماعة أجزاء $\{A\}$ من مجموعة T أنها ممركزة إذا كان كل تقاطع منته $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ من مجموعات هذه الجماعة غير خالٍ. من تعريف الفضاءات المتراصة نستنتج، بفضل علاقات الثنوية، النظرية التالية:

نظرية 1. لكي يكون فضاء طوبولوجي T متراصاً يلزم ويكفي أن يحقق الشرط:

(R) كل جماعة ممركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في T تقبل تقاطعاً غير خالٍ.

لرؤية ذلك نعتبر جماعة $\{F_\alpha\}$ ممركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في T، وليكن T فضاءً متراصاً. إن المجموعات $G_\alpha = T\setminus F_\alpha$ مفتوحة ولما كان كل تقاطع منته $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ غير خالٍ فإننا نستطيع أن نستنتج بأنه لا توجد جماعة مجموعات $G_i = T\setminus F_i$ تغطي T بأكمله. لكن ذلك يؤدي (إستناداً إلى تراص T) إلى أن كل مجموعة كل الجزاء G_α لا يمكن أن تشكل تغطية لِـT، وهذا يعني أن $\cap F_\alpha \neq \Phi$. إذن فإن تراص T يجعل هذا الفضاء يحقق الخاصية (R).

بخصوص القضية العكسية، نفرض أن T يحقق الشرط (R) ولتكن $\{G_\alpha\}$ تغطية مفتوحة لِـT. بوضع $F_\alpha = T\setminus G_\alpha$ نحصل على $\cap F_\alpha = \Phi$ ومنه يأتي (إستناداً إلى الشرط (R)) أن الجماعة $\{F_\alpha\}$ لا يمكن أن تكون ممركزة. توجد إذن مجموعات $F_1, \ldots, F_n$ بحيث: $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \Phi$. عندئذٍ نلاحظ أن المجموعات المفتوحة $G_i = T\setminus F_i$ تشكل تغطية جزئية منتهية من التغطية $\{G_\alpha\}$. وبالتالي فإن الشرط (R) يكافئ تراص T.

نثبت فيما يلي بعض الخواص الهامة للفضاءات المتراصة .

نظرية 2. إذا كان T فضاءً متراصاً فإن كل مجموعة جزئية غير منتهية من T تقبل على الأقل نقطة تراكم .

البرهان . إذا إحتوت T مجموعة غير منتهية X لا تحوي نقاط تراكم فإنه يمكن استخراج مجموعة جزئية قابلة للعد : $X_1 = (x_1, x_2, ...)$ من X لا تحوي نقاط تراكم . عندئذٍ تشكل المجموعات $X_n = (x_n, x_{n+1}, ...)$ جماعة ممركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في T ، تقاطعها خالٍ ، وهذا يعني أن T غير متراص .

نظرية 3. كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء متراص ، فضاء متراص .

البرهان . لتكن F مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المتراص T ولتكن $\{F_\alpha\}$ جماعة ممركزة كيفية من المجموعات الجزئية المغلقة من الفضاء الجزئي $T \supset F$. لما كانت كل مجموعة F_α مغلقة في F مجموعة مغلقة أيضاً في T فإن $\{F_\alpha\}$ جماعة ممركزة مؤلفة من المجموعات الجزئية المغلقة في T . وبالتالي $\cap F_\alpha \neq \Phi$. نستنتج من ذلك تراص F بفضل النظرية 1 .

لما كان كل فضاء جزئي من فضاء هوسدورف هو نفسه فضاء لهوسدورف فإن :

نتيجة . كل مجموعة جزئية مغلقة من متراص هي نفسها متراصة .

نظرية 4. إن كل متراص مغلق في أي فضاء لِهوسدورف (يحوي هذا المتراص) .

البرهان . لتكن K مجموعة جزئية متراصة من فضاء لِهوسدورف T ، ولتكن $y \ni K$. عندئذٍ ، من أجل كل $x \ni K$ يوجد جوار U_x للنقطة x وجوار V_x للنقطة y بحيث :

$$U_x \cap V_x = \Phi$$

تشكل الجوارات U_x تغطية مفتوحة لِـ K . من تراص K نستنتج انه يمكن استخراج تغطية جزئية منتهية $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$ من هذه التغطية . نضع :

$$V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap ... V_{x_n}$$

إن V جوار للنقطة y وهو لا يلتقي بِـ $K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n}$ ومنه يأتي $y \notin [K]$ ، وهذا يعني أن K مغلق . بذلك يتم البرهان على النظرية .

تبين النظريتان 3 وَ 4 أن خاصية التراص في صف فضاءات هوسدورف خاصية «ذاتية» أي أن كل متراص يبقى متراصاً مهما كان فضاء هوسدورف الذي يحويه .

نظرية 5. كل متراص فضاء ناظمي .

البرهان. لتكن X وَ Y مجموعتين جزئيتين مغلقتين وغير متقاطعتين من متراص K . بتطبيق إستدلالات برهان النظرية السابقة ندرك بسهولة أنه ، من أجل كل نقطة $y \in Y$ ، يوجد جوار U_y لِـ y ومجموعة مفتوحة $X \subset O_y$ بحيث $U_y \cap O_y = \Phi$. ومنه ينتج أن كل متراص فضاء نظامي . نفرض الآن أن y يرسم كل المجموعة y . نعتبر تغطية جزئية منتهية $U_{y_1}, ..., U_{y_n}$ من التغطية $\{U_y\}$ للمجموعة Y . تحقق المجموعتان المفتوحتان :

$$O^{(1)} = O_{y_1} \cap ... \cap O_{y_n}$$

$$O^{(2)} = U_{y_1} \cup ... \cup U_{y_n}$$

الشروط : $O^{(1)} \supset X$ وَ $O^{(2)} \supset Y$ وَ $O^{(1)} \cap O^{(2)} = \Phi$ ، ومنه ينتج أن K ناظمي .

2. التطبيقات المستمرة في الفضاءات المتراصة.

تمتع كل التطبيقات المستمرة في الفضاءات المتراصة (وخاصة في المتراصات) بخواص هامة ومفيدة.

نظرية 6. إن صورة فضاء متراص بواسطة تطبيق مستمر فضاء متراص.

البرهان. ليكن X فضاءً متراصاً و f تطبيقاً مستمراً من X في فضاء طوبولوجي Y . نعتبر تغطية كيفية $\{V_\alpha\}$ لصورته $f(X)$ بواسطة مجموعات مفتوحة في $f(X)$. نضع $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. إن المجموعات U_α مفتوحة (بصفتها صوراً عكسية لمجموعات مفتوحة بواسطة تطبيق مستمر) وتشكل تغطية للفضاء X . من تراص X نستنتج إمكانية استخراج تغطية جزئية منتهية $U_1, U_2, ..., U_n$ من التغطية السابقة. ومنه يتضح أن المجموعات: $V_1, V_2, ..., V_n$ حيث $V_i = f(U_i)$ ، تغطي الصورة $f(X)$ من الفضاء X .

نظرية 7. كل تطبيق تقابلي ومستمر φ من متراص X على فضاء لهوسدورف Y تطبيق هوميومورفي.

البرهان. يكفي أن نثبت بأن شروط النظرية تستلزم استمرار التطبيق العكسي φ^{-1} . لتكن F مجموعة مغلقة في X وَ $P = \varphi(F)$ صورتها في Y .

بالإستناد إلى النظرية السابقة يتضح أن P متراص وبالتالي فإن P مغلق في Y . إذن فإن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة $F \subset X$ بواسطة التطبيق φ^{-1} مغلقة. ومنه يأتي استمرار التطبيق φ^{-1} .

3. التوابع المستمرة ونصف المستمرة المعرّفة على فضاء متراص.

تطرقنا في الفقرة السابقة إلى التطبيقات المستمرة من متراص في فضاء لِهوسدورف. هناك حالة خاصة للتطبيقات من هذا النوع وهي التطبيقات من متراص في المستقيم العددي، أي التوابع العددية المعرّفة على متراص. تتمتع هذه التوابع بالخواص الرئيسية للتوابع المعرّفة على قطعة مستقيم المعروفة في دروس التحليل.

نظرية 8. ليكن T فضاءً متراصاً و f تابعاً مستمراً على T . إن f محدود على T ويبلغ فيها حده الأعلى وحده الأدنى.

البرهان. القول بأن f تابع مستمر على T يعني أنه تطبيق مستمر من T في المستقيم العددي $\mathbf{R}^1$. من النظرية العامة 6 يأتي أن صورة T في $\mathbf{R}^1$ مجموعة متراصة. ثم من دروس التحليل (راجع الفقرة 2، 7§) نعلم أن كل مجموعة جزئية متراصة من المستقيم العددي مغلقة ومحدودة.

إن مثل هذه المجموعة تقبل حداً أعلى وحداً أدنى ينتميان اليها. بذلك ينتهي البرهان.

تمرين. ليكن K فضاءً مترياً متراصاً و A تطبيقاً من K في نفسه بحيث $\varrho(Ax, Ay) < \varrho(x, y)$ من أجل $x \neq y$. أثبت أن التطبيق A يقبل في K نقطة ثابتة وأن هذه النقطة وحيدة.

تقبل النتيجة النظرية السابقة تعميماً يجعلها تشمل صنف أكبر من التوابع تسمى التوابع نصف المستمرة.

نقول عن تابع $f(x)$ أنه نصف مستمر من الأدنى (من الأعلى على التوالي) عند نقطة x_0، إذا استطعنا من أجل كل $\varepsilon > 0$ إيجاد جوار U لـx_0 بحيث إذا كان $x \in U$ فإن $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ ($f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ على التوالي).

على سبيل المثال فإن التابع «الجزء الصحيح لِـx» $f(x) = E(x)$ نصف مستمر من الأعلى. عندما نكبّر (أو نصغّر) القيمة $f(x_0)$ لتابع مستمر عند نقطة كيفية x_0 نحصل على تابع نصف مستمر من الأعلى (أو من الأدنى). إذا كان التابع $f(x)$ نصف مستمر من الأعلى فإن التابع $-f(x)$ نصف مستمر من الأدنى.

يتضح من هاتين الملاحظتين أن هناك إمكانية إنشاء عدد كبير من الأمثلة لتوابع نصف مستمرة.

لدراسة خواص نصف - استمرار التوابع الحقيقية، من اللائق أن نصطلح على أنها تستطيع أخذ قيم غير منتهية. إذا كان $f(x_0) = -\infty$ نعتبر أن التابع نصف مستمر من الأدنى عند النقطة x_0، إذا تمكنا، زيادة على ذلك، من أجل كل $h > 0$ من إيجاد جوار U لِـx_0 بحيث: $f(x) < -h$ مهما كان $x \in U$، نقول أيضاً أن f نصف مستمر من الأعلى عند النقطة x_0.

إذا كان $f(x_0) = +\infty$ نعتبر التابع f نصف مستمر من الأعلى عند النقطة x_0 ؛ إذا تمكنا ، إضافة إلى ذلك ، من أجل كل $h > 0$ من إيجاد جوار U لِـ x_0 بحيث $f(x) > h$ مهما كان $x \in U$ نقول أيضاً أن هذا التابع نصف مستمر من الأدنى عند النقطة x_0 .

ليكن $f(x)$ تابعاً حقيقياً معرّفاً على فضاء متري R . النهاية العليا $\bar{f}(x_0)$ للتابع $f(x)$ عند النقطة x_0 هي تعريفاً الكمية (المنتهية أو غير المنتهية) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} [\sup\limits_{x \in B(x_0, \varepsilon)} f(x)]$. نعرّف النهاية الدنيا $\underline{f}(x_0)$ بطريقة مماثلة وذلك بتعويض الحد الأعلى بالحد الأدنى . يسمى الفرق $\omega f(x_0) = \bar{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$ (عندما يكون له معنى ، أي إذا لم يكن $\bar{f}(x_0)$ وَ $\underline{f}(x_0)$ غير منتهيين ومن نفس الإشارة) تذبذب التابع $f(x)$ عند النقطة x_0 . من السهل أن نرى بأن إستمرار التابع $f(x)$ عند النقطة x_0 يكافئ $\omega f(x_0) = 0$ ، أي أن :

$$-\infty < \underline{f}(x_0) = \bar{f}(x_0) < \infty .$$

من أجل كل تابع $f(x)$ معرّف على فضاء متري ، فإن التابع $\bar{f}(x)$ نصف مستمر من الأعلى والتابع $\underline{f}(x)$ نصف مستمر من الأدنى . ينتج ذلك مباشرة من تعريف النهاية العليا والنهاية الدنيا .

نعتبر الفضاء المتري M المؤلف من التوابع الحقيقية المحدودة $x = \varphi(t)$ المعرّفة على القطعة المستقيمة $[a, b]$ ، وأما مسافته فهي معرّفة بالمساواة :

$$\varrho(x, y) = \varrho(\varphi, \psi) = \sup_{a \le t \le b} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

تسمى التوابع المعرّفة على M ، كما جرت العادة ، تابعيات وذلك للتمييز بينها وبين التوابع $\varphi(t)$ التي تمثل عناصر M .

لنعتبر مثالاً هاماً لتابعية (أو تابعي) نصف مستمرة .

دعنا نسمي طول المنحنى $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ التابعية

$$L_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

حيث أخذنا الحد الأعلى (الذي يمكن أن يساوي ∞+) على مجموعة كل التقسيمات الممكنة للمجال $[a, b]$. إن هذه التابعية معرّفة على كل الفضاء M. إذا تعلق الأمر بتوابع مستمرة فإن هذه التابعية تصبح مساوية لقيمة النهاية :

$$\lim_{\max|x_i - x_{i-1}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

أخيراً إذا تعلق الأمر بتوابع قابلة للاشتقاق باستمرار نستطيع أن نكتب هذه التابعية على الشكل :

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

إن التابعية $L_a^b(f)$ نصف مستمرة من الأدنى في M، وهذا ناتج مباشرة من تعريف التابعية نفسها.

تشمل النظرية 9 التي أثبتناها سابقاً التوابع المستمرة.

نظرية 8 a. كل تابع منته ونصف مستمر من الأدنى (من الأعلى على التوالي) على T_1 - فضاء متراص T تابع محدود من الأدنى (من الأعلى على التوالي) على T.

لرؤية ذلك نفرض أن : $\text{Inf} f(x) = -\infty$. توجد في هذه الحالة متتالية $\{x_n\}$ بحيث $f(x_n) < -n$. لما كان الفضاء T متراصاً فإن مجموعته الجزئية غير المنتهية $\{x_n\}$ تقبل (حسب النظرية 2) على الأقل نقطة تراكم x_0. بما أن التابع f منته ونصف مستمر من الأدنى فرضاً، يوجد جوار U لِـ x_0 بحيث : $f(x) > f(x_0) - 1$ عندما $x \in U$. لكن الجوار U في هذه الحالة لا يمكن أن يحوي سوى عدد منته من نقاط المجموعة $\{x_n\}$، وهذا يتناقض مع كون x_0 نقطة تراكم لهذه المجموعة.

فيما يخص حالة تابع نصف مستمر من الأعلى فإن البرهان مماثل للسابق.

نظرية 8 b. كل تابع منته ونصف مستمر من الأدنى (من الأعلى على

التوالي) على T_1 – فضاء متراص T، تابع يبلغ على T حده الأدنى (الأعلى على التوالي).

ليكن $f(x)$ تابعاً نصف مستمر من الأدنى. من النظرية 8 a يأتي أنه يقبل حداً أدنى منتهياً وأنه توجد في T متتالية $\{x_n\}$ بحيث:

$$f(x_n) \leq \text{Inf}\, f(x) + \frac{1}{n}\ .$$

لما كان الفضاء T متراصاً فإن المجموعة $\{x_n\}$ تقبل نقطة تراكم x_0. لا يمكن أن نجد: $f(x_0) > \text{Inf}\, f$ لأن نصف إستمرار f من الأدنى يؤدي عندئذٍ إلى وجود جوار U للنقطة x_0 وعدد $0 < \delta$ بحيث $f(x) > \text{Inf}\, f + \delta$ من أجل كل $x \in U$. لكن مثل هذا الجوار U لا يمكن أن يحتوي على مجموعة جزئية منتهية من $\{x_n\}$. إذن: $f(x_0) = \text{Inf}\, f$ وهو المطلوب.

4. التراص القابل للعد (أو العدودي)

ندخل المفهوم التالي:

تعريف. نقول عن فضاء T أنه متراص عدودياً إذا قبلت كل مجموعة جزئية غير منتهية من T نقطة تراكم على الأقل.

من النظرية 2 المثبتة في الفقرة 1، ينتج أن كل فضاء متراص فضاء متراص عدودياً. أما القضية العكسية فهي غير صحيحة عموماً. نسوق الآن مثالاً «تقليدياً» لفضاء متراص عدودياً وغير متراص. نعتبر المجموعة X لكل الأعداد الترتيبية α الأصغر من أول عدد ترتيبي غير قابل للعد ω_1. نسمي مجالاً (α, β) في X مجموعة كل الأعداد الترتيبية γ المحققة لـ $\alpha < \gamma < \beta$.

نسمي مجالاً مفتوحاً في X كل إتحاد مجالات. من السهل أن نتأكد بأن الفضاء المحصل عليه متراص عدودياً، لكنه غير متراص.

توضح النظرية التالية الصلة بين مفهوم التراص ومفهوم التراص العدودي (أو القابل للعد).

نظرية 9. لكي يكون فضاء طوبولوجي T متراصاً عدودياً يلزم ويكفي أن يتحقق أحد الشرطين:

1) تحتوي كل تغطية مفتوحة قابلة للعد للفضاء T على تغطية جزئية منتهية.

2) تقبل كل جماعة ممركزة وقابلة للعد من المجموعات المغلقة في T تقاطعاً غير خالٍ.

البرهان. إن تكافؤ الشرطين (1) وَ (2) نتيجة مباشرة من علاقات الثنوية. إذا لم يكن الفضاء T متراصاً عدودياً نستطيع الرجوع إلى إستدلال برهان النظرية 2 لنرى بسهولة أنه توجد في T جماعة ممركزة قابلة للعد من المجموعات المغلقة تقاطعها خالٍ. هذا يثبت أن الشرط (2) (وبالتالي الشرط (1)) كافٍ. لنثبت الآن أن الشرط (2) ضروري. نفرض أن الفضاء T متراص عدودياً ولتكن $\{F_n\}$ جماعة ممركزة قابلة للعد من المجموعات المغلقة في T.

علينا أن نثبت بأن $\bigcap_n F_n \neq \phi$. نضع:

$$\Phi_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$$

من الواضح أن كل المجموعات Φ_n مغلقة وغير خالية (لأن الجماعة $\{F_n\}$ ممركزة) وتشكل متتالية غير متزايدة (متناقصة):

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots$$

وأن:

$$\bigcap_n \Phi_n = \bigcap_n F_n$$

هناك إحتمالان:

1) لدينا:

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \dots$$

ابتداء من مرتبة n_0. يتبين في هذه الحالة أن $\bigcap_n \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \phi$.

2) يوجد من بين Φ_n عدد غير منته من المجموعات غير المتقاطعة مثنى مثنى. يكفي أن نعتبر الحالة التي تكون فيها كل المجموعات Φ_n مختلفة مثنى مثنى. ليكن x_n عنصراً من $\Phi_n \setminus \Phi_{n+1}$.

تشكل المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة غير منتهية من النقاط المختلفة المنتمية إلى T؛ من خاصية التراص العدودي التي يتمتع بها T ينتج أن $\{x_n\}$ تقبل نقطة تراكم على الأقل، نرمز لهذه النقطة بـx_0. لكن، لما كان Φ_n يحوي كل النقاط $x_n, x_{n+1}, \ldots$ فإن x_0 نقطة تراكم لـ Φ_n أيضاً، ثم إن Φ_n مغلق وَ $x_0 \in \Phi_n$. وبالتالي: $x_0 \in \bigcap\limits_n \Phi_n$ أي أن $\bigcap\limits_n \Phi_n \neq \phi$.

وهكذا يتضح أن الفضاءات المتراصة مثل الفضاءات المتراصة عدودياً تتميز بـ «سلوك» تغطياتها المفتوحة. والملاحظ في كلتا الحالتين أن من تغطية مفتوحة يمكن إستخراج تغطية منتهية، لكن التغطية في الحالة الأولى تغطية كيفية، أما في الحالة الثانية فيجب أن تكون قابلة للعد.

على الرغم من أن التراص العدودي لا يؤدي عموماً إلى التراص، فإن لدينا النظرية التالية:

نظرية 10. في حالة الفضاءات ذات الأساس القابل للعد هناك تطابق بين مفهوم التراص ومفهوم التراص العدودي.

ذلك أنه مهما كانت التغطية المفتوحة لفضاء T ذي أساس قابل للعد، يمكن استخراج تغطية جزئية قابلة للعد (راجع النظرية 5، 5§). إذا كان T، إضافة إلى ذلك، متراصاً عدودياً نستطيع من التغطية الأخيرة استخراج تغطية جزئية منتهية بالاستناد إلى النظرية السابقة. ومنه يأتي أن الفضاء T متراص.

ملاحظة. تبين، في الحقيقة، أن مفهوم التراص العدودي لفضاء طوبولوجي مفهوم ليس جد طبيعي ولم ينجح مثلما نجح مفهوم التراص. والواقع أن هذا المفهوم قد ظهر «عفوياً». ويرجع ذلك إلى كون الفضاءات المترية (كما هو الحال بالنسبة للفضاءات ذات الأساس القابل للعد) تجعل هذين المفهومين متطابقين (سنبرهن على ذلك في البند الموالي). من جهة أخرى كان مفهوم

التراص قد أدخل في البداية، بالنسبة للفضاءات المترية، للتعبير عن الخاصية القائلة أن كل مجموعة جزئية غير منتهية من مثل هذا الفضاء تقبل نقطة تراكم، وذلك هو حال مفهوم التراص العدودي. إن التوسيع «التلقائي» لهذا التعريف من حالة الفضاء المتري إلى حالة فضاء طوبولوجي، هو الذي أدى إلى بروز مفهوم الفضاء الطوبولوجي المتراص عدودياً. نجد في المؤلفات الرياضية، وخاصة غير الحديثة منها، لفظ «التراص» يقصد به عادة «التراص العدودي» أما الفضاءات الطوبولوجية، المتراصة طبقاً لمفهومنا هنا، أي الفضاءات التي تحتوي كل تغطية مفتوحة لها على تغطية منتهية فتسمى في تلك المؤلفات الفضاءات «المتراصة ثنوياً» كما تسمى الفضاءات المتراصة لهوسدورف (أي المتراصات) «المتراصات ثنوياً»، حيث يخصص مصطلح «متراص» لفضاء متري متراص. نستعمل هنا المصطلحين الواردين أعلاه (التراص والتراص العدودي)؛ وبالإضافة إلى ذلك سنسمي الفضاءات المترية المتراصة، متراصات أيضاً، أو «متراصات مترية» إذا وجبت الإشارة إلى وجود مسافة.

5. المجموعات شبه المتراصة

إذا كانت مجموعة M محتواة في فضاء لِهوسدورف T غير مغلقة في T فإن M لا يمكن أن تكون متراصة. فمثلاً ليس هناك مجموعة جزئية غير مغلقة في المستقيم العددي ومتراصة في نفس الوقت. ورغم ذلك من المحتمل أن يكون الملاصق $[M]$ لمثل هذه المجموعة M في T متمتعاً بخاصية التراص. ذلك هو حال كل مجموعة جزئية محدودة في المستقيم العددي أو في فضاء ذي n بعداً. وهكذا نصل إلى التعريف الموالي:

تعريف. نقول عن مجموعة M محتواة في فضاء طوبولوجي T إنها شبه متراصة (أو متراصة بالنسبة لِـT) إذا كان ملاصقها في T متراصاً. كما نقول عن مجموعة M إنها شبه متراصة عدودياً في T إذا كانت كل مجموعة جزئية غير منتهية $A \subset M$ تقبل على الأقل نقطة تراكم (تنتمي أو لا تنتمي إلى M).

إن مفهوم شبه التراص (على العكس من مفهوم التراص) مرتبط بشكل واضح بالفضاء T الذي نضع فيه المجموعة المعطاة. إن مجموعة الأعداد الناطقة مثلاً، المنتمية للمجال $(0, 1)$ شبه متراصة، إذا اعتبرناها مجموعة

جزئية من المستقيم العددي ، لـكنها ليست شبه متراصة إذا اعتبرناها مجموعة جزئية من فضـاء الأعداد الناطقة.

إن مفهوم شبه التراص ذو أهمية كبرى في حالة الفضـاءات المترية التي سنتعرض لها في البند الموالي.

7§. التراص في الفضـاءات المترية

1. المجموعات المحدودة كلية

لما كانت الفضـاءات المترية حالة خاصة من الفضـاءات الطوبولوجية فإن كافة التعاريف والنتائج المعروضة في البند السـابق قائمة في الفضـاءات المترية. نشير بخصوص الفضـاءات المترية إلى أن مفهوم التراص مرتبط ارتباطاً قوياً بمفهوم المجموعة المحدودة كلية والذي ندخله فيما يلي :

لتكن M مجموعة كيفية من فضـاء متري R ، وليكن ε عدداً موجباً كيفياً. نقول عن المجموعة $A \subset R$ انها ε - شبكة في M إذا استطعنا من أجل كل نقطة $x \in M$ ، إيجاد نقطة $a \in A$ ، على الأقل، تحقق $\varrho(x, a) \leq \varepsilon$. (ليس من الضروري أن تكون المجموعة A محتواة في M ، بل يمكن لها ألّا تلتقي بـM ؛ ومع ذلك إذا وجدت ε - شبكة A في M فإنه يمكن إنشـاء 2ε -شبكة $B \subset M$).

فمثلاً نلاحظ أن نقاط المستوى التي لها إحداثيات صحيحة تشكل $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - شبكة لهذا المستوى. نقول عن مجموعة M إنها محدودة كلية إذا استطعنا ، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد ε - شبكة منتهية في M .

من الواضح أن كل مجموعة محدودة كلية مجموعة محدودة (محتواة في كرة) ، بصفتها اتحاداً منتهياً لمجموعات محدودة. إن القضية العكسية غير صحيحة عموماً ، كما يبين ذلك المثال 2 التالي.

من المفيد عادة أن نضع نصب أعيننا الملاحظة البديهية التالية : إذا كانت مجموعة M محدودة كلية فإن ملاصقها محدود أيضاً كلية .

من تعريف مجموعة محدودة كلية ينتج مباشرة أنه إذا كان الفضاء المتري R نفسه محدوداً كلية فإنه يقبل الفصل . لرؤية ذلك ننشئ في R $\frac{1}{n}$ – شبكة من أجل كل قيمة لِـ n . إن إتحاد هذه الـ $\frac{1}{n}$ – شبكة ، من أجل كل قيم n ، مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان في R . لما كان كل فضاء متري قابل للفصل ، يقبل أساساً قابلاً للعد (راجع النظرية 4 ، § 5) ينتج أن كل فضاء متري محدود كلية يقبل أساساً قابلاً للعد .

مثال 1. إن القول في فضاء إقليدي ذي n بعداً بأن مجموعة محدودة كلية يكافئ القول أنه محدود ، أي أنه يمكن وضع هذه المجموعة في مكعب كبير بكفاية . ذلك أننا إذا جزأنا هذا المكعب إلى مكعبات صغيرة طول أضلاعها ε فإن رؤوس هذه المكعبات تشكل $\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{2}$ – شبكة منتهية من أجل المكعب الأول ، وبالتالي ، من أجل كل مجموعة تقع داخل هذا المكعب .

مثال 2. يمثل سطح الكرة S التي نصف قطرها 1 مجموعة محدودة في الفضاء l_2 ، لكنها ليست محدودة كلية . لرؤية ذلك نعتبر في S النقاط :

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots 1, 0, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

إن المسافة التي تفصل كل نقطتين e_n وَ e_m $(m \neq n)$ من هذه النقاط تساوي $\sqrt{2}$. يثبت ذلك أنه لايوجد في S أية ε – شبكة من أجل $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

مثال 3. نعتبر في l_2 المجموعة π المؤلفة من النقاط :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

التي تحقق الشروط :

$$|x_1| \leq 1, \ |x_2| \leq \frac{1}{2}, \ldots, |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

تسمى هذه المجموعة متوازى السطوح الأساسي (أو «البلاطة الهيلبيرتية») للفضاء l_2 . وهو يقدّم كمثال لمجموعة بعدها غير منته ومحدودة كلية . للبرهان على أنها محدودة كلية نتبع الطريقة التالية :

لتكن $\varepsilon > 0$. نختار n بحيث $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. نلحق بكل نقطة :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \tag{1}$$

من π نقطة :

$$x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \tag{2}$$

من نفس المجموعة π . عندئذٍ يأتي :

$$\varrho(x, x^*) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

إن المجموعة π^* المؤلفة من النقاط من الشكل (2) المنتمية إلى π مجموعة محدودة كلية (بصفتها مجموعة محدودة في فضاء ذي n بعداً) . نختار في Π^* $\frac{\varepsilon}{2}$ – شبكة منتهية . من الواضح أن هذه الشبكة هي أيضاً ε – شبكة للمجموعة π .

2. الفضاءات المحدودة كلية والتراص

نظرية 1. إذا كان الفضاء المتري R متراصاً عدودياً فإنه فضاء محدود كلية .

البرهان . نفرض أن الفضاء R غير محدود كلية . هذا يعني أننا نستطيع ، من أجل عدد $\varepsilon_0 > 0$ ، إيجاد ε_0 – شبكة منتهية في R . لتكن a_1 نقطة كيفية في R . توجد على الأقل نقطة في R ، نرمز لها بـ a_2 ، تحقق $\varrho(a_1, a_2) > \varepsilon_0$ (وإلاّ فإن النقطة a_1 تشكل ε_0 – شبكة من R) . بنفس الطريقة يمكن أن نجد في R نقطة a_3 بحيث : $\varrho(a_1, a_3) > \varepsilon_0$ وَ $\varrho(a_2, a_3) > \varepsilon_0$ ؛ ولو لم يكن الأمر

كذلك لـكانت ثنائية النقطتين a_1 ، a_2 ε_0 – شبكة من R . إذا كانت النقاط $a_1, ..., a_k$ مثبتة نختار نقطة $a_{k+1} \in R$ بحيث :

$$\varrho(a_i , a_{k+1}) > \varepsilon_0 \quad , \forall i = 1, 2, ..., k$$

نحصل بهذه الـكيفية على متتالية غير منتهية $a_1, a_2, ...$ ليست لها أية نقطة تراكم ، وذلك لأن : $\varrho(a_i , a_j) > \varepsilon_0$ من أجل $i \neq j$. لكن الفضـاء R لايصبح فضـاءً متراصـاً عدودياً في هذه الحالة . إنتهى البرهان .

وهكذا بينا ، بالنسبة للفضـاءات المترية ، أن التراص العدودي يستلزم خاصية الحد كلية التي تستلزم بدورها وجود أسـاس قابل للعد .

من النظرية 10 ، §6 نستنتج ما يلي :

نتيجة . كل فضـاء متري متراص عدودياً فضـاء متراص .

كنا برهنا على لزوم توفر خاصية الحد كلية في فضـاء متري حتى يكون متراصـاً . إن هذا الشرط غير كافٍ ؛ نلاحظ مثلاً أن مجموعة النقاط الناطقة في قطعة المستقيم [0, 1] المزودة بالمسـافة المعتادة فضـاء محدود كلية ، لـكنه غير متراص : متتالية النقاط :

$$0 ; \; 0,4 ; \; 0,41 ; \; 0,414 ; \; 0,4142 ; \; ...,$$

المنتمية لهذا الفضـاء ، أي متتالية القيم العشرية التقريبية بقيم أصغر للعدد : $\sqrt{2} - 1$ ، متتالية ليست لها نقطة تراكم في هذا الفضـاء . لدينا رغم ذلك النظرية التالية :

نظرية 2. لكي يكون فضـاء متري R متراصـاً يلزم ويكفي أن يكون في آن واحد :

1) محدوداً كلية .

2) تاماً .

البرهان . برهنا سـابقاً على ضرورة الشرط (1) . أما ضرورة الشرط (2) فهي

بديهية، ذلك أنه إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية لـكوشي غير متقاربة في R فلا يمكن أن تكون لها في R نقطة تراكم.

لنثبت الآن أنه إذا كان الفضـاء R محدوداً كلية وتاماً فإنه متراص. بفضل نتيجة النظرية 1، يكفي من أجل ذلك أن نبرهن على أن R متراص عدودياً، أي أن كل متتالية $\{x_n\}$ من نقاط R تقبل على الأقل نقطة تراكم.

نحيط كل نقطة تنتمي إلى 1 ـ شبكة في R بكرة مغلقة نصف قطرها 1. لما كان عدد هذه الـكرات منتهياً وهذه الـكرات تغطي كل الفضـاء R فإن هناك واحدة منها على الأقل، نرمز لها بـ B_1، تحوي متتالية جزئية غير منتهية $x_1^{(1)}, ..., x_n^{(1)}, ...$ من المتتالية $\{x_n\}$. نختار بعد ذلك في B_1 $1/2$ ـ شبكة ونحيط كل نقطة منها بكرة مغلقة نصف قطرها $\frac{1}{2}$. هناك على الأقل كرة من هذه الـكرات نرمز لها بـ B_2، تحوي متتالية جزئية غير منتهية $x_1^{(2)}, ..., x_n^{(2)}, ...$ من المتتالية $\{x_n^{(1)}\}$. بنفس الطريقة نجد متتالية جزئية غير منتهية ثالثة $x_1^{(3)}, ..., x_n^{(3)}, ...$ من $\{x_n^{(2)}\}$، الخ.

نعتبر الآن مع كل كرة B_n كرة مغلقة A_n لها نفس المركز ونصف قطر A_n أكبر مرتين من نصف قطر B_n. ندرك حينئذٍ أن الـكرات A_n متداخلة. بما أن الفضـاء R تام فإن التقاطع $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ غير خالٍ ويحوي نقطة وحيدة x_0.

إن هذه النقطة نقطة تراكم للمتتالية الأولى $\{x_n\}$ لأن كل جوار لـ x_0 يحوي كرة B_k، وبالتالي، متتالية جزئية غير منتهية $\{x_n^{(k)}\}$ من المتتالية $\{x_n\}$.

3. المجموعات شبه المتراصة في فضـاء متري

إن مفهوم شبه التراص الذي أدخل في البند السـابق بالنسبة للمجموعات الجزئية من فضـاء طوبولوجي كيفي قائم بصفة خاصة بالنسبة للمجموعات الجزئية من فضـاء متري. بالإضـافة إلى ذلك، يتضح في حالة الفضـاءات المترية أن هناك تطابقاً بين مفهوم شبه التراص ومفهوم شبه التراص العدودي. يجدر بنا أن نشير إلى القضية البسيطة والهـامة التالية.

نظرية 3. لكي تكون مجموعة M محتواة في فضـاء متري تام R شبه متراصة يلزم ويكفي أن تكون هذه المجموعة محدودة كلية.

يأتي ذلك مباشرة من النظرية (2) ومن كون كل مجموعة جزئية مغلقة في فضـاء متري مجموعة تامة.

تكمن أهمية هذه النظرية في سهولة البرهان على أن مجموعة معطاة محدودة كلية بالمقارنة مع البرهان المباشر على أنها شبه متراصة، وهذا في أغلب الحالات. ومع ذلك إذا تعلق الأمر بالتطبيقات في التحليل الرياضي فإن شبه التراص أهم عادة من الحد الكلي.

4. نظرية آرزيلا (Arzelà)

إن مسـألة معرفة ما إذا كانت مجموعة ما في فضـاء متري مجموعة متراصة أم لا ليست نادرة في التحليل. من جهة أخرى إذا حاولنا تطبيق النظرية 2 فإن هناك عراقيل تواجهنا في ذلك. ولذا من المفيد بالنسبة للمجموعات المحتوية في فضـاءات ملموسة أن نبحث عن معايير خاصة وعملية نحدد بها التراص (أو شبه التراص).

إذا كان الفضـاء المعتبر إقليدياً بعده n فإن القول بأن مجموعة شبه متراصة يكافئ، كما رأينا سـابقاً، القول أنها مجموعة محدودة. لكن هذه النتيجة خاطئة عموماً في الفضـاءات المترية الأخرى.

من أهم الفضـاءات المترية المستخدمة في التحليل هو الفضـاء $C[a, b]$. هناك مقياس هام وكثير الإستعمال لمعرفة ما إذا كانت مجموعة جزئية من $C[a, b]$ شبه متراصة أم لا، وهو يكمن في نظرية آرزيلا.

لصياغة هذه النظرية لا بد من تقديم المفهومين التاليين.

نقول عن جماعة Φ من التوابع φ المعرّفة على قطعة المستقيم $[a, b]$ أنها محدودة بإنتظام إذا وجد عدد K بحيث:

$$|\varphi(x)| < K$$

وذلك من أجل كل $x \in [a, b]$ وكل تابع $\varphi \in \Phi$.

نقول عن جماعة $\Phi = \{\varphi\}$ إنها متساوية الإستمرار إذا استطعنا من أجل كل $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد $\delta > 0$ بحيث:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

وذلك من أجل كل نقطتين x_1 وَ x_2 من $[a, b]$ تحققان: $\varrho(x_1, x_2) < \delta$ ومن أجل كل تابع $\varphi \in \Phi$.

نظرية 4 (أرزيلا). لكي تكون جماعة Φ من التوابع المستمرة المعرّفة على قطعة المستقيم $[a, b]$ شبه متراصة في $C[a, b]$ يلزم ويكفي أن تكون هذه الجماعة محدودة بانتظام ومتساوية الاستمرار.

البرهان. الشرط لازم. نفرض أن الجماعة Φ شبه متراصة في $C[a, b]$. حينئذٍ ينتج من النظرية السابقة، من أجل كل $\varepsilon > 0$، وجود $\frac{\varepsilon}{3}$ - شبكة منتهية $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ من الجماعة Φ. أن كل تابع φ_i من هذه التوابع محدود بصفته تابعاً مستمراً على القطعة المستقيمة $[a, b]$:

$$|\varphi_i(x)| \leq K_i$$

نضع $K = \max K_i + \frac{\varepsilon}{3}$. من تعريف الـ $\frac{\varepsilon}{3}$ - شبكة يأتي من أجل كل $\varphi \in \Phi$، وجود تابع φ_i على الأقل بحيث:

$$\varrho(\varphi, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

وبالتالي:

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K$$

وبالتالي فإن الجماعة Φ محدودة بانتظام.

من جهة أخرى نلاحظ أن كل تابع φ_i من الـ $\frac{\varepsilon}{3}$ - شبكة تابع مستمر على القطعة $[a, b]$ وعليه فهو مستمر بانتظام على هذه القطعة. إذن من أجل كل $\frac{\varepsilon}{3}$ يوجد δ_i بحيث:

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

في حالة: $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

نضع $\delta = \min \delta_i$. وليكن φ كيفياً تابعاً من الجماعة Φ . نلحق بهذا التابع تابعاً φ_i يحقق $\varrho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. عندئذٍ، من أجل $|x_1 - x_2| < \delta$ لدينا :

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + \\ + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ومنه يأتي الإستمرار المتساوي للجماعة Φ .

الشرط كافٍ . لتكن Φ جماعة توابع محددة بانتظام ومتساوية الإستمرار . إذا استندنا إلى النظرية 3 وجدنا أن لإثبات شبه تراص هذه الجماعة في $C[a, b]$ يكفي أن نثبت، من أجل كل $\varepsilon > 0$، وجود ε – شبكة منتهية في $C[a, b]$. ليكن :

$$|\varphi(x)| \leq K$$

من أجل كل التوابع $\varphi \in \Phi$، وليكن $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$$

من أجل $|x_1 - x_2| < \delta$ ومن أجل كل $\varphi \in \Phi$. نقسم القطعة $[a, b]$ من المحور x بواسطة النقاط $x_0 = a_1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ إلى مجالات أطوالها أصغر من δ ونرسم عبر هذه النقاط مستقيمات شاقولية . نقسم بعد ذلك القطعة $[-K, K]$ من المحور y بواسطة النقاط :

$$y_0 = -K < y_1 < y_2 < \dots < y_m = K$$

إلى مجالات أطوالها أصغر من $\frac{\varepsilon}{5}$ ونرسم عبر هذه النقاط مستقيمات أفقية . وهكذا يصبح المستطيل : $a \leq x \leq b$ ، $-K \leq y \leq K$ – منقسمًا إلى مستطيلات صغيرة أطوال أضلاعها الأفقية أصغر من δ واطوال أضلاعها الشاقولية أصغر من $\frac{\varepsilon}{5}$. نلحق بكل تابع $\varphi \in \Phi$ خطاً منكسراً $\psi(x)$ رؤوسه هي النقاط (x_k, y_l) أي عُقَدُ الشبكة المشيدة، بحيث يكون $|\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{5}$ من أجل $x = x_k$ (إن وجود مثل هذا الخط المنكسر أمر بديهي) .

لما كان :

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$|\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

(وذلك حسب الإنشاء السابق) فإن :

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

لما كان التابع $\psi(x)$ خطياً بين النقطتين x_k وَ x_{k+1} فإن :

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

وهذا من أجل كل $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

نعتبر الآن نقطة x كيفية من القطعة $[a, b]$ وَ x_k النقطة من $x_0, x_1, ..., x_n$ الأكثر قرباً من x من جهة اليسار . لدينا عندئذٍ :

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leq \varepsilon$$

وبالتالي فإن الخطوط المنكسرة $\psi(x)$ تشكل ε – شبكة في Φ . من الواضح أن عددها منته . ومنه يأتي أن الجماعة Φ محدودة كلية . وبذلك ينتهي البرهان .

5. نظرية بيانو (Péano). لنبين كيف يمكن تطبيق نظرية آرزيلا باعتبار مثلاً نظرية الوجود التالية الخاصة بالمعادلات التفاضلية العادية ذات الطرف الثاني المستمر .

نظرية 5 (بيانو) . لتكن المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3)$$

إذا كان التابع f مستمراً في ساحة محدودة ومغلقة G فإننا نستطيع من أجل كل نقطة (x_0, y_0) داخل هذه الساحة إيجاد منحن تكاملي (على الأقل) للمعادلة المعطاة يمر بهذه النقطة .

البرهان. لما كان التابع f مستمراً في ساحة محدودة ومغلقة فهو محدود :

$$|f(x, y)| < M = \text{ثابتاً}$$

نرسم عبر النقطة (x_0, y_0) مستقيمين معاملاهما الزاويان M وَ $-M$. ثم نرسم شاقولين $x = a$ وَ $x = b$ بحيث يكون المثلثان المشتركان في الرأس (x_0, y_0) والمعينان بهذين المستقيمين والمستقيمين السابقين واقعين بأكملهما داخل الساحة G .

تمثل ثنائية هذين المثلثين مجموعة مغلقة Δ .

نرسم من أجل المعادلة المعطاة خطاً منكسراً يسمى خط أولر (Euler) وذلك كما يلي : نرسم عبر النقطة (x_0, y_0) مستقيماً معامله الزاوي $f(x_0, y_0)$ ، وعبر نقطة كيفية من هذا المستقيم نرمز لها بِـ (x_1, y_1) نرسم مستقيماً معامله الزاوي $f(x_1, y_1)$ ، وعبر نقطة كيفية (x_2, y_2) من هذا المستقيم نرسم مستقيماً جديداً معامله الزاوي $f(x_2, y_2)$ ، الخ . نعتبر الآن متتالية خطوط أولر المنكسرة $L_1, L_2, ..., L_n, ...$ المارة بالنقطة (x_0, y_0) وبحيث يكون أكبر طول لِـ L_k يسعى إلى الصفر عندما يسعى k إلى ∞ . نرمز بِـ φ_k للتابع الذي يمثل البيان L_k . إن التوابع $\varphi_1, ..., \varphi_2, ..., \varphi_k, ...$ تتمتع بالخواص التالية :

1) انها معرّفة على نفس القطعة المستقيمة $[a, b]$.

2) انها محدودة بانتظام .

3) انها متساوية الاستمرار .

بالإستناد إلى نظرية آرزيلا فإننا نستطيع استخراج من المتتالية $\{\varphi_k\}$ متتالية متقاربة بانتظام نرمز لها بِـ $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, ..., \varphi^{(k)}, ...$.

نضع : $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(x)$.

من الواضح أن : $\varphi(x_0) = y_0$. يبقى أن نتأكد من أن التابع φ يحقق على $[a, b]$ المعادلة التفاضلية المعطاة . من أجل ذلك يجب أن نثبت ، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، أن لدينا :

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon$$

بمجرد أن يكون الفرق $|x'' - x'|$ صغيراً بكفاية . لهذا الغرض ينبغي أن نبين أولاً بأن لدينا المتراجحة التالية من أجل k كبير بكفاية :

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f\big(x', \varphi^{(k)}(x')\big)\right| < \varepsilon$$

بمجرد أن يكون الفرق $|x'' - x'|$ صغيراً بكفاية .

لما كان التابع f مستمراً في الساحة G فإننا نستطيع ، من أجل كل $0 < \varepsilon$ ، إيجاد $0 < \eta$ بحيث $(y' = \varphi(x'))$:

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon$$

وذلك عندما يكون :

$$|x - x'| < 2\eta$$

$$|y - y'| < 4M\eta$$

إن مجموعة النقاط $G \ni (x, y)$ المحققة لهاتين المتراجحتين تمثل مستطيلاً Q . ليكن K عدداً كبيراً بكفاية بحيث ، من أجل $K < k$ ، نجد :

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < 4\eta$$

ونجد أطوال الأجزاء من الخط المنكسر L_k كلها أصغر من η . حينئذٍ تكون الخطوط المنكسرة لأولر $\varphi^{(k)}$ (مع $K < k$) من أجل $|x - x'| < 2\eta$ ، واقعة كلها داخل Q .

ومن جهة أخرى ، لتكن $(a_0, b_0), (a_1, b_1), ..., (a_{n+1}, b_{n+1})$ رؤوس الخط المنكسر L_k وليكن :

$$a_0 \leq x' < a_1 < a_2 < ... < a_n < x'' \leq a_{n+1}$$

(نفرض للتوضيح أن $x' < x''$ ؛ إذا كان $x' > x''$ فإن الاعتبارات مماثلة لحالة $x' > x''$) . عندئذٍ ، لدينا من أجل التوابع $\varphi^{(k)}$ الموافقة لذلك :

$$\varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x')$$

$$\varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i) \quad ; i = 1, 2, ..., n - 1$$

$$\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n)$$

نستنتج من هذه العلاقات من أجل $|x'' - x'| < \eta$:

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') < \varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x')$$

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) < \varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i)$$
$$< [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i);\ i = 1, 2, ..., n-1$$

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_n) < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_n)$$

بجمع هذه المتراجحات طرفاً طرفاً نحصل على :

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x')$$

وهو المطلوب .

نشير إلى احتمال تقارب متتاليات جزئية مختلفة من خطوط أولر المنكسرة نحو حلول مختلفة للمعادلة (3) . ومنه نستخلص أن الحل المار بالنقطة (x_0, y_0) للمعادلة $y' = f(x, y)$ ليس وحيداً عموماً .

6. الإستمرار المنتظم . التطبيقات المستمرة في المتراصات المترية .

هناك فيما يخص التطبيقات من فضاء متري في آخر ، وبصفة خاصة التوابع العددية المعرّفة على فضاء متري ، بالإضافة إلى مفهوم الإستمرار مفهوم آخر له معنى ويلعب دوراً هاماً في التحليل . هذا المفهوم هو مفهوم الإستمرار المنتظم . نقول عن تطبيق F من فضاء متري X في فضاء متري Y إنه مستمر بانتظام إذا استطعنا ، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد $\delta > 0$ بحيث $\varrho_1(x_1, x_2) < \delta$ يستلزم $\varrho_2(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$ (يرمز هنا ϱ_1 للمسافة على X وَ ϱ_2 للمسافة على Y) ، يتعلق هنا العدد δ فقط بِـ ε ولا يتعلق بِـ x_1 و x_2 :

تمرين . أثبت أن التابع العددي $F(x) = \sup\limits_{a \le t \le b} x(t)$ المعرّف على الفضاء $C[a, b]$ تابع مستمر بانتظام .

لدينا النظرية التالية فيما يخص التطبيقات المستمرة في المتراصات المترية ،

وهي تعمم النظرية الشهيرة في التحليل الأولي المتعلقة بالتوابع المستمرة على قطعة مستقيمة.

نظرية 6. كل تطبيق مستمر من متراص متري في فضاء متري تطبيق مستمر بانتظام.

البرهان. ليكن F تطبيقاً مستمراً وغير مستمر بانتظام، من متراص متري K في فضاء متري M. هذا يعني أن من أجل $\varepsilon > 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، يمكن أن نجد في K نقطتين x_n وَ x'_n بحيث:

$$\varrho_1(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$$

على الرغم من أن:

$$\varrho_2\big(F(x_n), F(x'_n)\big) \geq \varepsilon$$

(يرمز ϱ_1 للمسافة على K وَ ϱ_2 للمسافة على M). بالإستناد إلى تراص K، نستخرج من المتتالية $\{x_n\}$ متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة نحو نقطة $x \in K$. حينئذٍ تتقارب المتتالية $\{x'_{n_k}\}$ نحو نقطة x. من جهة أخرى، من أجل كل قيمة k تحقق إحدى المتراجحتين على الأقل:

$$\varrho_2\big(F(x), F(x_{n_k})\big) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\varrho_2\big(F(x), F(x'_{n_k})\big) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

وهذا يناقض الفرض القائل أن التطبيق F مستمر عند النقطة x.

7. نظرية آرزيلا المعممة.

ليكن X وَ Y متراصين متريين وَ C_{XY} مجموعة التطبيقات المستمرة f من X في Y. ندخل في C_{XY} مسافة بواسطة الدستور:

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in X} \varrho\big(f(x), g(x)\big)$$

نتأكد بسهولة من أن C_{XX} يصبح عندئذٍ فضاءً مترياً.

نظرية 7 (نظرية آرزيلا المعممة). لكي تكون مجموعة $D \subset C_{XY}$ شبه متراصة يلزم ويكفي أن تكون التوابع f المنتمية إلى D متساوية الإستمرار.

يعني ذلك أن من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$\varrho(x', x'') < \delta \tag{4}$$

تستلزم:

$$\varrho\big(f(x'), f(x'')\big) < \varepsilon \tag{5}$$

مهما كانت التوابع $f \in D$ ومهما كانت النقطتان x' وَ x'' في X.

البرهان. نبرهن على ضرورة الشرط كما ورد في النظرية 4.

لنثبت أن الشرط كافٍ. من أجل ذلك نمدد C_{XY} في الفضاء M_{XY} المؤلف من كل التطبيقات من المتراص X في المتراص Y، ونزوده بنفس المسافة المزود بها C_{XY}:

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in X} \varrho\big(f(x), g(x)\big)$$

لنبرهن على أن المجموعة D شبه متراصة في M_{XY}. لما كان C_{XY} مغلقاً في M_{XY}[1] فإن شبه تراص المجموعة D في M_{XY} يستلزم شبه تراصها في C_{XY}.

ليكن $\varepsilon > 0$ كيفياً، نختار δ بحيث تنتج المتراجحة (5) من المتراجحة (4) وذلك من أجل كل $f \in D$ وَ x'، x'' في X. من السهل أن نرى بأن X يكتب على شكل إتحاد منته لمجموعات غير متقاطعة E_i بحيث يكون: $\varrho(x', x'') < \delta$ عند إنتماء x' وَ x'' إلى E_i. لرؤية ذلك يكفي اختيار النقاط: $x_1, x_2 \ldots, x_n$ بشكل يجعلها تكون $\frac{\delta}{2}$ − شبكة في X، ثم نضع مثلاً:

$$E_i = B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \setminus \bigcup_{j<i} B\left(x_j \frac{\delta}{2}\right)$$

(1) ذلك لأن نهاية متتالية متقاربة بانتظام من التطبيقات المستمرة تطبيق مستمر. إن هذه القضية تعميم لنظرية معروفة في التحليل، والبرهان عليها يتم بالضبط كبرهان النظرية المشار اليها.

حيث $B(x_i, \delta/2)$ كرة نصف قطرها $\frac{\delta}{2}$ ومركزها x_i .

نعتبر الآن في المتراص Y ε – شبكة منتهية كيفية : $y_1, y_2, ..., y_m$ ولتكن L مجموعة التوابع $g(x)$ التي تأخذ على المجموعات E_i القيم y_j . من الواضح أن عدد هذه التوابع منته . لنثبت أنها تؤلف 2ε – شبكة لِـ D في M_{XY} . من أجل ذلك نعتبر $f \in D$. بكل نقطة x_i من $\{x_i, ..., x_n\}$ نلحق نقطة y_j من $\{y_1, ..., y_m\}$ بحيث :

$$\varrho(f(x_i), y_j) < \varepsilon$$

ليكن $g \in L$ التابع المختار بحيث $g(x_i) = y_j$. عندئذٍ إذا كان i مختاراً بحيث يكون $x \in E_i$ فإن :

$$\varrho(f(x), g(x)) \leq \varrho(f(x), f(x_i)) + \varrho(f(x_i), g(x_i)) + \varrho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon$$

ومنه يأتي أن المجموعة المنتهية L تشكل 2ε – شبكة للمجموعة D بحيث أن D شبه متراصة في M_{XY} ، وبالتالي ، في C_{XY} أيضاً .

8§ المنحنيات المستمرة في الفضاءات المترية[1]

ليكن التطبيق المستمر :

$$P = f(t)$$

من القطعة $a \leq t \leq b$ في فضاء متري R . عندما «يرسم» t القطعة المذكورة من a إلى b فإن النقطة P الموافقة لِـ t «ترسم» في الفضاء R «منحنياً مستمراً» . سنعطي تعاريف متينة للأفكار المعروضة هنا بصفة سطحية . إن الإتجاه الذي تتبعه نقطة أثناء رسمها لمنحن هام . وهكذا فإن المجموعة الممثلة في الرسم 12 والمرسومة في الإتجاهين المعينين على الرسمين 13

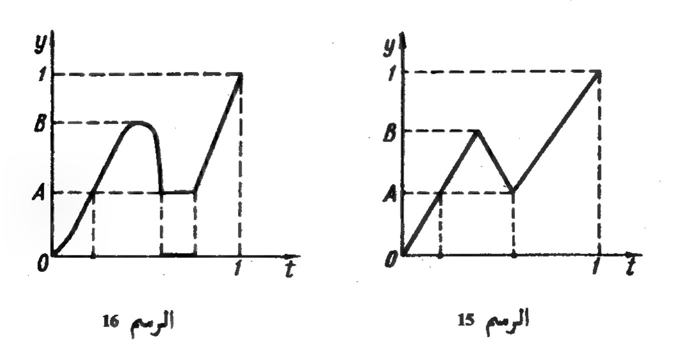
(1) إن هذه الفقرة ليست ضرورية للمستقبل . ولذا بإمكان القارئ أن يهملها إن شاء ذلك .

و 14 سنعتبرها تمثل منحنيين مختلفين. نحصل على مثال ثان باعتبار التابع الحقيقي المعرّف على القطعة [0, 1] والممثل في الرسم 15. يعرّف هذا التابع «منحنياً» يقع على القطعة [0, 1] من المحور y، لكنه يخالف هذه القطعة. وهو مرسوم مرة واحدة من النقطة 0 إلى النقطة 1 لأن القطعة $[A, B]$ مرسومة ثلاث مرات (مرتين من الأسفل إلى الأعلى ومرة من الأعلى إلى الأسفل).



الرسم 14　　الرسم 13　　الرسم 12

ورغم ذلك إذا كان اتجاه الرسم ثابت فإننا نعتبر اختيار «الوسيط» t كما لو لم تكن له أهمية. فالتابعان الممثلان على الرسمين 15 وَ 16 مثلاً يعرّفان نفس «المنحنى» الواقع على المحور y رغم أن قيم الوسيط t الموافقة لنقطة كيفية من المنحنى يمكن أن تكون مختلفة في حالتي الرسمين 15 وَ 16. وهكذا نلاحظ أن النقطة A توافقها على المحور t نقطتان معزولتان في الرسم 15، وتوافقها في الرسم 16 نقطة معزولة وقطعة مستقيمة على يمين هذه النقطة (إذا رسم t هذه القطعة فإن نقطة المنحنى تبقى ثابتة). (إن قبول مثل هذا القطع المستقيمة التي تُثبّت عليها النقطة $P = f(t)$ سيكون ذا فائدة لدى دراسة تراص جماعة منحنيات).



الرسم 16　　الرسم 15

لننتقل إلى التعاريف الشكلية. نقول عن تابعين مستمرين:

$$P = f''(t'') \text{ وَ } P = f'(t')$$

معرّفين على التوالي، على القطعتين $a' \leq t' \leq b'$ وَ $a'' \leq t'' \leq b''$ ويأخذان قيمهما في الفضاء المتري R، نقول أنهما متكافئان إذا وجد تابعان مستمران غير متناقصين:

$$t'' = \varphi''(t) \text{ وَ } t' = \varphi'(t)$$

معرّفان على قطعة $a \leq t \leq b$ ويحققان:

$$\varphi'(a) = a', \ \varphi'(b) = b'$$
$$\varphi''(a) = a'', \ \varphi''(b) = b''$$
$$f'(\varphi'(t)) = f''(\varphi''(t))$$

مهما كان $t \in [a, b]$.

من السهل أن نرى بأن علاقة التكافؤ المعرفة بهذه الطريقة علاقة انعكاسية (f يكافئ f) وتناظرية (إذا كان f' مكافئاً لِـ f'' فإن f'' يكافئ f') ومتعدية (تكافؤ f وَ f'' وتكافؤ f'' و f''' يستلزم تكافؤ f' وَ f'''). ولذا فإن التوابع المستمرة [illegible] تنقسم إلى صفوف توابع متكافئة فيما بينها. يعرّف كل صف من هذه [illegible] في الفضاء R منحنياً مستمراً.

مهما كان التابع $P = f'(t')$ المعرّف على قطعة كيفية $[a', b']$، يمكن أن نلحق به تابعاً مكافئاً له ومعرفاً على القطعة $[a'', b''] = [0, 1]$. لرؤية ذلك يكفي أن نضع[1]:

$$t' = \varphi'(t) = (b' - a')\, t + a'$$
$$t'' = \varphi''(t) = t$$

وبالتالي فإنه بالإمكان تمثيل كل منحن وسيطياً بواسطة تابع معرّف على القطعة $[0, 1]$.

---

(1) نفرض $a < b$. وبرغم ذلك فإننا لا نمنع الحالة التي تكون فيها «المنحنيات» مؤلفة من نقطة واحدة، وهي المنحنيات التي نحصل عليها إذا كان التابع $f(t)$ ثابتاً على $[a, b]$. مع الملاحظة أن ذلك مفيد في المستقبل.

ولذا، من المفيد أن نعتبر الفضاء $C_{I,R}$ المؤلف من التطبيقات المستمرة f من القطعة $I = [0, 1]$ في R ، والمزود بالمسافة :

$$\varrho(f, g) = \sup_t \varrho\big(f(t), g(t)\big)$$

نقول أن متتالية المنحنيات ... , $L_1, L_2, ..., L_n$ متقاربة نحو المنحنى L ، إذا كانت المنحنيات L_n وَ L تمثل وسيطياً بالتوابع :

$$P = f_n(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$P = f(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

بحيث $\varrho(f, f_n) \to 0$ لما $n \to \infty$.

بتطبيق نظرية آرزيلا المعممة (النظرية 7 ، 7§) نبرهن بسهولة على النظرية الموالية .

نظرية 1. إذا كانت متتالية المنحنيات ... , $L_1, L_2, ..., L_n$ المنتمية إلى المتراص K تمثل وسيطياً بتوابع متساوية الإستمرار على القطعة $[0, 1]$ فإنه يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة من هذه المتتالية .

نعرّف الآن طول منحن وسيطياً بالتابع :

$$P = f(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$$

على أنه الحد الأعلى للمجاميع :

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho\big(f(t_{i-1}), f(t_i)\big)$$

حيث t_i نقاط تخضع للشروط التالية لاغير :

$$a \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_i \leq ... \leq t_n = b$$

من السهل أن نرى بأن طول منحن لا يتعلق بتمثيله الوسيطي . بالاقتصار عن التمثيلات الوسيطية بواسطة توابع معرّفة على القطعة $[0, 1]$، يمكن أن نبرهن بسهولة على أن طول منحن تابعية نصف مستمرة من الأدنى تتعلق بـ f (في الفضاء C_{IR}) . إذا استعملنا اللغة الهندسية نستطيع التعبير على هذه النتيجة من خلال النظرية التالية المتعلقة بنصف الاستمرار :

نظرية 2. إذا كانت متتالية المنحنيات $\{L_n\}$ متقاربة نحو منحن L ، فإن طول المنحنى L أصغر (أو يساوي) من النهاية الدنيا لأطوال المنحنيات L_n .

نعتبر الآن، بصفة خاصة، المنحنيات ذات الأطوال المنتهية. ليكن منحن قابل للتمثيل الوسيطي :

$$P = f(t) \quad ; \quad a \leq t \leq b$$

إن التابع f ، المعتبر على القطعة $[a, T]$ فقط، حيث $a \leq T \leq b$ ، يعرّف «القطعة الابتدائية» لهذا المنحنى من النقطة :

$$P_a = f(a)$$

إلى النقطة :

$$P_T = f(T)$$

ليكن :

$$s = \varphi(T)$$

طول هذا المنحنى. نتأكد بسهولة من أن :

$$P = g(s) = f[\varphi^{-1}(s)]$$

تمثيل وسيطي آخر لنفس المنحنى. ويرسم الوسيط الجديد s القطعة :

$$0 \leq s \leq S$$

حيث يرمز S لطول المنحنى المعتبر بأكمله. يحقق هذا التمثيل الشرط :

$$\varrho\big(g(s_1), g(s_2)\big) \leq |s_2 - s_1|$$

(القوس لا يقلّ طولاً عن الوتر) .

بالانتقال إلى القطعة $[0, 1]$ نحصل على التمثيل الوسيطي :

$$P = F(\tau) = g(s) \ , \ \tau = \frac{s}{S}$$

الذي يحقق شرط ليبشيتز :

$$\varrho(F(\tau_1), F(\tau_2)) \leq S|\tau_1 - \tau_2|$$

نرى إذن أن كل المنحنيات ذات الطول $S \geq M$ ، حيث M ثابت ، تمثل وسيطياً بالتوابع المتساوية الإستمرار المعرّفة على القطعة $[0, 1]$. وبالتالي تنطبق النظرية 1 على هذه التوابع.

لنبرز أهمية النتائج العامة المحصل عليها في البرهان على النظرية الهامة التالية :

نظرية 3. إذا استطعنا في متراص K وصل نقطتين A وَ B بمنحنيات مستمرة طولها منته فإنه يوجد من بين هذه المنحنيات منحن ذو طول أصغري.

لرؤية ذلك نرمز بِـY للحد الأدنى لأطوال المنحنيات التي تصل النقطتين A وَ B في المتراص K . لتكن $L_1, L_2, ..., L_n, ...$ متتالية منحنيات تصل A وَ B أطوالها تؤول إلى Y . اعتماداً على النظرية 1، يمكن من هذه المتتالية استخراج متتالية جزئية متقاربة. بفضل النظرية 2، نرى أن منحنى نهاية هذه المتتالية الجزئية لا يمكن أن يكون له طول أكبر من Y .

نشير إلى أنه حتى في الحالة التي يكون فيها K سطحاً مغلقاً مصقولاً (قابلاً للمفاضلة عدداً كافياً من المرات) من الفضاء الإقليدي ذي الأبعاد الثلاثة فإن هذه النظرية لا تأتي مباشرة من النتائج المثبتة في دروس الهندسة التفاضلية، حيث نلجأ عادة إلى الحالة التي تكون فيها النقطتان A وَ B قريبتين بكفاية الواحدة من الأخرى.

يصبح عرضنا هذا أكثر وضوحاً لو زودنا مجموعة منحنيات الفضاء المتري R ببنية فضاء متري. إن هذا الأمر قابل للإنجاز، ويتم بتعريف المسافة بين منحنيين L_1 وَ L_2 بواسطة الدستور :

$$\varrho(L_1, L_2) = \text{Inf}\, \varrho(f_1, f_2)$$

حيث نأخذ الحد الأدنى على مجموعة كل ثنائيات التمثيلات الوسيطية للمنحنيين L_1 وَ L_2 المعرّفة بالتابعين التاليين، على التوالي :

$$P = f_1(t) \ , \ 0 \leq t \leq 1$$

$$P = f_2(t) \ , \ 0 \leq t \leq 1$$

إن البرهان على أن المسافة الواردة أعلاه تحقق المسلمات المعتادة جد يسير باستثناء النقطة التالية : نتعرض لبعض الصعوبات في البرهان على أن المساواة :

$$\varrho(L_1, L_2) = 0$$

تستلزم تطابق المنحنيين L_1 وَ L_2 . يرجع ذلك إلى كون الحد الأدنى في الدستور الذي يعرّف المسافة $\varrho(L_1, L_2)$ يُبلغ من أجل اختيار لائق للتمثيلات الوسيطية f_1 وَ f_2. لكن البرهان على ماقلناه آنفاً ليس هو الآخر من البساطة بمكان .

الفصل الثالث

الفضـاءات الشعاعية النظيمية والطوبولوجية

1 §. الفضـاءات الشعاعية

إن مفهوم الفضـاء الشعاعي من أهم المفاهيم الرياضية. وسيلعب هذا المفهوم دوراً بارزاً سواء في هذا الفصل أو في الفصول الموالية.

1. تعريف وأمثلة لفضـاءات شعاعية

تعريف 1. نقول عن مجموعة غير خالية L من العناصر $x, y, z, \ldots$ أنها فضـاء شعاعي (أو خطي) إذا حققت الشروط التالية:

I) نلحق بكل عنصرين x وَ y من L (بواسطة قانون معين) عنصراً وحيداً $z \in L$ يسمى مجموعهما، ونرمز له بِـ $x + y$، وتتمتع هذه الصلة بالخواص التالية:

1) $x + y = y + x$ (التبديل)

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (التجميع)

3) يوجد في L عنصر 0 بحيث $x + 0 = x$ من أجل كل $x \in L$ (وجود عنصر منعدم).

4) من أجل كل $x \in L$، يوجد في L عنصر $-x$ بحيث: $x + (-x) = 0$ (وجود عنصر مقابل أو نظير).

II) مهما كان العدد α والعنصر $x \in L$، يمكن أن نلحق بهما (بواسطة قانون معين) عنصراً وحيداً $\alpha x \in L$ يسمى جداء العنصر x والعدد α، وتتمتع هذه الصلة بالخواص التالية:

$\alpha(\beta x) = (\alpha \beta) x$ (1

$1 \cdot x = x$ (2

$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ (3

$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (4

إذا كانت مجموعة الأعداد المعتبرة تضم كل الأعداد العقدية نقول أن الفضاء الشعاعي عقدي، وإذا ضمت الأعداد الحقيقية فقط نقول أن الفضاء الشعاعي حقيقي[1]. ستكون كل اعتباراتنا صالحة للفضاءات الحقيقية والعقدية في آن واحد إلّا إذا أشرنا لعكس ذلك.

نلاحظ أن كل فضاء شعاعي عقدي يصبح فضاء شعاعياً حقيقياً إذا اقتصرنا على الأعداد الحقيقية بدل الأعداد العقدية.

لنعتبر بعض الأمثلة لفضاءات شعاعية، ونترك للقارئ مهمة التأكد من أن كلاً منها يحقق المسلمات المعروضة أعلاه.

1. يُشكل المستقيم العددي $\mathbf{R}^1$، أي مجموعة الأعداد الحقيقية مع عمليتي الجمع والضرب الحسابيتين المعتادتين فضاء شعاعياً.

2. تشكل مجموعة الجمل المرتبة لِـ n عدداً حقيقياً $x = (x_1, \ldots, x_n)$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي، المعرفتين بالدستورين:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

فضاءً شعاعياً. يسمى هذا الفضاء الفضاء الحسابي (أو العددي) الحقيقي ذو n بعداً[2] ونرمز له بِـ $\mathbf{R}^n$. بصفة مماثلة نعرّف الفضاء الحسابي العقدي ذو n بعداً $\mathbf{C}^n$، باعتبار هذه المرة مجموعة الجمل المرتبة ذات n عدداً عقدياً (مع الضرب في أي عدد عقدي).

(1) يمكن أيضاً اعتبار فضاءات شعاعية على حقل تبديلي كيفي.

(2) سيأتي تفسير هذه الكلمة.

3. تؤلف التوابع (الحقيقية أو العقدية) المستمرة على القطعة $[a, b]$، مع العمليتين المعتادتين الخاصتين بجمع تابعين وضرب تابع في عدد، تؤلف فضاءً شعاعياً (وهو من أهم الفضاءات في التحليل) نرمز له بـ$C[a, b]$.

4. إن الفضاء l_2 المؤلف من المتتاليات غير المنتهية لأعداد (حقيقية أو عقدية) .

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

بحيث :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \qquad (1)$$

يشكل مع العمليتين :

$$(x_1, x_2, ..., x_n, ...) + (y_1, y_2, ..., y_n, ...) =$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...)$$
$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n, ...)$$

فضاء شعاعياً. إن مجموع متتاليتين يتوفر فيهما الشرط (1) هو متتالية تحقق أيضاً هذا الشرط، وذلك يأتي من المتراجحة البديهية :

$$(a_1 + a_2)^2 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2$$

5. إن مجموعة المتتاليات المتقاربة $x = (x_1, x_2, ...)$ تشكل مع عمليتي الجمع والضرب بعدد (المعرفتين في المثال السابق) فضاء شعاعياً. نرمز له بـ c .

6. تشكل المتتاليات المتقاربة نحو 0 فضاءً شعاعياً نرمز له بِـc_0، (عمليتا الجمع والضرب بعدد هما المعرفتان في المثال 4) .

7. المجموعة m المؤلفة من المتتاليات العددية المحدودة تشكل أيضاً فضاءً شعاعياً، (عمليتا الجمع والضرب بعدد هما المعرفتان في المثال 4) .

8. أخيراً نحتفظ دوماً بنفس العمليتين، ونلاحظ أن المجموعة $\mathbf{R}^{\infty}$ المؤلفة من كافة المتتاليات العددية تشكل هي الأخرى فضاءً شعاعياً.

لما كانت خواص فضاء شعاعي ناتجة من خواص جمع عناصره وضربها في عدد، فمن الطبيعي أن نقدم التعريف التالي :

تعريف 2. نقول عن فضاءين شعاعيين L وَ L^* انهما متشاكلان إذا أمكن إيجاد تقابل بين عناصرهما منسجم مع العمليات المعرّفة على L وَ L^*. وهذا يعني أنه إذا كان:

$$x \leftrightarrow x^*$$

وَ

$$y \leftrightarrow y^*$$

(حيث x وَ y في L وَ x^* وَ y^* في L^*) فإن:

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$$

وَ:

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

(حيث α عدد كيفي).

يمكن أن نعتبر فضاءين متشاكلين كأنهما يمثلان نفس الفضاء. كمثال عن الفضاءات الشعاعية المتشاكلة يمكن اعتبار الفضاء الحسابي لِـ n بعداً (سواء كان حقيقياً أو عقدياً) وفضاء كثيرات الحدود من درجة $\leq n - 1$ (ذات معاملات حقيقي أو عقدية على التوالي) مع عمليتي جمع كثيريْ حدود وضرب كثير حدود في عدد المعتادتين (برهن على وجود هذا التشاكل!).

2. الإرتباط الخطي. نقول عن العناصر: $x, y, \ldots, w$ المنتمية لفضاء شعاعي L إنها مترابطة (أو غير مستقلة) خطياً إذا وجدت أعداد $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ليست كلها منعدمة بحيث:

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = 0 \tag{2}$$

إذا كان الأمر غير ذلك نقول أن هذه العناصر مستقلة خطياً. بعبارة أخرى نقول أن العناصر $x, y, \ldots, w$ مستقلة خطياً إذا كانت المساواة (2) تستلزم العلاقات:

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$$

نقول عن جملة غير منتهية من العناصر $x, y, \ldots$ المنتمية لفضاء شعاعي L إنها مستقلة خطياً إذا كانت كل جملة جزئية منتهية من هذه الجملة مستقلة خطياً.

إذا استطعنا إيجاد n عنصراً مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي L واستحال إيجاد $n + 1$ عنصراً مستقلة خطياً نقول عندئذٍ أن بعد الفضاء L يساوي n (أو أن L ذو بعد n) . أما إذا تمكنا من إيجاد جملة تحوي عدداً منتهياً كيفياً من العناصر المستقلة خطياً نقول عن الفضاء L إنه ذو بعدٍ غير منته . أساس فضاء شعاعي L بعده n ، هو كل جملة تحوي n عنصراً مستقلة خطياً من هذا الفضاء . من السهل أن نتأكد من أن الفضاءين $\mathbf{R}^n$ وَ $\mathbf{C}^n$ يساوي n ، وهذا يبرر تسميتها .

تدرس في الجبر الخطي الفضاءات الشعاعية التي لها أبعاد منتهية فقط . وعلى العكس من ذلك ندرس في هذا الكتاب ، أساساً ، فضاءات ذات أبعاد غير منتهية لأنها أكثر أهمية من وجهة نظر التحليل . نقترح على القارئ أن يتأكد من أن كل الفضاءات الواردة في الأمثلة 3 إلى 8 ذات أبعاد غير منتهية .

3. الفضاءات الشعاعية الجزئية

نقول عن مجموعة جزئية غير خالية L' من الفضاء الشعاعي L أنه فضاء شعاعي جزئي من L إذا كان L' فضاءً شعاعياً بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب في عدد المعرفتين على L .

بعبارة أخرى ، يكون $L \supset L'$ فضاءً شعاعياً إذا نتج من $L' \ni x$ وَ $L' \ni y$ أن $L' \ni \alpha x + \beta y$ من أجل كل عددين α وَ β .

يقبل كل فضاء شعاعي L فضاءً جزئياً خاصاً مؤلفاً من عنصر واحد هو العنصر المنعدم $\{0\}$ في L . من جهة أخرى يمكن اعتبار الفضاء L نفسه كفضاء جزئي من L . نسمي كل فضاء شعاعي جزئي يخالف L وَ $\{0\}$ فضاءً جزئياً ذاتياً من L .

نسوق الآن بعض الأمثلة لفضاءات جزئية ذاتية .

1. ليكن L فضاءً شعاعياً كيفياً و x عنصراً غير منعدم من L . إن مجموعة الجداءات $\{\lambda x\}$ ، حيث يتجول λ في مجموعة الأعداد (الحقيقية أو العقدية) ، تشكل بطبيعة الحال فضاءً شعاعياً جزئياً بُعده 1 . إنه فضاء جزئي ذاتي من L عندما يكون L ذا بعد أكبر (تماماً) من 1 .

2. نعتبر الفضاء الشعاعي المؤلف من التوابع المستمرة $C[a, b]$ (راجع المثال 3، الفقرة 1) ونعتبر في هذا الفضاء مجموعة كثيرات الحدود: $P[a, b]$.

من الواضح أن $P[a, b]$ فضاء شعاعي جزئي في $C[a, b]$ (بعدها، مثل بعد $C[a, b]$، غير منته). من جهة أخرى، فإن الفضاء $C[a, b]$ يمكن اعتباره، بدوره، كفضاء جزئي من الفضاء الشعاعي الذي يحوي كل التوابع (المستمرة وغير المستمرة) المعرفة على $[a, b]$.

3. نعتبر أخيراً الفضاءات l_2، c_0، c، m، $\mathbf{R}^\infty$ (الأمثلة 4 إلى 8 الفقرة 1). من الواضح أن كلاً منها فضاء جزئي ذاتي للفضاء الذي يليه.

لتكن $\{x_\alpha\}$ مجموعة غير خالية كيفية من عناصر الفضاء الشعاعي L. يوجد عندئذٍ في L فضاء جزئي أصغري (يمكن أن يتطابق مع L) يحوي المجموعة $\{x_\alpha\}$ ذلك أنه يوجد على الأقل فضاء جزئي من L يحوي $\{x_\alpha\}$، مثلاً، الفضاء L نفسه. من جهة أخرى فإن تقاطع كل جماعة $\{L_\nu\}$ من الفضاءات الجزئيةمن L فضاء جزئي من L. يرجع ذلك إلى أنه إذا كان $L^* = \bigcap\limits_\nu L_\nu$ وَ x وَ y في L^* فإن $L^* \ni \alpha x + \beta y$ من أجل كل عددين α وَ β. نعتبر الآن كل الفضاءات الجزئية من L التي تحوي الجملة $\{x_\alpha\}$. إن تقاطع هذه الفضاءات هو الفضاء الجزئي الأصغري الذي يحوي $\{x_\alpha\}$. نقول عن هذا الفضاء الجزئي أنه مولد عن المجموعة $\{x_\alpha\}$ أو أنه المغلف الخطي لِـ$\{x_\alpha\}$. نرمز لهذا الفضاء الجزئي بِـ$L(\{x_\alpha\})$.

تمارين. نقول عن جملة مستقلة خطياً $\{x_\alpha\}$ من عناصر الفضاء الشعاعي L أنها أساس هامل ((Hamel)) إذا كان مغلفه الخطي يساوي L. برهن على القضايا التالية:

1) يوجد في كل فضاء شعاعي أساس لهامل.

إشارة إلى الحل. استخدم توطئة زورن.

2) إذا كان $\{x_\alpha\}$ أساساً لهامل في L فإن كل شعاع $x \in L$ يمكن تمثيله بطريقة وحيدة على شكل عبارة خطية منتهية من أشعة الجملة $\{x_\alpha\}$.

3) إن كل أساسين لهامل في فضاء شعاعي متساويا القوة؛ تسمى قوة أساس لهامل في فضاء شعاعي، أحياناً، البعد الجبري لهذا الفضاء.

4) لكي يكون فضاءان شعاعيان متشاكلين يلزم ويكفي أن يكون لهما نفس البعد الجبري.

4. فضاءات النسبة

ليكن L فضاءً شعاعياً وَ L' فضاءً شعاعياً جزئياً من L. نقول عن عنصرين x وَ y من L إنهما متكافئان إذا كان الفرق $y - x$ ينتمي إلى L'. إن هذه العلاقة إنعكاسية وتناظرية ومتعدية، وهي بالتالي تجزئة لِـ L إلى صفوف تكافؤ نسميها الصفوف الملامسة (وفق L'). تسمى مجموعة كل هذه الصفوف فضاء النسبة لِـ L على L' ونرمز لها بِـ L/L'.

ندخل على كل فضاء نسبة عمليتي جمع وضرب في عدد وذلك بصفة طبيعية. وعلى وجه التحديد، ليكن ξ وَ η صفين أي عنصرين من L/L'. نختار في كل صف من هذين الصفين ممثلا كيفياً: ليكن x ممثلا لِـ ξ وَ y ممثلاً لِـ η. لنعرف المجموع $\xi + \eta$ على أنه الصف e الذي يحوي العنصر $x + y$، ونعرّف جداء الصف ξ في العدد α الصف الذي يحوي العنصر αx. من السهل أن نتأكد من أن النتيجة لاتتغير إذا استبدلنا الممثلين x وَ y للصفين ξ وَ η بممثلين آخرين x' وَ y' لهذين الصفين. وهكذا عرفنا عمليتين خطيتين على عناصر فضاء النسبة L/L'. نتحقق بسرعة من أن هاتين العمليتين تتمتعان بالشروط الواردة في تعريف الفضاء الشعاعي (تأكد من ذلك!). بعبارة أخرى، فإن كل فضاء نسبة L/L' (مع عمليتي الجمع والضرب في عدد المعرّفتين آنفاً) يشكل فضاءً شعاعياً.

إذا كان L فضاءً شعاعياً بعده n وَ L فضاء جزئياً بعده k، فإن فضاء النسبة L/L' ذو بعدٍ $n - k$ (برهن على ذلك!).

ليكن L فضاءً شعاعياً كيفياً وَ L' فضاءً جزئياً من L. يسمى بعد فضاء النسبة L/L' البعد المرافق للفضاء الجزئي L' بالنسبة للفضاء L.

إذا كان الفضاء الجزئي $L' \subset L$ ذا بعد مرافق منته n فإننا نستطيع إيجاد

n عنصراً: $x_1, x_2, ..., x_n$ في L بحيث يمكن كتابة كل عنصر $x \in L$ (بطريقة وحيدة) على الشكل:

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n + y$$

حيث $\alpha_1, ..., \alpha_n$ أعداد وَ $y \in L'$. لرؤية ذلك نفرض أن فضاء النسبة L/L' ذو بعدٍ n. نعتبر في هذا فضاء النسبة أساساً:

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$$

ونختار في كل صف ξ_k ممثلاً x_k. ليكن الآن x عنصراً كيفياً من L وَ ξ الصف من L/L' الذي يحويه. لدينا إذن:

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_n \xi_n$$

يعني ذلك، تعريفاً، أن كل عنصر من ξ، وبصفة خاصة x، لا يختلف عن نفس العبارة الخطية للعناصر: $x_1 ..., x_n$ إلا بعنصر من L'، أي أن:

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n + y \ , \ y \in L'$$

نترك البرهان على وحدانية هذه الكتابة للقارئ.

5. التابعيات الخطية

نسمي تابعية كل تابع عددي f معرّف على فضاء شعاعي L. نقول عن تابعية L إنها جمعية إذا كان:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

وذلك من أجل x وَ y في L ونقول أنها متجانسة إذا كان:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

وهذا مهما كان $x \in L$ ومهما كان العدد α.

نقول عن تابعية f معرّفة على فضاء شعاعي عقدي إنها نصف متجانسة إذا كان $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$، حيث يرمز $\bar{\alpha}$ لمرافق العدد العقدي α.

تسمى كل تابعية جمعية ومتجانسة تابعية خطية. وتسمى تابعية جمعية ونصف متجانسة تابعية نصف - خطية.

نسوق فيما يلي بعض الأمثلة للتابعيات الخطية:

1. ليكن $\mathbf{R}^n$ الفضاء الحسابي الذي بعده n والذي تكتب عناصره على النحو $x = (x_1, ..., x_n)$. لتكن $a = (a_1, ..., a_n)$ جملة n عدداً مثبتة وكيفية. إن:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_i$$

تابعية خطية على $\mathbf{R}^n$. كما أن:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \overline{x_i}$$

تابعية نصف خطية على $\mathbf{C}^n$.

2. يمثل التكاملان، على التوالي:

$$\bar{\mathrm{I}}[x] = \int_a^b \overline{x(t)} \, \mathrm{d}t \quad \text{و} \quad \mathrm{I}[x] = \int_a^b x(t) \, \mathrm{d}t$$

تابعية خطية وتابعية نصف خطية على الفضاء $C[a, b]$.

3. نعتبر مثال أعم من السابق. ليكن y_0 تابعاً مستمراً على $[a, b]$ ومعيناً. من أجل كل تابع $x \in C[a, b]$، نضع:

$$F(x) = \int_a^b x(t) \, y_0(t) \, \mathrm{d}t$$

إن خطية هذه التابعية تأتي من الخواص الأساسية للمكاملة. أما التابعية:

$$\bar{F}(x) = \int_a^b \overline{x(t)} y_0(t) \, \mathrm{d}t$$

فهي نصف خطية (على الفضاء العقدي $C[a, b]$).

4. نعتبر على نفس الفضاء $C[a, b]$ تابعية خطية من نمط آخر. وعلى وجه التحديد، نضع من أجل كل تابع $x \in C[a b]$:

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

بحيث أن قيمة التابعية δ_{t_0} الموافقة للتابع x تساوي قيمة هذا التابع عند نقطة مثبتة t_0.

نكتب عادة هذه التابعية على الشكل:

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t)\, \delta(t - t_0)\, dt$$

حيث يرمز δ لِـ «تابع» منعدم ما عدا عند النقطة $t = 0$، وتكامله يساوي 1 (وهو التابع δ لديراك (Dirac)). إن لِـ «التوابع» من هذا النوع تعريفاً متيناً يرد في إطار نظرية التوزيعات التي سنعرض بعض عناصرها ضمن §4 من الفصل الموالي.

5. نعتبر مثالاً لتابعية خطية على الفضاء l_2. ليكن k عدداً صحيحاً موجباً مثبتا وكيفياً. من أجل كل عنصر:

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$$

من الفضاء l_2، نضع:

$$f_k(x) = x_k$$

إن خطية هذه التابعية خاصية بديهية. يمكن «توسيع» هذه التابعيات إلى فضاءات أخرى من المتتاليات العددية، مثلاً إلى c_0، c، m، $\mathbf{R}^\infty$ (انظر الأمثلة من 5 إلى 8 في الفقرة 1).

6. التفسير الهندسي للتابعيات الخطية

لتكن f تابعية خطية كيفية لا تساوي التابعية المنعدمة، معرفة على فضاء شعاعي L. إن مجموعة العناصر $x \in L$ المحققة للشرط:

$$f(x) = 0$$

تشكل فضاءً شعاعياً جزئياً من L يسمى الفضاء الجزئي للأصفار أو نواة التابعية f . ذلك أنه إذا كان $f(x) = f(y) = 0$ فإن :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$$

نرمز هذا الفضاء الجزئي بـ $\operatorname{Ker} f$[1] .

إن الفضاء الجزئي $\operatorname{Ker} f$ له بعد مرافق يساوي 1 . لرؤية ذلك نعتبر عنصراً كيفياً x_0 لا ينتمي إلى $\operatorname{Ker} f$ ، أي بحيث $f(x_0) \neq 0$. نلاحظ أن العنصر x_0 موجود لأن $f(x) \not\equiv 0$. نستطيع ، بدون المس بعمومية المسألة ، أن نفرض بأن : $f(x_0) = 1$ لأننا نستطيع في غير هذه الحالة تعويض x_0 بـ $\frac{x_0}{f(x_0)}$. (من الواضح أن $f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right) = 1$) . نضع من أجل كل عنصر x: $y = x - f(x)\, x_0$ ؛ حينئذٍ : $f(y) = f(x - f(x)x_0) = 0$ أي أن $y \in \operatorname{Ker} f$.
إن كتابة x على الشكل :

$$x = \alpha\, x_0 + y$$

(حيث $\operatorname{Ker} f \ni y$) من أجل x_0 مثبت ، كتابة وحيدة . لتوضيح ذلك نعتبر :

$$x = \alpha\, x_0 + y \ , \ \ y \in \operatorname{Ker} f$$

$$x = \alpha'\, x_0 + y', y' \in \operatorname{Ker} f$$

عندئذٍ :

$$(\alpha - \alpha')x_0 = y' - y$$

من الواضح أن هذه المساواة تعطي $y' = y$ من أجل $\alpha = \alpha'$. أما إذا كان $\alpha \neq \alpha'$ فإن $x_0 = \frac{y' - y}{\alpha - \alpha'} \in \operatorname{Ker} f$ ، وهذا يناقض اختيار x_0 .

من ذلك نستنتج أن عنصرين x_1 وَ x_2 ينتميان إلى نفس الصف الملامس وفق الفضاء الجزئي $\operatorname{Ker} f$ إذا وفقط إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$. ذلك أن من :

$$x_1 = f(x_1) \cdot x_0 + y_1$$

$$x_2 = f(x_2) \cdot x_0 + y_2$$

(1) من الكلمة الإنكليزية Kernel التي تعني نواة .

يأتي :

$$x_1 - x_2 = \big(f(x_1) - f(x_2)\big)x_0 + (y_1 - y_2)$$

ومنه نرى بأن $x_1 - x_2 \in \text{Ker } F$ إذا وفقط إذا كان معامل x_0 (أي : $(f(x_1) - f(x_2)$ يساوي 0 .

إن كل صف ع وفق الفضاء الجزئي $\text{Ker} f$ معرّف بممثل كيفي من ممثلاته . نستطيع اختيار هذا الممثل من الشكل αx_0. نرى عندئذٍ أن الفضاء الجزئي $L/\text{Ker} f$ ذو بعدٍ يساوي 1 ، أي أن البعد المرافق لِـ$\text{Ker} f$ يساوي 1 .

إن التابعية الخطية المنعدمة على الفضاء الجزئي $\text{Ker} f$ معينة بهذا الفضاء الجزئي بتقدير عامل ثابت .

للتأكد من ذلك نفرض أن للتابعين الخطيين f وَ g نفس النواة : $\text{Ker} f = \text{Ker } g$. نختار عنصراً x_0 يحقق $f(x_0) = 1$. من السهل أن نرى بأن $g(x_0) \neq 0$. من أجل ذلك نلاحظ أن :

$$x = f(x)\, x_0 + y \ \ , \ \ y \in \text{Ker} f = \text{Ker } g$$

وَ :

$$g(x) = f(x)\, g(x_0) + g(y) = f(x) g(x_0)$$

وهذا من أجل كل $L \ni x$. لو كانت قيمة $g(x_0)$ منعدمة لـكانت التابعية g منعدمة تطابقياً (أي تساوي التابعية المنعدمة) . تعبر المساواة $g(x) = g(x_0) f(x)$ عن تناسب التابعيتين g وَf .

نستطيع ، من أجل كل فضاء جزئي L بعده المرافق 1 ، إيجاد تابعية f بحيث $\text{Ker} f = L'$. يكفي لبلوغ ذلك اختيار عنصر كيفي $L' \not\ni x_0$ وان نمثل كل عنصر $L \ni x$ على الشكل $x = \alpha\, x_0 + y$. إن هذا التمثيل وحيد . بوضع $f(x) = \alpha$ نحصل على تابعية خطية f بحيث $\text{Ker} f = L'$ (تأكد من ذلك !) .

ليكن L' فضاء جزئياً كيفياً بعده المرافق 1 ، من الفضاء الشعاعي L ؛ عندئذٍ ، نسمي كل صف ملامس للفضاء L وفق الفضاء الشعاعي L' مستوياً مصعداً موازياً للفضاء الجزئي L' (بصفة خاصة ، فإن الفضاء الجزئي L' نفسه مستو مصعد يحوي 0 ، أي أنه «يمر بنقطة البدء») . بعبارة أخرى ،

فإن مستوياً مصعداً M' موازياً للفضاء الجزئي L' هو مجموعة يمكن الحصول عليها من L' بواسطة إنسحاب شعاعه $x_0 \in L$:

$$M' = L' + x_0 = \{y : y = x + x_0 , x \in L'\}$$

من الواضح أنه إذا كان $x_0 \in L'$ فإن $M' = L'$ ، أما إذا كان $x_0 \notin L'$ فإن $M' \neq L'$. إذا كانت f تابعية خطية غير تافهة على L فإن المجموعة :

$$M_f = \{x : f(x) = 1\}$$

مستو مصعد مواز للفضاء الجزئي $\mathrm{Ker}\, f$ (ذلك أنه إذا إخترنا عنصراً x_0 بحيث $f(x_0) = 1$ فإننا نستطيع تمثيل كل شعاع $x \in M_f$ على الشكل $x = x_0 + y$ مع $y \in \mathrm{Ker}\, f$) . من جهة أخرى إذا كان M' مستوياً مصعداً كيفياً موازياً للفضاء الجزئي L' (بعده المرافق 1) لا يمر بنقطة البدء فإنه توجد تابعية خطية وحيدة f بحيث $M' = \{x : f(x) = 1\}$. لرؤية ذلك نعتبر $M' = L' + x_0$ ، حيث $x_0 \in L$ ؛ عندئذٍ يمكن تمثيل كل عنصر $x \in L$ بطريقة وحيدة على النحو $x = \alpha x_0 + y$ ، حيث $y \in L'$. بوضع $f(x) = \alpha$ كما سبق ، نحصل على التابعية الخطية المطلوبة ؛ أما الوحدانية فهي ناتجة من أنه إذا كان $g(x) = 1$ من أجل $x \in M'$ فإن $g(y) = 0$ من أجل $y \in L'$ بحيث نجد :

$$g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(\alpha x_0 + y)$$

وهكذا حصلنا على تقابل بين كل التابعيات الخطية غير التافهة المعرّفة على الفضاء الشعاعي L وكل المستويات المصعدة في L التي لا تمر بنقطة البدء .

تمرين . لتكن $f, f_1, f_2, ..., f_n$ تابعيات خطية على الفضاء الشعاعي L بحيث من $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$ ينتج $f(x) = 0$. أثبت وجود ثوابت $a_1, ..., a_n$ بحيث :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$$

من أجل كل $x \in L$.

§ 2. المجموعات المحدبة والتابعيات المحدبة. نظرية هان - باناخ (Hahn-Banach)

1. المجموعات المحدبة والحقول المحدبة

يعتبر مفهوم التحدب أساس العديد من مسائل نظرية الفضاءات الشعاعية. وهو يعتمد على اعتبارات هندسية حدسية لكن بالإمكان صياغته صياغة تحليلية صرفة.

ليكن L فضاءً شعاعياً حقيقياً، ولتكن x ، y نقطتين من هذا الفضاء. نسمي قطعة (أو مجالاً) مغلقة تصل النقطتين x وَ y في L مجموعة كل العناصر من الشكل:

$$\alpha x + \beta y$$

حيث:

$$0 \leq \alpha \text{ وَ } 0 \leq \beta \text{ وَ } \alpha + \beta = 1$$

إذا حذفنا من المجال المغلق طرفيه x وَ y نحصل، تعريفاً، على مجال مفتوح.

نقول عن مجموعة $M \subset L$ إنها محدبة إذا كان المجال الذي يصل النقطتين x وَ y محتوياً في M وذلك مهما كانت النقطتان x وَ y في M.

النواة $J(E)$ لمجموعة $E \subset L$ هي تعريفاً مجموعة النقاط $x \in E$ التي تتمتع بالخاصية التالية:

من أجل كل نقطة $y \in L$ ، يوجد عدد $0 < \varepsilon = \varepsilon(y)$ بحيث $x + ty \in E$ من أجل $|t| < \varepsilon$.

تسمى كل مجموعة محدبة نواتها غير خالية حقلاً محدباً.

أمثلة 1. في الفضاء الإقليدي ذي الأبعاد الثلاثة، نجد أن المكعب والكرة

ورباعي الوجوه ونصف الفضاء حقول محدبة. ونجد في نفس الفضاء أن القطعة المستقيمة والمستوى والمثلث مجموعات محدبة وليست حقولاً محدبة.

2. نعتبر في فضاء التوابع المستمرة على القطعة $[a, b]$ مجموعة التوابع التي تحقق:

$$|f(t)| \leq 1$$

إن هذه المجموعة محدبة، ذلك أنه إذا كان: $|f(t)| \leq 1$ وَ $|g(t)| \leq 1$ فإن لدينا: $|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leq \alpha + \beta = 1$ من أجل $\alpha + \beta = 1$ وَ α، $0 \leq \beta$.

تمرين. هل هذه المجموعة حقل محدب.

3. إن كرة الوحدة في l_2، أي مجموعة النقاط $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ التي تحقق: $\sum x_n^2 \leq 1$، حقل محدب. تتألف نواتها من النقاط x المحققة للشرط $\sum x_n^2 < 1$.

4. إن متوازي السطوح الأساسي π في l_2 مجموعة محدبة لكنها ليست حقلاً محدباً. ذلك لأنه إذا كان $x \in \pi$ فمعناه أن: $|x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ من أجل كل $n = 1, 2, \ldots$. نضع

$$y_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$$

ليكن $x + ty_0 \in \pi$ أي أن: $|x_n + \frac{t}{n}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ عندئذٍ:

$$|\frac{t}{n}| \leq |x_n + \frac{t}{n}| + |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

ومنه $t = 0$، وبالتالي فإن نواة المجموعة π خالية.

تمرين. لتكن Φ مجموعة النقاط $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ المنتمية للفضاء: l_2 والمحققة للشرط $\sum n^2 x_n^2 \leq 1$. برهن على أن Φ مجموعة محدبة لكنها ليست حقلاً محدباً.

إذا كانت M مجموعة محدبة فإن نواتها $J(M)$ محدبة أيضاً. لرؤية ذلك نعتبر x وَ y في $J(M)$ وَ $z = \alpha x + \beta y$ حيث α وَ $0 \leq \beta$ وَ $\alpha + \beta = 1$.

من أجل $L \ni a$ معطى، يمكن إيجاد عددين $\varepsilon_1 > 0$ وَ $\varepsilon_2 > 0$ بحيث تكون النقطتان $x + t_1 a$ وَ $y + t_2 a$ في المجموعة M من أجل: $|t_1| < \varepsilon_1$ وَ $|t_2| < \varepsilon_2$، وبالتالي فإن النقطة:

$$\alpha(x + ta) + \beta(y + ta) = z + ta$$

تنتمي إلى M أيضاً من أجل:

$|t| < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$، أي أن $z \in J(M)$.

نثبت الآن خاصية هامة تمتع بها المجموعات المحدبة.

نظرية 1. إن تقاطع كل جماعة مجموعات محدبة مجموعة محدبة.

البرهان. لتكن $M = \bigcap_{\alpha} M_\alpha$، حيث M_α مجموعات محدبة. نعتبر من جهة أخرى نقطتين x وَ y كيفيتين في M. إن المجال الذي يصل هاتين النقطتين ينتمي إلى كل مجموعة من المجموعات M_α، وبالتالي فهو ينتمي إلى M. إذن فإن M مجموعة محدبة.

نلاحظ أن تقاطع الحقول المحدبة (الذي يمثل مجموعة محدبة) لا يسوي بالضرورة حقلاً محدباً (إبحث عن مثال لذلك).

من أجل كل مجموعة A في فضاء شعاعي L توجد مجموعة تمثل أصغر مجموعة محدبة تحوي A، وهذه المجموعة هي تقاطع كل المجموعات المحدبة التي تحوي A (نلاحظ أنه توجد دوماً مجموعة محدبة على الأقل تحوي A؛ مثلاً، الفضاء L بأكمله). تسمى أصغر مجموعة محدبة تحوى A المغلف المحدب للمجموعة A.

نعتبر مثالاً هاماً للمغلف المحدب. لتكن: $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ نقاطاً من فضاء شعاعي كيفي. نقول عن هذه النقاط أنها مستقلة إذا كانت الأشعة $x_2 - x_1$، $x_3 - x_1$، ...، $x_{n+1} - x_1$ مستقلة خطياً. (إن ذلك يكافئ القول بأن العلاقتين: $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0$ وَ: $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$ تستلزمان: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$).

يسمى المغلف المحدب للنقاط المستقلة $x_1, \dots, x_{n+1}$ بُسَيِّطاً ذي بعد n ؛ تسمى النقاط $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ رؤوس البسيّط. نلاحظ أن بسيّطاً بعده 0 عبارة عن نقطة؛ وأن بسيّطاً بعده 1 مجال، وأن بسيّطاً بعده 2 مثلث، وأن بسيّطاً بعده 3 رباعي وجوه.

إذا كانت النقاط $x_1, \dots, x_{n+1}$ مستقلة فإن الأمر كذلك فيما يخص كل مجموعة جزئية من هذه النقاط، فإذا أخذنا $k + 1$ نقطة من هذه النقاط $(n > k)$ نجد أنها تولد بسيّطاً بعده k، يسمى وجهاً بعده k للبسيّط المولد عن الـ n نقطة المعطاة. نرى مثلاً أن رباعي وجوه رؤوسه e_1, e_2, e_3, e_4 له أربعة وجوه أبعادها2 معرّفة، على التوالي، بثلاثيات الرؤوس (e_2, e_3, e_4)، (e_1, e_3, e_4)، (e_1, e_2, e_4)، (e_1, e_2, e_3)، وله ستة وجوه أبعادها 1 (وهي حروف أي أضلاع) وله أربعة وجوه أبعادها 0 (وهي رؤوس).

نظرية 2. إن البسيّط المعرّف برؤوسه : $x_1, \dots, x_{n+1}$ هي مجموعة كل النقاط التي يمكن كتابتها على الشكل :

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \quad , \alpha_k \geq 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 \qquad (1)$$

البرهان. من السهل أن نتأكد من أن المجموعة S المؤلفة من النقاط التي تكتب على الشكل (1) تشكل مجموعة محدبة تحوي النقاط $x_1, \dots, x_{n+1}$. من جهة أخرى، فإن كل مجموعة محدبة تحوى هذه النقاط تحوي حتماً كل النقاط ذات الشكل (1). وبالتالي، فإن S يمثل أصغر مجموعة محدبة تحوي النقاط $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$.

2. التابعيات المحدبة. يرتبط مفهوم المجموعة المحدبة ارتباطاً قوياً بمفهوم التابعية المحدبة البالغ الأهمية.

تعريف. نقول عن تابعية غير سالبة p، معرّفة على فضاء شعاعي حقيقي L، إنها محدبة إذا كان :

1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ من أجل كل عنصرين x وَ y في L .

2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ من أجل كل $x \in L$ وَ $0 < \alpha$.

إننا لا نطلب أن تكون القيمة $p(x)$ منتهية من أجل كل العناصر $x \in L$ ، بعبارة أخرى فإننا نقبل أن تكون $p(x) = +\infty$ من أجل بعض العناصر $x \in L$. نسوق فيما يلي أمثلة لتابعيات محدبة.

1. يمثل طول شعاع في الفضاء الإقليدي ذي n بعداً $\mathbf{R}^n$ ، تابعية محدبة. ذلك أن الشرط الأول يعني بأن طول مجموع شعاعين أصغر من مجموع طوليهما (المتراجحة المثلثية) ؛ أما فيما يخص الشرط الثاني فهو ناتج مباشرة من تعريف طول شعاع في $\mathbf{R}^n$.

2. ليكن M فضاء التوابع المحدودة x على مجموعة كيفية S ولتكن s_0 نقطة ثابتة من S . عندئذٍ تكون :

$$p_{s_0}(x) = |x(s_0)|$$

تابعية محدبة.

3. ليكن m فضاء المتتاليات العددية المحدودة $x = (x_1, x_2, ..., x_n ...)$ إن التابعية :

$$p(x) = \sup_n |x_n|$$

محدبة.

3. تابعية مينكوفسكي (Minkowski).

ندرس الآن الصلة الموجودة بين التابعيات المحدبة والمجموعات المحدبة.

نظرية 3. إذا كانت p تابعية محدبة على الفضاء الشعاعي L وَ k عدداً موجباً فإن المجموعة :

$$E = \{x, p(x) \leq k\}$$

محدبة. إذا كانت التابعية p منتهية أينما كان فإن E يصبح حقلاً محدباً نواته هي المجموعة :

$$\{x, p(x) < k\}$$

(وهذه النواة تحوي حتماً النقطة 0) .

البرهان. إذا كان x وَ $y \in E$ وَ $\alpha + \beta = 1$ ، حيث α وَ $\beta \geq 0$ فإن :

$$p(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\, p(x) + \beta p(y) \leq k$$

أي أن E مجموعة محدبة. نفرض الآن بأن التابعية p منتهية ، $p(x) < k$ ؛ عندئذٍ من أجل $t > 0$ وَ $y \in L$ لدينا :

$$p(x \pm ty) \leq p(x) + tp(\pm y)$$

إذا كان : $p(-y) = p(y) = 0$ فإن : $x \pm ty \in E$ من أجل كل t ؛ أما إذا كان واحد من العددين ، على الأقل ، $p(y)$ وَ $p(-y)$ يخالف 0 فإننا نجد $x \pm ty \in E$ من أجل :

$$t < \frac{k - p(x)}{\max(p(y), p(-y))}$$

نختار قيمة معينة لِـ k ، مثلاً $k = 1$. عندئذٍ تعرّف كل تابعية محدبة ومنتهية p حقلاً محدباً $E = \{x, p(x) \leq 1\}$ يحقق $0 \in J(E)$ ، وذلك بطريقة وحيدة في L . بخصوص القضية العكسية ، نعتبر حقلاً محدباً E نواته تحوي النقطة 0. حينئذٍ تصبح :

$$p_E(x) = \text{Inf}\{r : \frac{x}{r} \in E, r > 0\} \tag{2}$$

تابعية محدبة ومنتهية. نسمي هذه التابعية تابعية مينكوفسكي للحقل المحدب E .

لنثبت أن تابعية مينكوفسكي (2) محدبة. من أجل كل $x \in L$ نجد أن العنصر $\frac{x}{r}$ ينتمي إلى E إذا كان r كبيراً بكفاية ؛ وبالتالي فإن قيمة $p_E(x)$ المعرّفة بالمساواة (2) غير سالبة ومنتهية. إذا كان $t > 0$ وَ $y = tx$ فإن :

$$p_E(y) = \text{Inf}\ \{r > 0 : \frac{y}{r} \in E\} = \text{Inf}\ \{r > 0 : \frac{tx}{r} \in E\} = \tag{3}$$

$$= \text{Inf}\ \{tr' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\} = t \cdot \text{Inf}\ \{r' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\}$$

$$= t\, p_E(x)$$

لتكن الآن x_1 وَ $x_2 \in L$ و $\varepsilon > 0$ كيفياً. نختار العددين r_i $(i = 1, 2)$ بحيث :

$$p_E(x_i) < r_i < p_E(x_i) + \varepsilon$$

عندئذٍ : $\frac{x_i}{r_i} \in E$. نضع : $r = r_1 + r_2$ ؛ فتصبح النقطة :

$$\frac{x_1 + x_2}{r} = \frac{r_1\, x_1}{rr_1} + \frac{r_2\, x_2}{rr_2}$$

منتمية إلى القطعة ذات الطرفين : $\frac{x_1}{r_1}$ وَ $\frac{x_2}{r_2}$.

من خاصية تحدب E نستنتج أن هذه القطعة محتواة في E ؛ بصفة خاصة فإن النقطة $\frac{x_1 + x_2}{r}$ تنتمي إلى E . وبالتالي :

$$p_E(x_1 + x_2) \leq r = r_1 + r_2 < p_E(x_1) + p_E(x_2) + 2\varepsilon$$

لما كان العدد $\varepsilon > 0$ كيفياً، فإن :

$$p_E(x_1 + x_2) \leq p_E(x_1) + p_E(x_2) \tag{4}$$

نلاحظ أن العلاقتين (3) وَ (4) تعنيان بالضبط أن التابعية $p_E(x)$ محدبة.

إذا كانت المجموعة E محدبة وتحوي النقطة 0 فإن المساواة (2) تعرّف تابعية $p_E(x)$ محدبة لكنها ليست حتماً منتهية.

تمرين. نقول عن مجموعة A من الفضاء الشعاعي L إنها ماصة إذا استطعنا، من أجل كل $x \in L$، إيجاد عدد $\alpha > 0$ بحيث : $x \in \lambda A$ من أجل كل العناصر $\lambda \geq \alpha$. برهن على أن كل مجموعة محدبة A تكون ماصة إذا وفقط إذا كانت تابعية مينكوفسكي لهذه المجموعة منتهية.

4. نظرية هان - باناخ (Hahn-Banach)

ليكن L فضاءً شعاعياً حقيقياً وَ L_0 فضاءً جزئياً كيفياً من L . لتكن، من جهة أخرى، f_0 تابعية خطية معرّفة على الفضاء الجزئي L_0 . نقول عن تابعية f معرّفة على الفضاء L بأكمله أنه تمديد أو امتداد للتابعية f_0 إذا كان :

$$f(x) = f(x_0) \ , \ \forall x \in L_0$$

تُطرح مسألة تمديد تابعية، في الكثير من الأحيان، في التحليل. تلعب النظرية التالية دوراً أساسياً في كل هذه المسائل :

نظرية 4 (هان - باناخ) . لتكن p تابعية محدبة ومنتهية، معرّفة على الفضاء الشعاعي الحقيقي L ، وليكن L_0 فضاءً جزئياً شعاعياً من L .

إذا كانت f_0 تابعية خطية على L_0 محدودة من الأعلى (في L_0) بالتابعية $p(x)$ أي :

$$f_0(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in L_0 \tag{5}$$

فإنه يمكن تمديد f_0 بطريقة تجعلنا نحصل على تابعية خطية f على L ، محدودة من الأعلى بِـ$p(x)$ أينما كان في L .

البرهان. لنثبت أنه إذا كان $L_0 \neq L$ فإننا نستطيع تمديد التابعية f_0 إلى فضاء جزئي L' يحوي L_0 مع الإحتفاظ بالشرط (5). ليكن z عنصراً كيفياً من L لاينتمي إلى L_0 وليكن L' الفضاء الجزئي المولد عن L_0 وَ z . أن كل عنصر من L' يكتب على الشكل :

$$tz + x \ , \ x \in L_0$$

إذا رمزنا بِـf' للتمديد المطلوب للتابعية f_0، إلى الفضاء L' ، فإن :

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f_0(x)$$

أو، إذا وضعنا $f'(z) = c$:

$$f'(tz+x)=tc+f_0(x)$$

نختار الآن c بحيث يكون الشرط (5) محققاً على L' ، أي بحيث :

$$f_0(x)+tc\leq p(x+tz)$$

من أجل كل العناصر $x\in L_0$ وكل الأعداد الحقيقية t .

إذا كان $t>0$ فإن هذه المتراجحة تكافئ الشرط :

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c\leq p\left(\frac{x}{t}+z\right) \tag{6}$$

أو :

$$c\leq p\left(\frac{x}{t}+z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right)$$

أما إذا كان $t<0$ فإنها تكافئ الشرط :

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c\geq -p\left(-\frac{x}{t}-z\right) \tag{7}$$

أو :

$$c\geq -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right)$$

لنثبت وجود عدد c يحقق هذين الشرطين. ليكن y' وَ y'' عنصرين كيفيين من L_0 . عندئذٍ :

$$-f_0(y'')+p(y''+z)\geq -f_0(y')-p(-y'-z) \tag{8}$$

ينتج ذلك من المتراجحة :

$$\begin{aligned} f_0(y'')-f_0(y')\leq p(y''-y')&=p\big((y''+z)-(y'+z)\big)\\ &\leq p(y''+z)+p(-y'-z)\end{aligned}$$

نضع :

$$c''=\operatorname*{Inf}_{y''}\big(-f_0(y'')+p(y''+z)\big)$$
$$c'=\sup_{y'}\big(-f_0(y')-p(-y'-z)\big)$$

لما كان العنصران y' وَ y'' كيفيين ينتج من (8) أن $c''\geq c'$. باختيار c بحيث :

$$c' \leq c \leq c''$$

نعرّف التابعية f' على L بالدستور:

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x)$$

وهي تابعية تحقق الشرط (5).

وهكذا نكون قد بيّنا أنه إذا كانت تابعية f_0 معرّفة على فضاء جزئي $L \supset L_0$ وحققت على L_0 الشرط (5) فإننا نستطيع تمديدها إلى فضاء جزئي L' أكبر من L_0 مع الاحتفاظ بالشرط (5).

إذا استطعنا إختيار جملة قابلة للعد من العناصر $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ في L، تولد الفضاء L بأكمله فإننا ننشئ التابعية على L بالتدريج، باعتبار متتالية الفضاءات الجزئية:

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \dots$$

(يرمز $\{L^{(k)}, x_{k+1}\}$ هنا لأصغر فضاء شعاعي جزئي في L يحوي $L^{(k)}$ وَ x_{k+1}). لما كان كل عنصر $x \in L$ يقع في فضاء جزئي $L^{(k)}$ فإن التابعية تمتد إلى كل الفضاء L.

في الحالة العامة (أي عندما يستحيل إيجاد مجموعة قابلة للعد من العناصر المولدة للفضاء L) يستعمل هذا البرهان توطئة زورن.

إن المجموعة $\mathcal{F}$ المؤلفة من كل امتدادات التابعية f_0 المحققة للشرط (5) مجموعة مرتبة، وتقبل كل مجموعة جزئية مرتبة كلية $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ حداً أعلى. إن الحد الأعلى هذا ليس سوى التابعية المعرّفة على اتحاد ساحات تعريف التابعيات $f' \in \mathcal{F}_0$، والمطابقة لكل تابعية f' على ساحة تعريفها. إذا اعتمدنا على توطئة زورن وجدنا أن المجموعة $\mathcal{F}$ تقبل عنصراً أعظمياً f؛ إن العنصر الأعظمي هذا هو بالضبط التابعية المطلوبة. ذلك أن هذه التابعية تمدد بالفعل التابعية المعطاة f_0 وتحقق الشرط (5) وهي معرفة على كل الفضاء L، لأنه لو لم يكن الأمر كذلك لمددناها (بالطريقة المشار اليها أعلاه) إلى فضاء جزئي أكبر من الفضاء الجزئي الذاتي المعرّفة عليه، الأمر

الذي يجعل f غير مساوية للعنصر الأعظمي لِـ $\mathcal{F}$. بذلك ينتهي البرهان على النظرية.

نعتبر الآن نظرية هان - باناخ في حالة فضاء شعاعي عقدي. نقول عن تابعية غير سالبة p معرّفة على الفضاء الشعاعي العقدي L أنها محدبة إذا كان:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$
$$p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$$

من أجل كل x وَ y في L وكل عدد عقدي λ.

نظرية 4a. لتكن p تابعية محدبة ومنتهية على الفضاء الشعاعي العقدي L ولتكن f_0 تابعية خطية معرّفة على فضاء جزئي كيفي $L_0 \subset L$ تحقق على هذا الفضاء الجزئي الشرط:

$$|f_0(x)| \leq p(x) \quad , \quad \forall \, x \in L_0$$

توجد عندئذٍ تابعية خطية f معرّفة على كل الفضاء L وتحقق الشرطين:

$$|f(x)| \leq p(x) \qquad \forall \, x \in L$$
$$f(x) = f_0(x) \qquad \forall \, x \in L_0$$

البرهان. نرمز بِـ L_R وَ L_{0R} للفضاءين L وَ L_0 بإعتبارهما فضاءين شعاعيين حقيقيين. من الواضح أن p تابعية محدبة ومنتهية على L_R وأن $f_{0R}(x) = Re f_0(x)$ تابعية خطية حقيقية على L_{0R} تحقق الشرط:

$$|f_{0R}(x)| \leq p(x)$$

ولذا فهي تحقق الشرط:

$$f_{0R}(x) \leq p(x)$$

إذا إستندنا إلى النظرية 4 نلاحظ أنه توجد تابعية خطية حقيقية f_R معرفة على كل الفضاء L_R وتتمتع بالشرطين:

$$f_R(x) \le p(x) \quad \forall x \in L_R(= L)$$
$$f_R(x) = f_{0R}(x) \quad \forall x \in L_{0R}(= L_0)$$

من الواضح أن $-f_R(x) = f_R(-x) \le p(-x) = p(x)$ بحيث أن :

$$|f_R(x)| \le p(x) \ , \ \forall x \in L_R(= L) \tag{9}$$

لنعرّف تابعية f على L بوضع :

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix)$$

(نستعمل النتيجة التي تنص على أن L فضـاء شعاعي عقدي ، ولذا فإن الضرب في عدد عقدي معرّف في هذا الفضـاء) . نتأكد بسرعة من أن f تابعية خطية عقدية على L تحقق :

$$f(x) = f_0(x) \ , \ \forall x \in L_0$$
$$Re\, f(x) = f_R(x) \ , \ \forall x \in L$$

يبقى أن نبين بأن $|f(x)| \le p(x)$ من أجل كل $x \in L$. لنفرض العكس ؛ عندئذٍ نجد : $|f(x_0)| > p(x_0)$ من أجل $x_0 \in L$. لنكتب العدد العقدي $f(x_0)$ على الشكل $f(x_0) = \varrho e^{i\varphi}$ مع $\varrho > 0$ ، ونضع $y_0 = e^{-i\varphi}x_0$. لدينا عندئذٍ :

$$f_R(y_0) = Re\, f(y_0) = Re\,[e^{-i\varphi} f(x_0)]$$
$$= \varrho > p(x_0) = p(y_0)$$

وهذا يناقض الشرط (9) . انتهى البرهان .

تمرين . اثبت أنه يمكن إهمال الشرط القائل أن التابعية p منتهية في نظرية هان – باناخ .

5. فصل المجموعات المحدبة في فضـاء شعاعي

ليكن L فضـاءً شعاعياً حقيقياً ، وَ M وَ N مجموعتين جزئيتين من L . نقول عن تابعية خطية f معرفة على L أنها تفصل M وَ N إذا وجد عدد C بحيث :

$$f(x) \geq C \quad \forall\, x \in M$$
$$f(x) \leq C \quad \forall\, x \in N$$

من هذا التعريف نستنتج مباشرة هاتين القضيتين :

1) تفصل التابعية الخطية f المجموعتين M وَ N إذا وفقط إذا فصلت المجموعتين $M - N$ وَ $\{0\}$ (أي مجموعة العناصر من الشكل $x - y$ حيث $M \ni x$ وَ $N \ni y$ ، وَ النقطة 0) .

2) تفصل التابعية الخطية f المجموعتين M وَ N إذا وفقط إذا فصلت المجموعتين $M - x$ و $N - x$ من أجل كل $L \ni x$.

من نظرية هان - باناخ نحصل بسهولة على النظرية التالية الخاصة بفصل المجموعات المحدبة في فضـاء شعاعي، مع الملاحظة أن لهذه النظرية العديد من التطبيقات.

نظرية 5. لتكن M وَ N مجموعتين محدبتين غير متقاطعتين في فضـاء شعاعي حقيقي L . إذا كانت إحداهمـا على الأقل، M مثلاً، تقبل نواة غير خالية (أي إذا كان M حقلاً محدباً) فإنه توجد تابعية خطية غير منعدمة f معرّفة على L تفصل M وَ N .

البرهان. يمكن أن نفرض أن النقطة 0 تنتمي إلى نواة المجموعة M ، وهذا لا يمس عمومية النظرية (إذا كان الأمر عكس ذلك نعتبر المجموعتين $M - x_0$ وَ $N - x_0$ ، حيث x_0 نقطة كيفية من نواة M) . لتكن y_0 نقطة كيفية من المجموعة N ؛ إن $y_0 -$ تنتمي إلى نواة المجموعة $M - N$ ، و 0 تنتمي إلى نواة المجموعة $K = M - N + y_0$. لما كانت المجموعتان M وَ N غير متقاطعتين، فإن $M - N \not\ni 0$ وَ $K \not\ni y_0$. لتكن p تابعية مينكوفسكي للمجموعة K . عندئذٍ $1 \leq p(y_0)$ (لأن $K \not\ni y_0$) . ندخل التابعية الخطية :

$$f_0(\alpha\, y_0) = \alpha\, p(y_0)$$

إنها معرفة على الفضـاء الجزئي ذي البعد 1 ، المؤلف من العناصر ذات الشكل $\alpha\, y_0$ والمحققة للشرط :

$$f_0(\alpha\, y_0) \leq p(\alpha\, y_0)$$

لأن $p(\alpha\, y_0) = \alpha\, p(y_0)$ من أجل $\alpha \geq 0$ وَ : $f_0(\alpha\, y_0) = \alpha f_0(y_0) < 0 < p(\alpha\, y_0)$ من أجل $\alpha < 0$. من نظرية هان باناخ نرى أن التابعية f_0 يمكن تمديدها بشكل يجعلنا نحصل على تابعية خطية f معرّفة على كل الفضاء L وتحقق على الشرط $f(y) \leq p(y)$. ومنه ينتج أن $f(y) \leq 1$ من أجل $y \in K$، وَ $f(y_0) \geq 1$. وهكذا يتضح أن التابعية f تفصل المجموعتين K وَ $\{y_0\}$ وبالتالي المجموعتين $M - N$ وَ $\{0\}$. إذن فإن f تفصل المجموعتين M وَ N. انتهى برهان النظرية.

§ 3. الفضاءات النظيمية.

كنا قد درسنا في الفصل الثاني الفضاءات الطوبولوجية وبصفة خاصة الفضاءات المترية، أي الفضاءات التي عرفنا من أجل عناصرها، بطريقة ما، مفهوم «القرب». ثم تعرضنا في الفقرات الأولى من هذا الفصل إلى دراسة الفضاءات الشعاعية. اعتبرنا هذه المفاهيم لحد الآن منفصلة عن بعضها البعض. إلّا أن ما يجري في التحليل عموماً هو أننا لا نعتبر فضاءات مزودة بعمليتي جمع وضرب في عدد، فحسب، بل نعتبر في نفس الوقت طوبولوجيات على هذه الفضاءات، أي فضاءات شعاعية طوبولوجية. هناك صنف هام من هذه الفضاءات يتمثل في الفضاءات النظيمية. تطورت نظرية هذه الفضاءات بفضل أعمال س. باناخ وأعمال العديد من الرياضيين الآخرين.

1. تعريف وأمثلة فضاءات نظيمية

تعريف 1. ليكن L فضاءً شعاعياً. نقول عن التابعية المحدبة والمنتهية p، المعرفة على L أنها نظيم إذا تمتعت بالشرطين الإضافيين التاليين:

1) $p(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ من أجل كل α.

إذن فالنظيم على L هو، بالرجوع إلى تعريف التحدب، تابعية منتهية تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1) $0 \leq p(x)$ والعنصر الوحيد الذي يحقق المساواة $p(x) = 0$ هو $x = 0$.

2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ من أجل x وَ y في L.

3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ من أجل كل عدد α.

تعريف 2. يسمى الفضاء الشعاعي L المزود بنظيم فضاء نظيمياً. نرمز لنظيم عنصر $x \in L$ بِـ $\|x\|$.

يمكن اعتبار كل فضاء نظيمي كفضاء متري مزود بالمسافة:

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

تنتج صحة مسلمات الفضاء المتري مباشرة من الخواص (1)، (2)، (3) الواردة في تعريف النظيم. وهكذا نرى أن كل المفاهيم وكل النتائج المعروضة في الفصل الثاني الخاصة بالفضاءات المترية تشمل أيضاً الفضاءات النظيمية.

يسمى كل فضاء نظيمي تام فضاء باناخ أو B – فضاء إذا رغبنا في الاختصار.

أمثلة للفضاءات النظيمية. هناك العديد من الفضاءات المعتبرة في الفصل الثانى كأمثلة لفضاءات مترية (وكذا في § 1 من هذا الفصل ضمن الأمثلة لفضاءات شعاعية) التي يمكن تزويدها ببنية طبيعية لفضاء نظيمي.

1. المستقيم $\mathbf{R}^1$ يصبح فضاءً نظيمياً إذا وضعنا $\|x\| = |x|$ من أجل كل $x \in \mathbf{R}^1$.

2. إذا وضعنا في الفضاء الحقيقي ذي n بعداً $\mathbf{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \tag{1}$$

من أجل كل عنصر $\mathbf{R}^n \ni x = (x_1, ..., x_n)$ ، نلاحظ أن كل خواص النظيم متوفرة. كما يتضح أن الدستور :

$$\varrho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

يعرّف على $\mathbf{R}^n$ نفس المسافة التي إعتبرناها على هذا الفضاء. يمكن في هذا الفضاء إدخال النظيم :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{2}$$

أو النظيم :

$$\|x\|_0 = \max_{1 \le k \le n} |x_k| \tag{3}$$

يعرّف هذان النظيمان على $\mathbf{R}^n$ مسافتين كنا اعتبرناهما ضمن المثالين 4 وَ 5 من الفقرة 1 ، 1§ ، الفصل 2. ليست هناك أية صعوبة في التأكد من مسلمات النظيم في هاتين الحالتين.

نستطيع في الفضاء العقدي ذي n بعداً $\mathbf{C}^n$ إدخال النظيم :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

أو أحد النظيمين (2) وَ (3).

3. ندخل في الفضاء $C[a, b]$ المؤلف من التوابع المستمرة على القطعة $[a, b]$ نظيمياً بواسطة الدستور :

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)| \tag{4}$$

إن المسافة الموافقة لهذا النظيم كانت قد اعتبرت ضمن المثال 6، الفقرة 1، § 1، الفصل 2.

4. ليكن m فضاء المتتاليات العددية المحدودة:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

نضع:

$$\|x\| = \sup_n |x_n| \tag{5}$$

من الواضح أن الشروط الثلاثة الواردة في تعريف النظيم محققة هنا.

إن المسافة المستخرجة من هذا النظيم على m تطابق تلك التي اعتبرناها (المثال 9، الفقرة 1، § 1، الفصل 2).

2. الفضاءات الجزئية من فضاء نظيمي.

كنا سمينا فضاءً جزئياً من فضاء شعاعي L (غير مزود بطوبولوجيا) كل مجموعة جزئية غير خالية $L_0 \subset L$ بحيث يكون: $\alpha x + \beta y \in L_0$ من أجل x وَ y في L_0. في حالة الفضاءات النظيمية، نجد أن الفضاءات الجزئية الأكثر أهمية هي الفضاءات الجزئية المغلقة، أي الفضاءات الجزئية التي تحوي كل نقاط تراكمها. نشير إلى أن كل فضاء جزئي من فضاء نظيمي ذي بعد منته فضاء مغلق حتماً (برهن على ذلك!). أما في حالة فضاء ذي بعدٍ غير منته فإن الأمر ليس كذلك. فالفضاء $C[a, b]$، مثلاً، المؤلف من التوابع المستمرة على $[a, b]$ والمزود بالنظيم (4)، نجد فيه بأن كثيرات الحدود تشكل فضاءً جزئياً غير مغلق[1].

---

(1) بالاستناد إلى نظرية فيرشتراس (Weierstrass) القائلة أن كل تابع مستمر على قطعة مستقيمة يساوي نهاية متتالية من كثيرات الحدود متقاربة بانتظام، يتضح أن ملاصق الفضاء الجزئي المؤلف من كثيرات الحدود في $C[a, b]$ يساوي $C[a, b]$.

مثال آخر: نلاحظ في الفضاء m المؤلف من المتتاليات العددية المحدودة أن المتتاليات التي لا تحوي سوى عدد منته من الحدود غير المنعدمة تشكل فضاءً جزئياً. إلاّ أن هذا الفضاء الجزئي ليس مغلقاً من أجل النظيم (5). لأن ملاصقه يحوي، مثلاً، المتتالية $(1, 1/2, ..., 1/n, ...)$.

سنقتصر في معظم الحالات على الفضاءات الجزئية المغلقة؛ ولذلك فإنه من الطبيعي أن نجري تغييراً في المصطلح الذي تبنيناه في § 1. نسمي من الآن فصاعداً فضاءات جزئية من فضاء نظيمي الفضاءات الجزئية المغلقة لا غير؛ بصفة خاصة نسمي فضاءً جزئياً مولداً عن جملة معطاة من العناصر $\{x_\alpha\}$ أصغر الفضاءات الجزئية المغلقة التي تحوي $\{x_\alpha\}$. نقول أيضاً أن هذا الفضاء الجزئي هو الملاصق الخطي للجملة $\{x_\alpha\}$. تسمى مجموعة (غير مغلقة) العناصر التي تتمتع بالخاصية التالية: إذا انتمى لها عنصران x وَ y فإن كل عبارة خطية $\alpha x + \beta y$ لهذين العنصرين تنتمي لها أيضاً، تسمى هذه المجموعة منوعة خطية.

نقول عن جملة عناصر منتمية لفضاء نظيمي E إنها تامة إذا كان الفضاء الجزئي (المغلق!) الذي تولده يطابق E. من الواضح، مثلاً، أن الاستناد إلى نظرية فيرشتراس يبين بأن جملة التوابع $1, t, t^2, ..., t^n ...$ تامة في فضاء التوابع المستمرة $C[a, b]$.

تمارين 1. ليكن R فضاء لباناخ وَ $B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ...$ متتالية كرات مغلقة متداخلة في R. أثبت أن هذه المتتالية ذات تقاطع غير خالٍ (لا نلزم أنصاف أقطار هذه الكرات بالسعي إلى 0؛ راجع التمرين 3، الفقرة 2، § 3، الفصل 2). أعط مثالاً لمتتالية مجموعات غير خالية ومتداخلة ومحدبة ومغلقة ومحدودة وتقاطعها خالٍ.

2. ليكن R فضاء لباناخ بعده غير منته. أثبت أن بعده الجبري (راجع التمرين 3، الفقرة 3، § 1، الفصل 3) غير قابل للعد.

3. ليكن R فضاء لباناخ وَ M فضاء جزئياً مغلقاً من R. نعتبر فضاء النسبة $P = R/M$ وندخل على هذا الفضاء نظيماً بوضع:

$$\|\xi\| = \operatorname*{Inf}_{x \in \xi} \|x\|$$

وذلك من أجل كل صف ملامس ξ. برهن على أن التابعية المعرفة بهذه الطريقة نظيم على P وأن الفضـاء P تام من أجل هذا النظيم.

4. ليكن R فضـاءً شعاعياً نظيمياً، برهن على القضـايا التالية:

1) كل منوعة خطية ذات بعد منته في R مغلقة.

2) إذا كان M وَ N فضـاءً جزئياً كيفياً وفضـاءً جزئياً بعده منته على التوالي، في R، فإن مجموعهما:

$$M + N = \{x : x = y + z \ , \ y \in M \ , \ z \in N\}$$

فضـاء شعاعي جزئي (وبالتالي فإن $M + N$ مغلق!)، أعطِ مثالاً لفضـاءين شعاعيين جزئيين من l_2 مجموعهما غير مغلق.

3) لتكن Q مجموعة محدبة مفتوحة في R ولتكن $Q \not\ni x_0$، يوجد عندئذٍ مستو مصعد مغلق يمر بالنقطة x_0 ولا يلتقي بِـ Q.

5. نقول عن نظيمين $\|\cdot\|_1$ وَ $\|\cdot\|_2$ معرفين على الفضـاء الشعاعي R إنهما متكافئان إذا وجد ثابتان a وَ $0 < b$ بحيث $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$ وذلك من أجل كل $R \ni x$. نفرض أن الفضـاء R ذو بعدٍ منته، أثبت عندئذٍ أن كل النظيمات المعرّفة على R متكافئة.

§ 4. الفضـاءات الإقليدية

1. تعريف فضـاء إقليدي. هناك طريقة شهيرة لتعريف نظيم على فضـاء شعاعي وهي المتمثلة في تعريف جداء سلمي على هذا الفضـاء. نذكّر أن الجداء السلمي على فضـاء شعاعي حقيقي R هو، تعريفاً، تابع حقيقي (x, y) معرّف من أجل كل ثنائية عنصرين x وَ y في R ويحقق الشروط التالية:

1) $(x, y) = (y, x)$.

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

4) $(x, x) \geq 0$ ، والمساواة $(x, x) = 0$ لا تتحقق إلا إذا كانت $x = 0$.

يسمى كل فضاء شعاعي مزود بجداء سلمي فضاءً إقليدياً . ندخل على كل فضاء إقليدي R نظيماً بواسطة الدستور :

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

من السهل أن نتأكد من أن مسلمات النظيم محققة هنا ، وذلك انطلاقاً من الخواص (1) ، (2) ، (3) ، (4) للجداء السلمي .

نرى فعلاً بأن المسلمتين (1) وَ (3) للنظيم (الفقرة 1 ، § 3) بديهيتان ؛ أما فيما يخص المسلمة (2) (المتراجحة المثلثية) فهي ناتجة من متراجحة كوشي - بونياكوفسكي :

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (1)$$

التي نبرهن عليها فيما يلي .

ليكن λ عدداً حقيقياً كيفياً . نضع :

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y)$$
$$= \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|y\|^2$$

نلاحظ أن هذه العبارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية في λ . وبما أنها تساوي المربع السلمي لشعاع فإن لدينا دوماً $f(\lambda) \geq 0$. وبالتالي فإن مميز كثير الحدود هذا سالب أو منعدم ، تلك هي النتيجة التي تعبر عليها متراجحة كوسي - بونياكوفسكي(1) .

نشير إلى أن الجمع والضرب في عدد والضرب السلمي في فضاء إقليدي عمليات مستمرة ؛ بعبارة أوضح إذا كان $x_n \to y$ وَ $y_n \to y$ (بمفهوم التقارب النظيمي) و $\lambda_n \to \lambda$ (كمتتالية عددية) فإن :

$$x_n + y_n \to x + y$$
$$\lambda_n x_n \to \lambda x$$
$$(x_n, y_n) \to (x, y)$$

يعتمد البرهان على هذه النتائج على استعمال متراجحة كوشي - بونياكوفسكي (1)؛ نترك ذلك للقارئ في سياق التمارين.

يسمح تواجد الجداء السلمي في R بتعريف نظيم (أي طول) شعاع وكذا زاوية شعاعين؛ وعلى وجه التحديد فإن الزاوية φ لشعاعين x و y معرفة بالدستور:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \qquad (2)$$

بالإستناد إلى متراجحة كوشي - بونياكوفسكي (1) فإن الطرف الأيمن من المساواة (2) له قيمة مطلقة أصغر من 1 أو تساويه، وهو الأمر الذي يجعل الدستور (2) يعرّف بالفعل زاوية φ، $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ مهما كان الشعاعان غير المنعدمين x وَ y.

إذا كان $(x, y) = 0$ فإن الدستور (2) يعطي $\varphi = \frac{\pi}{2}$، نقول في هذه الحالة أن الشعاعين x وَ y متعامدان.

نقول عن جملة أشعة غير منعدمة $\{x_\alpha\}$ من R أنها متعامدة إذا كان:

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \ , \ \alpha \neq \beta$$

إذا كانت أشعة الجملة $\{x_\alpha\}$ متعامدة فإنها مستقلة خطياً. ذلك لأن من المساواة:

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \dots + a_n x_{\alpha_n} = 0$$

نستنتج أن:

$$(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + \dots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) = 0$$

وذلك لأن الجملة $\{x_\alpha\}$ متعامدة. لكن: $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$ ومنه: $a_i = 0$ من أجل $i = 1, 2, \dots, n$.

إذا كانت الجملة المتعامدة $\{x_\alpha\}$ تامة (أي إذا كان أصغر فضاء جزئي مغلق يحوي هذه الجملة يساوي R) فإننا نسمي هذه الجملة أساساً متعامداً. إذا كان، بالإضافة إلى ذلك، نظيم كل عنصر يساوي 1 نقول أن الجملة $\{x_\alpha\}$ أساس متعامد ومتجانس. بصفة عامة، كل جملة $\{x_\alpha\}$ (تامة أو غير تامة) بحيث:

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 , & \alpha \neq \beta \\ 1 , & \alpha = \beta \end{cases}$$

تسمى جملة متعامدة ومتجانسة. من الواضح أنه إذا كانت $\{x_\alpha\}$ جملة متعامدة فإن:

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$$

جملة متعامدة ومتجانسة.

2. أمثلة. نعتبر بعض الأمثلة لفضاءات إقليدية ولأسس متعامدة في هذه الفضاءات.

1. يمثل الفضاء الحسابي الذي بعده $\mathbf{R}^n{:}n$ المؤلف من جمل الأعداد الحقيقية:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

فضاءً إقليدياً عند تزويده بالعمليتين المعتادتين للجمع والضرب في عدد وبالجداء السلمي:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \tag{3}$$

تمثل الأشعة:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

أساساً متعامداً ومتجانساً.

2. إن الفضاء l_2 المؤلف من العناصر :

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

حيث :

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

والمزود بالجداء السلمي :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, y_i \tag{4}$$

فضاء إقليدي. ذلك أن تقارب السلسلة الواردة في الطرف الأيمن من (4) ناتج من المتراجحة (4) من 1 §، الفصل 2، أما الخاصيات من (1) إلى (4) للجداء السلمي فهي محققة هنا مباشرة. إن أبسط أساس متعامد ومتجانس في l_2 هو الأساس المشكل من الأشعة.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, ...) \\ e_2 = (0, 1, 0, ...) \\ e_3 = (0, 0, 1, ...) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{5}$$

من السهل التأكد من تعامد وتجانس هذه الجملة. بالإضافة إلى ذلك فإن الجملة (5) تامة. لرؤية ذلك نعتبر شعاعاً كيفياً $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ من l_2، وَ $x^{(n)} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$. عندئذٍ يكون $x^{(n)}$ عبارة خطية في الأشعة $e_1, ..., e_n$ وَ :

$$\|x^{(n)} - x\| \to 0$$

لما $n \to \infty$.

3. إن الفضاء $C_2(a, b)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ والمزود بالجداء السلمي :

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \tag{6}$$

فضاء إقليدي. من بين الأسس المتعامدة لهذا الفضاء هناك أساس هام يتمثل في الجملة المثلثية للتوابع :

$$\frac{1}{2}\ ,\ \cos n\frac{2\pi t}{b-a}\ ,\ \sin n\frac{2\pi t}{b-a} \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{7}$$

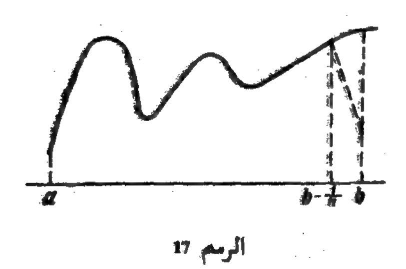
نتأكد بسهوله من أن هذه الجملة متعامدة.

إذا اعتبرنا توابع مستمرة على قطعة مستقيمة طولها 2π، على $[-\pi, \pi]$ مثلاً، فإن الجملة المثلثية الموافقة لها تتشكل من التوابع:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \cos nt\ ,\ \sin nt \qquad (n = 1, 2, ...)$$

إن الجملة (7) تامة. ذلك لأن نظرية فيرشتراس تبين أن كل تابع φ مستمر على $[a, b]$ ويأخذ نفس القيمة عند a وَ b يمكن الحصول عليه كنهاية لمتتالية متقاربة بانتظام مكونة من كثيرات حدود مثلثية، أي عبارة خطية لعناصر الجملة (7). إن مثل هذه المتتالية متقاربة حتماً، بمفهوم النظيم، نحو φ في الفضاء $C^2[a, b]$.

إذا كان f تابعاً كيفياً من $C^2[a, b]$ فإنه يمكننا إعتباره كنهاية (بمفهوم نظيم الفضاء $C^2[a, b]$) لمتتالية توابع φ_n كل منها يساوي f على المجال $[a, b - \frac{1}{n}]$ ويساوي تابعاً خطياً على $[b - \frac{1}{n}, b]$ ويأخذ نفس القيمة عند a وَ b (الرسم 17). وبالتالي نستطيع تقدير (أو تقريب) كل عنصر من $C^2[a, b]$ بالدقة التي نريدها (باعتبار مسافة هذا الفضاء) وذلك بواسطة عبارة خطية لعناصر الجملة (7)، ومنه يأتي أن الجملة (7) تامة.



الرسم 17

3. وجود أسس متعامدة. المعامدة

نقتصر الآن وحتى نهاية هذا البند على الفضاءات الإقليدية القابلة للفصل (أي تلك التي تحوي مجموعة كثيفة أينما كان وقابلة للعد) . نلاحظ أن كل الفضاءات المذكورة في الأمثلة السابقة قابلة للفصل (أثبت ذلك!) . نستطيع إنشاء فضاء إقليدي غير قابل للفصل بالطريقة التالية. نعتبر على المستقيم العددي كل التوابع x المنعدمة ماعدا في نقاط قابلة للعد أو عددها منته والتي لها مجموع : $\sum x^2(t)$ (على هذه النقاط) قيمته منتهية. نعرّف على هذا الفضاء عمليتي الجمع والضرب في عدد كما نعرّف جمع وضرب التوابع، ونزوده بالجداء السلمي المعرّف بالدستور :

$$(x, y) = \sum x(t)\, y(t)$$

حيث يشمل المجموع السابق كل النقاط t بحيث $x(t)\, y(t) \neq 0$. نترك للقارئ مهمة البرهان على أنه لا توجد أية مجموعة جزئية كثيفة أينما كان وقابلة للعد في هذا الفضاء. نشير إلى أن هذا الفضاء تام.

وقابلة للعد في هذا الفصل. نشير إلى أن هذا الفضاء تام.

ليكن R فضاء إقليدياً قابلاً للفصل. لنثبت أن كل جملة متعامدة في هذا الفضاء قابلة للعد على الأكثر (أي أنها قابلة للعد أو عدد عناصرها منته) .

نستطيع، مع الإحتفاظ بعمومية النتيجة، أن نفرض بأن الجملة المتعامدة المعتبرة $\{\varphi_\alpha\}$ متجانسة (إذا لم يكن الأمر كذلك نعوضها بالجملة : $\left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}$) حينئذٍ :

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2} \;, \quad \alpha \neq \beta$$

نعتبر مجموعة الكرات $B(\varphi_\alpha, 1/2)$. إن هذه الكرات غير متقاطعة.

إذا كانت المجموعة القابلة للعد $\{\psi_n\}$ كثيفة أينما كان في R فإن كل كرة من هذه الكرات تحوي على الأقل عنصراً من $\{\psi_n\}$. وبالتالي فإن مجموعة هذه الكرات (وبالتالي، مجموعة العناصر φ_α) قابلة للعد على الأكثر.

في كل فضاء من الفضاءات الإقليدية المقدمة كأمثلة سابقاً، أشرنا إلى أساس متعامد. لنثبت، في هذا الإطار، النظرية العامة التالية وهي تماثل نظرية وجود أساس متعامد في فضاء إقليدي بعده n.

نظرية 1 (المعامدة).

لتكن $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ (8)

جملة مستقلة خطياً من عناصر فضاء إقليدي R. توجد عندئذٍ في R جملة عناصر:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \qquad (9)$$

تتمتع بالشروط التالية:

1) الجملة (9) متعامدة ومتجانسة.

2) كل عنصر φ_n عبارة خطية للعناصر: $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n \quad , \quad a_{nn} \neq 0$$

3) يمكن كتابة كل عنصر من الجملة (9) معرّف بالشروط الثلاثة السابقة بطريقة وحيدة بتقدير العامل ± 1.

البرهان. نبحث عن العنصر φ_1 على النحو:

$$\varphi_1 = a_{11} f_1$$

يعين المعامل a_{11} هنا بواسطة الشرط:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1$$

الذي يعطي:

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}$$

من الواضح أن φ_1 معرّف بطريقة وحيدة (بتقدير الإشارة). نفرض

أننا أنشأنا العناصر φ_k $(k < n)$ المحققة للشروط الثلاثة الواردة في النظرية. عندئذٍ يمكن كتابة f_n على الشكل:

$$f_n = b_{n1}\varphi_n + \dots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n$$

حيث:

$$(h_n, \varphi_k) = 0 \quad , \quad k < n$$

وذلك لأن المعاملات b_{nk} (وبالتالي العنصر h_n أيضاً) معينة بطريقة وحيدة بواسطة الشروط:

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \dots - b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) =$$
$$= (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0$$

من البديهي أن $(h_n, h_n) > 0$ (لأن المساواة $(h_n, h_n) = 0$ تناقض الفرض القائل أن الجملة (8) مستقلة خطياً). نضع:

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}$$

من الإنشاء السابق لِـ φ_n يتضح أن h_n، وبالتالي φ_n أيضاً، عبارة خطية في $f_1, \dots, f_n$ أي أن:

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \dots + a_{nn} f_n , \qquad a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$$

بالإضافة إلى ذلك:

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1$$
$$(\varphi_n, \varphi_k) = 0) \quad (k < n)$$

وَ:

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n \qquad (b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0)$$

أي أن φ_n يحقق شروط النظرية.

يسمى الانتقال من الجملة (8) إلى الجملة (9) التي تحقق الشروط الثلاثة (1)، (2)، (3) طريقة (أو منوال) المعامدة.

من الواضح أن الفضاءين الجزئيين المولدين عن الجملتين (8) و (9) متطابقان . وبالتالي فإن هذين الفضاءين تامان في آن واحد أو غير تامين .

نتيجة . يوجد في كل فضاء إقليدي قابل للفصل R أساس متعامد ومتجانس .

لرؤية ذلك نعتبر مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان في R :
$\psi, \psi_2, ..., \psi_n, ...$. نختار في هذه المجموعة جملة تامة من العناصر المستقلة خطياً $\{f_n\}$. من أجل ذلك يكفي حذف كل عنصر ψ_k يكتب على شكل عبارة خطية في ψ_i مع $i < k$ من المتتالية $\{\psi_n\}$. نطبق بعد ذلك طريقة المعامدة على الجملة التامة المؤلفة من العناصر المستقلة خطياً التي نحصل عليها ، فننشئ أساساً متعامداً ومتجانساً .

تمارين 1. أعطِ مثالاً لفضاء إقليدي (غير قابل للفصل) لا يقبل أي أساس متعامد . اثبت أن كل فضاء إقليدي تام (ولوكان غير قابل للفصل) يقبل أساساً متعامداً ومتجانساً .

2. أثبت ، في كل فضاء إقليدي تام (ولو كان غير قابل للفصل) ، أن كل متتالية مجموعات غير خالية ومتداخلة ومحدبة ومغلقة ومحدودة ، لها تقاطع غير خالٍ (راجع تمارين الفقرة 2 ، 3 § ، الفصل 2 ، والفقرة 2 ، 3 § ، الفصل 3) .

4. متراجحة بسل (Bessel) . الجمل المتعامدة المغلقة

باختيار أساس متعامد ومتجانس $e_1, e_2, ..., e_n$ في الفضاء الإقليدي ذي n بعداً $\mathbf{R}^n$ ، نستطيع كتابة كل شعاع $x \in \mathbf{R}^n$ على الشكل :

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \tag{10}$$

حيث :

$$c_k = (x, e_k) \tag{11}$$

لنحاول تعميم النشر (10) إلى حالة فضاء إقليدي بعده غير منته. لتكن:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{12}$$

جملة متعامدة ومتجانسة في الفضاء الإقليدي R وليكن f عنصراً كيفياً في R. نلحق بكل عنصر $f \in R$ متتالية الأعداد:

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

التي نسميها إحداثيات أو معاملات فوريي (Fourier) لعنصر f بالنسبة للجملة $\{\varphi_k\}$، كما نلحق به السلسلة (الشكلية، مؤقتاً):

$$\sum_k c_k \varphi_k \tag{14}$$

التي نسميها سلسلة فوريي العنصر f بالنسبة للجملة $\{\varphi_n\}$.

هناك سؤال يطرح نفسه: هل السلسلة (14) متقاربة، أي هل أن متتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة متقاربة (بمفهوم مسافة الفضاء R) نحو نهاية؟ ثم إذا كانت متقاربة فهل يتساوى مجموعها مع العنصر الأول f؟

قبل الإجابة عن هذين السؤالين نعتبر المسألة التالية: من أجل n معطى، اختر المعاملات α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ بحيث تكون المسافة بين f والمجموع:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{15}$$

أصغرية. لنحسب هذه المسافة. لما كانت الجملة (12) متعامدة ومتجانسة فإن:

$$\|f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)$$

$$= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j\right)$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2$$

من الواضح أن هذه العبارة تأخذ قيمتها الأصغرية في الحالة التي يكون فيها حدها الأخير منعدماً، أي من أجل:

$$\alpha_k = c_k \; (k = 1, 2, ..., n) \tag{16}$$

لدينا في هذه الحالة:

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \tag{17}$$

كنا برهنا، من أجل n معطى، أن أقرب المجاميع (15) لِـ f هو المجموع الجزئي لسلسلة فوريي لِـ f. يمكن تفسير هذه النتيجة هندسياً بالطريقة التالية. العنصر:

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

متعامد على كل العبارات الخطية من الشكل:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k$$

أي أنه متعامد على الفضاء الجزئي المولد عن العناصر: $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ إذا وفقط إذا كان الشرط (16) محققاً (تأكد من ذلك!). وهكذا نرى بأن النتيجة المحصل عليها تعميم للنظرية الشهيرة في الهندسة الأولية، وهي تنص على أن العمودي المُسْقَط من نقطة معطاة على مستقيم أو على مستوٍ، أقصر قطعة مستقيم مائل يمر بالنقطة المعتبرة.

لما كان $\|f - S_n\|^2 \geq 0$ في جميع الحالات ينتج من المساواة (17) أن:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2$$

إن n هنا كيفي والطرف الأيمن لا يتعلق بِـ n؛ وبالتالي فإن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ متقاربة ولدينا:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2 \qquad (18)$$

تسمى هذه المتراجحة متراجحة بسل (Bessel). وهي تعني، من الناحية الهندسية، بأن مجموع مربعات مساقط الشعاع f على مناح متعامدة مثنى مثنى أصغر من مربع طول الشعاع f أو يساويه.

لندخل المفهوم الهام التالي:

تعريف 1. نقول عن الجملة المتعامدة والمتجانسة (12) إنها مغلقة إذا كانت لدينا المساواة التالية:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 \qquad (19)$$

من أجل كل $f \in R$. نسمي العلاقة (19) علاقة بارسفال (Parseval).

ينتج من العلاقة (17) أن الجملة (12) مغلقة إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لسلسلة فوريي $\sum_{k=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ متقاربة نحو f من أجل كل $f \in R$.

إن مفهوم الجملة المتعامدة والمتجانسة المغلقة مرتبط إرتباطاً وثيقاً بمفهوم الجملة التامة الذي أدخلناه سابقاً.

نظرية 2. كل جملة متعامدة ومتجانسة وتامة في فضاء إقليدي قابل للفصل R جملة مغلقة، والعكس بالعكس.

البرهان. لتكن $\{\varphi_n\}$ جملة متعامدة ومتجانسة ومغلقة، عندئذٍ نرى أن متتالية المجاميع الجزئية لسلسلة فوريي لكل $f \in R$ متتالية متقاربة نحو f. وهذا يعني أن مجموعة العبارات الخطية لعناصر الجملة $\{\varphi_n\}$ كثيفة أينما كان في R، أي أن الجملة $\{\varphi_n\}$ تامة. والعكس بالعكس، إذا كانت الجملة $\{\varphi_n\}$ تامة فإن كل عنصر $f \in R$ يمكن تقديره بالدقة التي نريد، بواسطة عبارة خطية:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

لعناصر الجملة $\{\varphi_n\}$. يوفر المجموع الجزئي:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

لسلسلة فوريي لِـf تقريباً (أو تقديراً) لا يقل دقة عن السابق. وبالتالي فإن السلسلة:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

متقاربة نحو f، وهو ما يؤدي إلى صحة علاقة بارسفال.

برهنا في الفقرة السابقة أنه توجد في كل فضاء إقليدي قابل للفصل جمل متعامدة ومتجانسة وتامة. بما أن الجمل المتعامدة والمتجانسة المغلقة هي الجمل المتعامدة والمتجانسة التامة فإن وجود جمل متعامدة ومغلقة في R لا يتطلب برهاناً جديداً، ويمكن اعتبار أمثلة الجمل المتعامدة والمتجانسة التامة الواردة في الفقرة السابقة بمثابة أمثلة لجمل مغلقة.

فرضنا لحد الساعة أن كل الجمل المتعامدة المعتبرة متجانسة (أي أن نظيمات عناصرها تساوي 1)، ورغم ذلك فإنه يمكن صياغة مفاهيم معاملات فوريي وسلاسل فوريي الخ.، من أجل جمل متعامدة كيفية. لتكن $\{\varphi_n\}$ جملة متعامدة كيفية. نستطيع انطلاقاً من هذه الجملة إنشاء جملة متعامدة ومتجانسة مشكلة من العناصر:

$\psi_n = \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$. من أجل كل $f \in R$ لدينا:

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|}(f, \varphi_n)$$

وَ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

حيث :

$$a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \tag{20}$$

تسمى المعاملات a_n المعرّفة بالدستور (20) معاملات فوريي العنصر f بالنسبة للجملة المتعامدة (غير المتجانسة) . بتعويض المعاملات c_n في المتراجحة (18) بقيمها $c_n = a_n \|\varphi_n\|$ المستنتجة من المساواة (20) نحصل على العلاقة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 a_n^2 \leq \|f\|^2 \tag{21}$$

التي تمثل متراجحة بسل لجملة متعامدة كيفية .

5. الفضاءات الإقليدية التامة . نظرية ريس فيشر (Riesz - Fisher) .

إعتبرنا منذ بداية الفقرة 3 الفضاءات الإقليدية القابلة للفصل وحدها ؛ نفرض من الآن فصاعداً أن كل الفضاءات المعتبرة تامة .

ليكن R فضاءً إقليدياً قابلاً للفصل وتاماً ، ولتكن $\{\varphi_n\}$ جملة متعامدة ومتجانسة كيفية (وإن كانت غير تامة) في R . من متراجحة بسل ينتج أنه لكي تكون الأعداد $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ معاملات فوريي لعنصر $f \in R$ ، يلزم أن تكون السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

متقاربة . والواقع أن هذا الشرط يصبح لازماً وكافياً في حالة اعتبار فضاء تام . ذلك ما ستوضحه النظرية التالية :

نظرية 3 (ريس فيشر Riesz - Fisher) . لتكن $\{\varphi_n\}$ جملة متعامدة ومتجانسة كيفية في فضاء إقليدي تام R ، ولتكن $c_1, c_2, ... c_n, ...$ أعداداً بحيث تكون السلسلة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{22}$$

متقاربة. يوجد عندئذٍ عنصر $f \in R$ بحيث :

$$c_k = (f, \varphi_k)$$

وَ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f,f) = \|f\|^2$$

البرهان. نضع :

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

عندئذٍ :

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \dots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2$$

بما أن السلسلة (22) متقاربة نستنتج، بمراعاة تمام R، أن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة نحو عنصر $f \in R$.

من جهة أخرى لدينا :

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i) \tag{23}$$

إن الحد الأول من المجموع الوارد في الطرف الأيمن يساوي c_i من أجل $i \leq n$، أما الحد الثاني فهو يؤول إلى الصفر لما $n \to \infty$ لأن :

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|$$

إن الطرف الأيسر من المساواة (23) لا يتعلق بِـ n؛ وبالتالي إذا إنتقلنا إلى النهاية $(n \to \infty)$ في هذه المساواة، نحصل على :

$$(f, \varphi_i) = c_i$$

بما أن تعريف f يعطي :

$$\|f - f_n\| \to 0 \ , \ (n \to \infty)$$

فإن :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f,f)$$

ذلك لأن :

$$(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k , f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k) = (f,f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

وهذا لما $n \to \infty$. انتهى برهان النظرية .

لنبرهن على النظرية المفيدة التالية .

نظرية 4. لكي تكون جملة متعامدة ومتجانسة $\{\varphi_n\}$ من عناصر فضاء إقليدي قابل للفصل وتام R تامة يلزم ويكفي ألّا يوجد في R أي عنصر غير منعدم متعامد على كل عناصر الجملة $\{\varphi_n\}$.

البرهان. نفرض أن الجملة $\{\varphi_n\}$ تامة ، وبالتالي ، مغلقة . إذا كان f متعامداً على كل عناصر الجملة $\{\varphi_n\}$ فإن كل معاملات فوريي لِـ f منعدمة . تعطي علاقة بارسفال في هذه الحالة :

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0$$

ومنه يأتي $f = 0$.

العكس بالعكس ، نفرض أن الجملة $\{\varphi_n\}$ غير تامة ، يوجد عندئذٍ في R عنصر $g \neq 0$ بحيث :

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \qquad (c_k = (g, \varphi_k))$$

من نظرية ريس - فيشر ، نستنتج وجود عنصر $f \in R$ بحيث :

$$(f, \varphi_k) = c_k$$

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

إن العنصر $f-g$ متعامد على كل φ_i. من المتراجحة :

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

يأتي أن : $f-g \neq 0$. انتهى البرهان.

تمارين 1. ليكن H فضاء إقليدياً تاماً (ولو كان غير قابل للفصل) ؛ توجد عندئذٍ في H جملة متعامدة ومتجانسة وتامة $\{\varphi_\alpha\}$ (راجع التمرين 1، الفقرة 3، § 4، الفصل 3) . برهن على صحة التفكيكين التاليين مهما كان $f \in H$:

$$f = \sum_\alpha (f, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha \ , \ \|f\| = \sum_\alpha (f, \varphi_\alpha)^2$$

حيث يحوي مجموع الطرف الأيمن من كل علاقة عدداً منتهياً أو قابلاً للعد من الحدود المنعدمة.

2 . نقول عن جملة أشعة $\{\varphi_\alpha\}$ من فضاء إقليدي R إنها كلية إذا لم توجد في R أشعة غير منعدمة متعامدة على كل العناصر φ_α.

تبين النظرية 4 أن كلية جملة أشعة في فضاء إقليدي تام تكافئ تمام هذه الجملة. اثبت وجود جمل كلية وغير تامة في فضاء غير تام.

6. فضاء هيلبرت (Hilbert). نظرية التشاكل.

نواصل دراسة الفضاءات الاقليدية التامة. نهتم، كما هو الحال أعلاه، بالفضاءات ذات الأبعاد غير المنتهية ونترك جانباً الفضاءات ذات الأبعاد المنتهية التي نجد دراسة معمقة لها في دروس الجبر الخطي. نفرض كما ورد أعلاه، وهذا أمر معتاد، أن كل فضاء من الفضاءات التي سنعتبرها يحوي مجموعة كثيفة أينما كان وقابلة للعد. ندخل التعريف التالي.

تعريف 2. يسمى كل فضاء إقليدي تام بعده غير منته فضاء هيلبرت[1] (أو هيلبرتي) (Hilbert) .

---

(1) تشريفاً للرياضي الألماني الشهير د. هيلبرت (1862-1943) الذي أدخل هذا المفهوم.

بعبارة أخرى، فإن فضاء لهيلبرت هو تعريفاً مجموعة H عناصرها: $f, g, ...$ ذات طبيعة كيفية تحقق الشروط (المسلمات) التالية:

I. H فضاء إقليدي (أي فضاء شعاعي مزود بجداء سلمي)

II. الفضاء H تام بمفهوم المسافة $\varrho(f, g) = \|f - g\|$.

III. بعد الفضاء H غير منته، أي من أجل كل عدد طبيعي n، يمكن إيجاد n عنصراً مستقلة خطياً.

نعتبر في معظم الأحيان فضاءات هيلبرت قابلة للفصل، أي فضاءات تحقق مسلمة أخرى بالإضافة إلى المسلمات السابقة.

IV. H قابل للفصل (أي أنه توجد في H مجموعة كثيفة أينما كان وقابلة للعد).

يشكل الفضاء l_2 مثالاً لفضاء هيلبرتي قابل للفصل.

نقتصر فيما يلي على اعتبار فضاءات هيلبرت القابلة للفصل.

نذكّر أننا نقول عن فضاءين إقليديين R وَ$\mathbf{R}^*$ أنهما متشاكلان إذا تمكنا من إنشاء تقابل بين عناصريهما بحيث إذا كان:

$$x \leftrightarrow x^*$$
$$y \leftrightarrow y^*$$

(حيث x وَy في R، وَ x^* وَy^* في R^*) فإن:

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$$
$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

وَ

$$(x, y) \leftrightarrow (x^*, y^*)$$

أي أن التشاكل بين الفضاءات الإقليدية تقابل يحتفظ بالعمليات الخطية في هذه الفضاءات ويحتفظ أيضاً بالجداء السلمي.

نعلم أن كل فضاءين إقليديين بعدهما n متشاكلان، وبالتالي فإن كلاً منهما متشاكل مع الفضاء الحسابي $\mathbf{R}^n$ (المثال 1، الفقرة 2). أما إذا كان بعد

الفضاءين غير منته فليس من الضروري أن يكونا متشكلين. إن الفضاءين l_2 و $C^2[a, b]$، مثلاً، غير متشاكلين. وهذا ناتج، مثلاً من كون l_2 فضاء تاماً أما $C^2[a, b]$ فهو غير تام.

ومع ذلك لدينا النظرية التالية.

نظرية 5. كل فضاءات هيلبرت القابلة للفصل متشاكلة فيما بينها.

البرهان. لنثبت أن كل فضاء لهيلبرت H متشاكل مع الفضاء l_2. وهذا يكفي للبرهان على النظرية. نختار في H جملة متعامدة ومتجانسة وتامة كيفية $\{\varphi_n\}$ ونلحق بكل عنصر $f \in H$ المتتالية $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ المؤلفة من معاملات فوريي لـf بالنسبة لهذه الجملة. لما كان: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ فإن المتتالية $(c_1, c_2, ... c_n, ...)$ عنصر من l_2. والعكس بالعكس، من نظرية ريس - فيشر نرى أن من أجل كل عنصر $(c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ يوجد عنصر $f \in H$ معاملاته لفوريي هي الأعداد $(c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ إن التطبيق المعرّف بهذه الطريقة من H في l_2 تقابلي. من جهة أخرى إذا كان:

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$$

وَ:

$$g \leftrightarrow (d_1, d_2, ,... d_n, ...)$$

لدينا:

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, ..., c_n + d_n, ...)$$

وَ:

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, ..., \alpha c_n, ...)$$

أي أن كل مجموع عنصرين يقابله مجموع العنصرين المقابلين، وأن جداء عنصر في عدد يقابله جداء العنصر المقابل في نفس العدد. أخيراً ينتج من علاقة بارسفال (Parseval) أن:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n d_n \qquad (24)$$

ذلك لأن :

$$(f,f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

$$(g,g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

وَ :

$$(f+g, f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

ومنه تـأتي المسـاواة (24). وهكـذا يتضح أن التقـابل الذي عرفنـاه بين عنـاصر الفضـاء H وعنـاصر الفضـاء l_2 تشاكـل.

تبين النظرية المثبتة هنا أنه يوجد فضـاء هيلبرت قابل للفصل، وحيد، بتقدير تشاكل (أي أن جملة المسلمات من 1 إلى IV تامة) وأنه يمكن اعتبار الفضـاء l_2 كـ «إنجاز ضمن إحداثيات» لذلك الفضـاء الوحيد، حالُه في ذلك حال الفضـاء الحسـابي $\mathbf{R}^n$ (المزود بالجداء السلمي $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$) المعتبر كـ «إنجاز ضمن إحداثيات» للفضـاء الإقليدي ذي n بعداً المعرَّف بواسطة مسلمات.

هناك إنجاز آخر لفضـاء هيلبرت (القابل للفصل) تعطيه متممة الفضـاء التابعي $C^2[a,b]$. لرؤية ذلك نلاحظ أنه من السهل التأكد من ان المتممة R^* لفضـاء إقليدي كيفي R (بمفهوم تعريف متممة فضـاء متري الوارد في § 3، الفصل 2) تصبح متمتعة ببنية فضـاء شعاعي إقليدي إذا ما مددنا بإستمرار إلى R^* العمليتين الخطيتين وعملية الضرب في عدد المعرفة في R، أي إذا وضعنا:

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n)$$

$$\alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n$$

وَ :

$$(x,y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n)$$

حيث $x_n \to x$ وَ $y_n \to y$ وَ $R \ni x_n$ وَ $R \ni y_n$. (من السهل إثبات وجود النهايات واستقلالها عن اختيار المتتاليتين $\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$) . إذن فإن متممة الفضاء $C^2[a, b]$ فضاء إقليدي تام؛ من الواضح أيضاً بأن بعده غير منته وبأنه قابل للفصل، وبالتالي فهو فضاء هيلبرت. سنعود ثانية إلى هذه المسألة ضمن الفصل 6 ونبين عندئذٍ أن العناصر التي ينبغي ضمها إلى $C^2[a, b]$ للحصول على فضاء تام، يمكن أن نعتبرها هي أيضاً توابع إلّا أنها غير مستمرة (وبعبارة أدق فإن التوابع هذه، توابع ذات مربعات قابلة للجمع بمفهوم لوبيغ (Lebesgue)) .

7. الفضاءات الجزئية، التعامد، المجموع المباشر

طبقاً للتعاريف العامة الواردة في 3§، نسمي منوعة خطية في فضاء هيلبرت H مجموعة L من عناصر H بحيث إذا كان f وَ g في L فإن: $L \ni \alpha f + \beta g$ من أجل كل عددين α وَ β. نسمي كل منوعة خطية مغلقة فضاءً جزئياً. لنعتبر بعض الأمثلة لفضاءات جزئية من فضاء هيلبرت.

1. ليكن h عنصراً كيفياً من H . تشكل مجموعة العناصر $H \ni f$ المتعامدة على h فضاءً جزئياً من H .

2. نفرض أن H ينجز l_2 أي أن عناصر H متتاليات عددية $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ بحيث:

$$\sum_k x_k^2 < \infty .$$

تشكل مجموعة المتتاليات الخاضعة للشرط $x_1 = x_2$ فضاء جزئياً من H .

3. نفرض من جديد أن H مُنْجَز من طرف l_2 . تشكل العناصر: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ المحققة لِـ $x_n = 0$ من أجل $n = 2, 4, 6, \ldots$ (و: x_n كيفي من أجل $n = 1, 3, 5, \ldots$) فضاءً جزئياً من H .

نوصي القارئ بأن يتأكد من أن مجموعات الأشعة المشار اليها في الأمثلة السابقة تشكل فضاءات جزئية.

يمثل كل فضاء جزئي من فضاء هيلبرت إما فضاءً إقليدياً بعده منته وإما فضاء هيلبرتيا. نلاحظ بالفعل أن الفضاء الجزئي يحقق المسلمات I ، II ، III ، أما المسلمة IV فتأتي من التوطئة التالية.

توطئة. كل فضاء جزئي R' من فضاء متري قابل للفصل R هو نفسه قابل للفصل.

البرهان. لتكن:

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$$

مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان في R. نضع:

$$a_n = \inf_{\eta \in R'} \varrho(\xi_n, \eta)$$

ومنه نستنتج وجود نقطة $\eta_{n,m} \in R'$ بحيث:

$$\varrho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}$$

وهذا من أجل كل عددين طبيعيين n وَ m.

ليكن $\varepsilon > 0$ وَ $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$ ؛ من أجل كل $\eta \in R'$ يوجد n بحيث:

$$\varrho(\xi_n, \eta) < \frac{\varepsilon}{3}$$

وبالتالي:

$$\varrho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

ليكن $\varrho(\eta, \eta_{n,m}) < \varepsilon$ أي أن المجموعة المنتهية أو القابلة للعد $\{\eta_{n,m}\}$ $(n, m = 1, 2, ...)$ كثيفة أينما كان في R'.

تتمتع الفضاءات الجزئية من فضاء هيلبرت ببعض الخواص الذاتية (التي لا تقوم في حالة فضاء جزئي من فضاء نظيمي كيفي). وهي مرتبطة بتواجد الجداء السلمي وبمفهوم التعامد الذي يعتمد على الجداء السلمي.

بتطبيق طريقة المعامدة على متتالية قابلة للعد وكثيفة أينما كان من عناصر فضاء جزئي كيفي من فضاء هيلبرت نحصل على النظرية التالية:

نظرية 6. توجد في كل فضاء جزئي M من فضاء هيلبرت H جملة متعامدة ومتجانسة $\{\varphi_n\}$ ملاصقها الخطي يساوي M.

ليكن M فضاءً جزئياً من فضاء هيلبرت H. نرمز بـ:

$$M^\perp = H \ominus M$$

لمجموعة العناصر $g \in H$ المتعامدة على كل العناصر $f \in M$ ونبرهن أن $M^\perp$ فضاء جزئي من H أيضاً. إن خطية $M^\perp$ بديهية لأن من $(g_1, f) = (g_2, f) = 0$ يأتي أن $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = 0$. للبرهان على أن $M^\perp$ مغلق نعتبر متتالية عناصر $g_n \in M^\perp$ متقاربة نحو g. لما كان:

$$(g, f) = \lim_{n \to \infty} (g_n, f) = 0$$

من أجل كل $f \in M$ فإن g عنصر من $M^\perp$.

يسمى الفضاء الجزئي $M^\perp$ المكمل المتعامد للفضاء الجزئي M نحصل من النظرية 6 على النظرية التالية بسهولة:

نظرية 7. إذا كان M فضاءً جزئياً شعاعياً (مغلقاً!) من الفضاء H فإن كل عنصر $f \in H$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $f = h + h'$ حيث $h \in M$ وَ $h' \in M^\perp$.

البرهان. نبرهن في البداية على وجود ذلك التحليل. نختار في M جملة متعامدة ومتجانسة تامة $\{\varphi_n\}$ ونضع:

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad , \quad c_n = (f, \varphi_n)$$

لما كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ متقاربة (حسب متراجحة بارسفال) فإن العنصر h موجود وهو ينتمي إلى M. نضع:

$$h' = f - h$$

من الواضح أن لدينا:

$$(h', \varphi_n) = 0$$

من أجل كل n ؛ وبما أن كل عنصر $\mathcal{C}$ من M يكتب على الشكل :

$$\mathcal{C} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

نستنتج أن :

$$(h', \mathcal{C}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(h', \varphi_n) = 0$$

وهذا يعني أن $h' \in M^\perp$.

نفرض الآن ، بالإضافة إلى التحليل $f = h + h'$ ، وجود تحليل ثانٍ

$$f = h_1 + h_1' \ , \ h_1 \in M \ , \ h_1' \in M^\perp$$

عندئذٍ من أجل كل n ، لدينا :

$$(h_1, \varphi_n) = (f, \varphi_n) = c_n$$

ومنه : $h_1 = h$ وَ $h_1' = h'$.

يمكن استخلاص بعض النتائج المفيدة من النظرية 7.

نتيجة. 1. إن المكمل المتعامد للمكمل المتعامد لفضاء جزئي شعاعي M يساوي M .

وهكذا نستطيع الكلام عن فضاءين جزئيين في H متكاملين عكسياً . إذا كان M و $M^\perp$ فضاءين جزئيين من H متكاملين عكسياً وَ $\{\varphi_n\}$ $\{\varphi_n'\}$ جملتين متعامدتين تامتين (في M وَ $M^\perp$ على التوالي) فإن إتحاد $\{\varphi_n'\}$ وَ $\{\varphi_n'\}$ يعطي جملة متعامدة تامة في الفضاء H بأكمله . ومنه تأتي النتيجة التالية :

نتيجة 2. يمكن توسيع كل جملة متعامدة ومتجانسة من عناصر H بحيث نحصل على جملة تامة في H .

إذا كانت الجملة $\{\varphi_n\}$ منتهية فإن عدد عناصرها يساوي بعد الفضاء الجزئي M المولد عن $\{\varphi_n\}$ ويساوي البعد المرافق للفضاء الجزئي $M^\perp$. ومنه تأتي نتيجة أخرى .

نتيجة 3. إن المكمل المتعامد لفضاء جزئي بعده منته n فضاء بعده المرافق n، والعكس بالعكس.

إذا استطعنا كتابة كل شعاع $f \in H$ على الشكل $f = h + h'$ مع $h \in M$ وَ $h' \in M^{\perp}$ (حيث يرمز $M^{\perp}$ للمكمل المتعامد لِـM) نقول أن H مجموع مباشر للفضاءين الجزئيين المتعامدين M وَ $M\perp$، ونكتب:

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

من الواضح أن مفهوم المجموع المباشر يمكن تعميمه إلى حالة عدد منته كيفي وحتى إلى مجموعة قابلة للعد من الفضاءات الجزئية؛ بعبارة أدق، نقول أن H مجموع مباشر لفضاءاته الجزئية $M_1, M_2, ..., M_n, ...$:

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n \oplus ...$$

إذا كان:

1) الفضاءات الجزئية M_i متعامدة مثنى مثنى، أي أن كل شعاع من M_i متعامد على كل شعاع من M_k من أجل $i \neq k$.

2) يمكن كتابة كل عنصر $f \in H$ على الشكل:

$$f = h_1 + h_2 + ... + h_n + ... \ , \ h_n \in M_n$$

وإذا كان عدد الفضاءات الجزئية M_n غير منته، فإن السلسلة $\sum_n \|h_n\|^2$ متقاربة. نتأكد بسهولة من أنه إذا وجد مثل ذلك التحليل لِـf، فإنه وحيد وَ:

$$\|f\|^2 = \sum_n \|h_n\|^2$$

نستطيع، إلى جانب المجموع المباشر لفضاءات جزئية، الكلام عن المجموع المباشر لعدد منته أو لمجموعة قابلة للعد من فضاءات هيلبرت.

بعبارة أوضح إذا كان H_1 وَ H_2 فضاءين لهيلبرت نعرّف مجموعهما المباشر H بالطريقة التالية: عناصر الفضاء H هي كل الثنائيات (h_1, h_2)

التي تحقق $h_1 \in H_1$ وَ $h_2 \in H_2$ ، حيث نعرّف الجداء السلمي لثنائيتين بالدستور :

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1) + (h_2, h'_2)$$

من الواضح أن الفضاء H يقبل فضاءين جزئيين متعامدين عناصرهما هي ، على التوالي ، الثنائيات ذات الشكل $(h_1, 0)$ و $(0, h_2)$ ؛ نستطيع أن نطابق ، بصفة طبيعية ، بين الأول منهما والفضاء الجزئي H_1 وبين ثانيهما والفضاء الجزئي H_2 .

نعرّف ، بطريقة مماثلة ، المجموع المباشر لعدد منته كيفي من فضاءات هيلبرت . نعرّف المجموع : $H = \sum \oplus H_n$ لمجموعة قابلة للعد من الفضاءات $H_1, H_2, ..., H_n, ...$ كما يلي : عناصر الفضاء H هي كل المتتاليات ذات الشكل :

$$h = (h_1, h_2, ..., h_n, ...) \qquad h_n \in H_n$$

المحققة لِـ :

$$\sum_n \|h_n\|^2 < \infty$$

أما الجداء السلمي (h, g) لعنصرين h وَ g من H فهو يساوي :

$$\sum_n (h_n, g_n)$$

8. الخاصيات المميزة للفضاءات الإقليدية

لنعالج المسألة التالية . ليكن R فضاءً نظيمياً . ما هي الشروط الإضافية التي ينبغي أن تتوفر في النظيم المعرّف على R ليصبح الفضاء R إقليدياً؟ أي أننا نبحث عن الشروط التي تمكننا من تعريف النظيم على R بواسطة جداء سلمي . بعبارة أخرى ، كيف نميز الفضاءات الإقليدية من بين الفضاءات النظيمية؟ تحدد النظرية التالية ذلك التمييز :

نظرية 8. لكي يكون فضاء نظيمي R إقليدياً يلزم ويكفي أن يكون :

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \qquad (25)$$

مهما كان العنصران f وَ g من R .

تعبّر هذه المساواة في فضاء إقليدي عن خاصية شهيرة، هي خاصية متوازي الأضلاع: مجموع مربعي قطريّ متوازي الأضلاع يساوي مجموع مربعات كافة أضلاعه. نتأكد من هذه المساواة بسهولة:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = (f+g, f+g) + (f-g, f-g) =$$

$$= 2(f,f) + 2(g,g) = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

وهكذا يتضح أن الشرط (25) لازم. لنثبت أنه كافٍ. نضع:

$$(f,g) = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\right) \tag{26}$$

ونثبت أنه إذا تحققت المساواة (25) فإن التابع (26) يحقق كل مسلمات الجداء السلمي. بما أن لدينا المساواة التالية من أجل $f=g$ ينتج أن:

$$(f,f) = \frac{1}{4}\left(\|2f\|^2 - \|f-f\|^2\right) = \|f\|^2 \tag{27}$$

وهذا هو بالضبط الجداء السلمي الذي يولد النظيم المعرّف على الفضاء R .

في البداية، نلاحظ انطلاقاً من (26) أن:

$$(f,g) = (g,f)$$

وهذا يعني أن الخاصية الأولى للجداء السلمي محققة. من جهة أخرى، وبفضل (27)، نستنتج أن الخاصية (4) محققة. لإثبات الخاصية (2) نعتبر التابع ذي الأشعة الثلاثة:

$$\Phi(f,g,h) = 4[(f+g,h) - (f,h) - (g,h)]$$

أي أن:

$$\Phi(f,g,h) = \|f+g+h\|^2 - \|f+g-h\|^2 - \tag{28}$$

$$- \|f+h\|^2 + \|f-h\|^2 - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2$$

ونثبت أنه مطابق للصفر. لدينا من (25):

$$\|f+g\pm h\|^2 = 2\|f\pm h\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f\pm h-g\|^2$$

بنقل ذلك إلى (28) نحصل على:

$$\Phi(f,g,h) = -\|f+h-g\|^2 + \|f-h-g\|^2 + \tag{29}$$

$$+\|f+h\|^2 - \|f-h\|^2 - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2$$

ثم نقسم (28) على 2 وكذا (29) فنحصل على:

$$\Phi(f,g,h) = \frac{1}{2}\left(\|g+h+f\|^2 + \|g+h-f\|^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\|g-h+f\|^2 + \|g-h-f\|^2\right) - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2$$

بفضل (25) نرى أن الحد الأول يساوي:

$$\|g+h\|^2 + \|f\|^2$$

والحد الثاني يساوي:

$$-\|g-h\|^2 - \|f\|^2$$

لدينا أخيراً:

$$\Phi(f,g,h) = 0$$

لنثبت الآن الخاصية (3) التي تعبر على تجانس الجداء السلمي. من أجل ذلك نثبّت f وَ g بطريقة كيفية ونعتبر التابع:

$$\varphi(c) = (cf,g) - c(f,g)$$

من (26) يأتي مباشرة:

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}\left(\|g\|^2 - \|g\|^2\right) = 0$$

وَ $\varphi(-1) = 0$، لأن $(-f,g) = -(f,g)$. ولذلك لدينا من أجل كل عدد صحيح n:

$$(nf,g) = (\operatorname{sgn} n(f+\ldots+f), g) = \operatorname{Sgn} n[(f,g)+\ldots+(f,g)]$$

$$= |n| \operatorname{sgn} n(f,g) = n(f,g)$$

أي أن : $\varphi(n) = 0$. من أجل p وَ q صحيحين وَ $q \neq 0$ لدينا :

$$\left(\frac{p}{q} f, g\right) = p\left(\frac{1}{q} f, g\right) = \frac{p}{q} \cdot q\left(\frac{1}{q} f, g\right) = \frac{p}{q} \ (f, g)$$

أي $\varphi(c) = 0$ من أجل كل عدد c ناطق ؛ لما كان التابع φ مستمراً ينتج أن :

$$\varphi(c) \equiv 0$$

أثبتنا إذن بأن التابع (f, g) يتمتع بكل خاصيات الجداء السلمي .

أمثلة 1. نعتبر الفضـاء ذي n بعداً $\mathbf{R}_p^n$ المزود بالنظيم :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

نلاحظ أن كل مسلمات النظيم محققة من أجل $p \geq 1$ ، على الرغم من أن $\mathbf{R}_p^n$ فضـاء إقليدي من أجل $p = 2$ فقط . لرؤية ذلك نعتبر في $\mathbf{R}_p^n$ شعاعين :

$$f = (1, 1, 0, 0, ..., 0)$$
$$g = (1, -1, 0, 0, ..., 0)$$

لدينا :

$$f + g = (2, 0, 0, ..., 0)$$
$$f - g = (0, 2, 0, ..., 0)$$

ومنه :

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p} \quad , \quad \|f + g\|_p = \|f - g\|_p = 2$$

الأمر الذي يثبت عدم صحة متطابقة متوازي الأضلاع (25) من أجل $p \neq 2$.

2. نعتبر فضـاء التوابع المستمرة على القطعة المستقيمة $[0, \frac{\pi}{2}]$. نضع :

$$f(t) = \cos t \quad , \quad g(t) = \sin t$$

لدينا :

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

وَ :

$$\|f+g\| = \max_{0\le t\le \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2}$$

$$\|f-g\| = \max_{0\le t\le \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1$$

نرى إذن :

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

وبالتالي يستحيل تعريف نظيم الفضاء $C[0, \pi/2]$ بواسطة جداء سلمي. من السهل أن نرى بأن فضاء التوابع المستمرة $C[a, b]$ ليس فضاءً إقليدياً، مهما كانت القطعة $[a, b]$.

9. الفضاءات الإقليدية العقدية

بعد أن رأينا الفضاءات الإقليدية الحقيقية يمكننا النظر في الفضاءات الإقليدية العقدية (أي الفضاءات الشعاعية العقدية المزودة بجداء سلمي). لكن المسلمات الأربعة الواردة في تعريف الجداء السلمي (في بداية هذا البند § 4) لا يمكن أن تتحقق كلها في آن واحد. ذلك أن المسلمتين (1) وَ (3) تستلزمان :

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x)$$

ومنه يأتي، باعتبار $\lambda = i$ ؛

$$(ix, ix) = -(x, x)$$

وهذا يعني أن المربعين السلميين للشعاعين x وَ ix لا يمكن أن يكونا موجبين في آن واحد. بعبارة أخرى فإن المسلمتين (1) وَ(3) لا ينسجمان مع المسلمة (4). ولذا وجب إجراء بعض التغيير في المسلمات المذكورة في حالة فضاء عقدي. نعرّف الجداء السلمي في فضاء عقدي كتابع عددي (قيمه عقدية) لشعاعين يحقق الشروط التالية :

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

4) $(x, x) \geq 0$ ؛ وَ $(x, x) > 0$ إذا وفقط إذا كان $x \neq 0$.

(وهكذا غيرنا المسلمة الأولى وتركنا المسلمات الأخرى على حالها) .

من الشرطين (1) وَ (2) يأتي أن :

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$$

لأن :

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y)$$

من الأمثلة الشهيرة للفضاءات الإقليدية العقدية الفضاء ذو n بعداً : C^n (راجع المثال 2، § 1) الذي نعرّف فيه الجداء السلمي لعنصرين : $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ وَ$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ بالدستور :

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

من المعلوم أن كل فضاء إقليدي عقدي بعده n متشاكل مع C^n . نسوق فيما يلي مثالين لفضاءات إقليدية عقدية بعداهما غير منتهيين .

1. الفضاء العقدي l_2 المؤلف من متتاليات الأعداد العقدية :

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

المحققة للشرط :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

أما الجداء السلمي فنعرّفه بالدستور :

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

2. الفضـاء $C^2[a, b]$ المؤلف من التوابع المستمرة على القطعة $[a, b]$ ذات القيم العقدية، المزود بالجداء السلمي:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)\,\mathrm{d}t$$

نشير إلى أن طول (نظيم) شعاع في فضـاء إقليدي عقدي معرّف، كما هو الحال في الفضـاء الحقيقي، بالدستور:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

لا ندخل في فضـاء إقليدي عقدي، عموماً، مفهوم زاوية شعاعين (لأن العبارة $\frac{(x, y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ تسـاوي عادة عدداً عقدياً ولذلك فهي لا تمثل عادة جيب تمام زاوية حقيقية)؛ ومع ذلك فإن مفهوم التعامد يبقى قائماً: نقول عن عنصرين x وَ y أنهما متعامدان إذا كان $(x, y) = 0$.

إذا كانت $\{\varphi_n\}$ جملة متعامدة كيفية من عناصر فضـاء إقليدي عقدي R وَ f عنصراً كيفياً R فإن الأعداد:

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}(f, \varphi_n)$$

تسمى، كما هو الحال في فضـاء إقليدي حقيقي، معاملات فوريي وتسمى السلسلة:

$$\sum_n a_n \varphi_n$$

سلسلة فوريي للعنصر f بالنسبة للجملة المتعامدة $\{\varphi_n\}$. لدينا متراجحة بسل:

$$\sum_n \|\varphi_n\|^2 |a_n|^2 \leq (f, f)$$

بصفة خاصة إذا كانت الجملة $\{\varphi_n\}$ متعامدة ومتجانسة، فإن معاملات فوريي لمثل هذه الجملة معرّفة بالدستور:

$$c_n = (f, \varphi_n)$$

وتكتب متراجحة فوريي على الشكل :

$$\sum_{n} |c_n|^2 \leq (f, f)$$

يسمى كل فضاء إقليدي عقدي تام وقابل للفصل، ذي بعدٍ غير منته، فضاء هيلبرتياً عقدياً. نلاحظ أن نظرية التشاكل تشمل فضاءات هيلبرت العقدية.

نظرية 9. كل فضاءات هيلبرت العقدية القابلة للفصل متشاكلة فيما بينها.

إن أبسط إنجاز لفضاء هيلبرتي عقدي هو الفضاء العقدي l_2. سنقدم ضمن الفصل 6 إنجازاً، تابعياً، آخر لمثل هذا الفضاء.

نقترح على القارئ أن يتأكد من أن كل النظريات المثبتة أعلاه من أجل الفضاءات الإقليدية، وبصفة خاصة من أجل فضاءات هيلبرت الحقيقية، صحيحة أيضاً من أجل الفضاءات العقدية (مع إحداث تغييرات طفيفة بمراعاة عقدية الجداء السلمي).

§ 5. الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية

1. تعريف وأمثلة. يعتبر تعريف نظيم طريقة من بين الطرق الممكنة لإدخال طوبولوجيا في فضاء شعاعي. أثبت تطور بعض فروع التحليل التابعي، مثل نظرية التوزيعات (التي سنتناولها في الفصل الموالي) أنه من المفيد في العديد من الحالات معالجة فضاءات شعاعية مزودة بطوبولوجيا غير معرّفة إنطلاقاً من نظيم.

تعريف 1. نقول عن مجموعة E إنها فضاء شعاعي طوبولوجي إذا كان:

I. E فضاء شعاعيا (بضرب عناصره في أعداد حقيقية أو أعداد عقدية).

II. E فضـاء طوبولوجيا.

III. عمليتا الجمع والضرب في عدد (في E)، مستمرتين بالنسبة لطوبولوجية E.

بعبارة أوضح فإن الشرط الأخير يعني أن:

1) إذا كان $z_0 = x_0 + y_0$، من أجل كل جوار $\mathbf{U}$ للنقطة z_0 نستطيع إيجاد جوار V للنقطة x_0 وجوار W للنقطة y_0 بحيث: $\mathbf{U} \ni = x + y$ مهما كان $V \ni x$ وَ $W \ni y$.

2) إذا كان: $\alpha_0\, x_0 = y_0$، من أجل كل جوار $\mathbf{U}$ للنقطة y_0 يوجد جوار V للنقطة x_0 وعدد $\varepsilon > 0$ بحيث $\mathbf{U} \ni \alpha\, x$ بمجرد انتماء x إلى V وَ من أجل: $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$.

إن الصلة الموجودة في فضـاء شعاعي طوبولوجي بين العمليتين الجزئيتين والطوبولوجيا تستلزم أن الطوبولوجيا على مثل هذه الفضـاء معرفة جيداً بتعاطي جماعة من جوارات 0. لرؤية ذلك نعتبر نقطة x من الفضـاء الشعاعي الطوبولوجي E وجواراً $\mathbf{U}$ لِـ0 في E. عندئذٍ نلاحظ أن $x + \mathbf{U}$، أي متحول هذا الجوار بواسطة إنسحاب شعاعه x، جوار لِـx؛ من البديهي أن كل جوار لنقطة كيفية $E \ni x$ يمكن الحصول عليه بهذه الطريقة.

من استمرار عمليتي الجمع والضرب في عدد، في فضـاء شعاعي طوبولوجي، تنتج مباشرة القضـايا التالية:

1) إذا كانت $\mathbf{U}$ و V مجموعتين مفتوحتين في E فإن المجموعة $\mathbf{U} + V$ (أي مجموعة العناصر من الشكل $x + y$، حيث $\mathbf{U} \ni x$ و $V \ni y$) مفتوحة أيضـاً.

2) إذا كانت $\mathbf{U}$ مجموعة مفتوحة فإن المجموعة $\lambda\mathbf{U}$ (أي مجموعة كل العناصر من الشكل λx، $\mathbf{U} \ni x$) مفتوحة أيضـاً مهما كان $\lambda \neq 0$.

3) إذا كانت F مجموعة مغلقة في E فإن λF مغلقة أيضـاً مهما كان λ.

أمثلة. 1. من بين الفضـاءات الشعاعية الطوبولوجية يجب، في البداية، ذكر

الفضاءات النظيمية. ذلك أن خاصيات النظيم تستلزم أن جمع الأشعة وضرب شعاع في عدد عمليتان مستمرتان بالنسبة للطوبولوجيا المعرّفة بالنظيم.

2. نعرّف في الفضاء $\mathbf{R}^\infty$ المؤلف من المتتاليات العددية الكيفية $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ جملة أساسية من الجوارات لِـ 0، وذلك بالطريقة التالية: إن كل جوار $\mathbf{U}(k_1, ..., k_r, \varepsilon)$ معرّف بالأعداد $k_1, ..., k_r$ وبالعدد الحقيقي $\varepsilon > 0$، وهو يحوي كل العناصر $x \in \mathbf{R}^\infty$ بحيث:

$$|x_{k_i}| < \varepsilon \quad , \quad i = 1, 2, ..., r$$

نتأكد بدون صعوبة من أن تعاطي هذه الجملة يجعل من $\mathbf{R}^\infty$ فضاء شعاعياً طوبولوجياً. (نستطيع إلى جانب $\mathbf{R}^\infty$ اعتبار الفضاء $\mathbf{C}^\infty$ المؤلف من كل متتاليات الأعداد العقدية).

3. ليكن $K[a, b]$ فضاء التوابع القابلة للإشتقاق لانهائياً[1] على القطعة $[a, b]$. نعرّف على $K[a, b]$ طوبولوجيا بواسطة جملة أساسية من جوارات 0، كما يلي: كل جوار $\mathbf{U}_{m, \varepsilon}$ ينتمي إلى هذه الجملة معرّف بدليله m وبالعدد $\varepsilon > 0$ ويضم كل التوابع φ المحققة للمتراجحات:

$$|\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon \quad , \quad k = 0, 1, 2, ..., m$$

حيث $\varphi^{(k)}$ يرمز إلى المشتق من الرتبة k للتابع φ.

إن ارتباط الطوبولوجيا بالعمليتين الخطيتين، في فضاء شعاعي طوبولوجي، يجعل هذه الطوبولوجيا تخضع لشروط جد مقيدة. بعبارة أوضح فإن كل نقطة x وكل مجموعة مغلقة لا تحوي هذه النقطة، في فضاء شعاعي طوبولوجي E، تقبلان جوارين غير متقاطعين.

للبرهان على هذه القضية يكفي اعتبار النقطة $x = 0$ ومجموعة مغلقة كيفية F لا تحوي هذه النقطة. نضع $\mathbf{U} = E/F$. بفضل استمرار عملية الطرح في E، يوجد جوار لِـ W:0 بحيث: $W - W \subset \mathbf{U}$. يمكن أن نعتبر W مساوياً لجوارين لِـ W_1:0 وَ W_2 بحيث: $x - y \in \mathbf{U}$ من أجل كل

(1) أي ان المشتقات من كل الرتب موجودة.

$x \in W_1$ وَ $y \in W_2$. لنثبت أن ملاصق الجوار W محتوٍ في $\mathbf{U}$. ليكن $y \in [W]$. إن كل جوار للنقطة y ، بما في ذلك $y + W$ ، يحوي نقطة $z \in W$. وبالتالي توجد نقطة $z \in W$ بحيث $y + z \in W$ ، إذن $y \in W - W \subset \mathbf{U}$ ، ومنه يأتي ما كنا أعلناه . أن الجوارين المطلوبين للنقطة 0 وللمجموعة F هما على التوالي W وَ $E \setminus [W]$.

نقول عن فضـاء طوبولوجي إنه T_1 – فضـاء إذا حقق مسلمة الفصل الأولى T_1 ، أي إذا كانت مجموعة جزئية ذات عنصر واحد في هذا الفضـاء مجموعة مغلقة ؛ من البديهي أن كل فضـاء شعاعي طوبولوجي يكون T_1 – فضـاء إذا وفقط إذا كان تقاطع كل جوارات 0 لا يحوي أي عنصر غير منعدم . كنا أطلقنا في الفصل 2 اسم فضـاء نظامي على كل فضـاء طوبولوجي يحقق مسلمتي الفصل T_1 وَ T_3 .

نلاحظ ، حسب ما أثبتناه آنفاً ، أن كل فضـاء شعاعي طوبولوجي من النمط T_1 هو فضـاء نظامي .

يلعب مفهوم مجموعة محدودة دوراً هاماً في الفضـاءات النظيمية . على الرغم من أن هذا المفهوم قد أدخل بواسطة النظيم إلاّ أننا نستطيع صياغته بطريقة طبيعية ، من أجل الفضـاءات الشعاعية الطوبولوجية الـكيفية .

نقول عن مجموعة M ، محتواة في فضـاء شعاعي طوبولوجي E ، إنها محدودة إذا استطعنا ، من أجل كل جوار $\mathbf{U}$ لِـ0 إيجاد عدد طبيعي n بحيث : $M \subset \lambda \mathbf{U}$ من أجل كل λ تحقق الشرط $|\lambda| \geq n$.

من الواضح ، في حالة فضـاء نظيمي ، أن مفهوم مجموعة محدودة يطابق مفهوم مجموعة محدودة بدلالة النظيم (أي مع إمكانية وضع هذه المجموعة داخل كرة $\|x\| \leq R$) . نقول عن الفضـاء E إنه محدود محلياً إذا احتوى ، على الأقل ، على مجموعة غير خالية مفتوحة ومحدودة . إن كل فضـاء نظيمي فضـاء محدود محلياً . يعتبر الفضـاء $\mathbf{R}^\infty$ الوارد في المثال 2 مثالاً لمجموعة غير محدودة محلياً (برهن على ذلك !) .

تمارين . 1. ليكن E فضـاء شعاعياً طوبولوجياً ، برهن على القضـايا التالية :

أ) تكون مجموعة $M \subset E$ محدودة إذا وفقط إذا وجدنا، من أجل كل متتالية $\{x_n\} \subset M$ وكل متتالية أعداد موجبة $\{\varepsilon_n\}$ متقاربة نحو 0، إن المتتالية $\{\varepsilon_n x_n\}$ متقاربة نحو 0.

ب) إذا كان: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ وَ $x_n \to x$ فإن $\{x_n\}$ مجموعة محدودة.

جـ) إذا كان الفضاء E محدود محلياً فإنه يحقق مسلمة قابلية العد الأولى.

هل يتمتع الفضاء $\mathbf{R}^{\infty}$ بمسلمة قابلية العد الأولى؟

2. نقول، في فضاء شعاعي طوبولوجي H، أن مجموعة M ممتصة بجوار U لـ0 إذا وجد عدد طبيعي n بحيث: $M \subset n\,\mathrm{U}$. أثبت وجود جملة أساسية من جوارات 0 متماصة فيما بينها، وهذا في كل فضاء محدود محلياً. ما هي الجملة المماثلة للجملة السابقة التي يمكن اعتبارها في فضاء نظيمي؟

2. التحدب المحلي. إن الخاصيات التي تتمتع بها الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية الكيفية تختلف كثيراً عن الخاصيات المألوفة في الفضاءات الإقليدية أو النظيمية. هناك صنف هام من الفضاءات أعم من صنف الفضاءات النظيمية، وهو مع ذلك يحتفظ بجل خاصيات الصنف الثاني. هذا الصنف هو صنف الفضاءات المحدبة محلياً.

تعريف 2. نقول عن فضاء شعاعي طوبولوجي إنه محدب محلياً إذا احتوت كل مجموعة مفتوحة غير خالية مجموعة جزئية مفتوحة غير خالية ومحدبة.

نشير إلى أنه إذا كان الفضاء E محدباً محلياً فإننا نستطيع من أجل كل $x \in E$ وكل جوار U لـx، إيجاد جوار محدب V لهذه النقطة بحيث $x \in V \subset \mathrm{U}$. لرؤية ذلك يكفي أن نثبت صحة مقولتنا عند النقطة $x = 0$. ليكن U جواراً كيفياً لـ0. يوجد عندئذٍ جوار V لـ0 بحيث $V - V \subset \mathrm{U}$. لما كان الفضاء E محدباً محلياً فإنه توجد مجموعة غير خالية مفتوحة ومحدبة $V' \subset V$. ليكن $y \in V'$ عندئذٍ فإن $V' - y$ جوار محدب لـ0 محتوٍ في U

إن كل فضاء نظيمي فضاء محدب محلياً. ذلك لأن كل مجموعة مفتوحة وغير خالية في مثل ذاك الفضاء تحوي حتماً كرة. وهكذا فإن كل فضاء نظيمي فضاء محدود محلياً ومحدب محلياً. هذا ويمكننا البرهان على أن الفضاءات النظيمية هي الوحيدة التي تمتع بهاتين الخاصيتين في آن واحد. بعبارة أدق، نصطلح على القول بأن فضاء طوبولوجياً E يقبل نظيماً إذا أمكن تعريف طوبولوجيته بواسطة نظيم. لدينا النظرية التالية:

إن كل فضاء شعاعي طوبولوجي منفصل ومحدب محلياً ومحدود محلياً فضاء يقبل نظيماً.

تمارين. 1. أثبت أن مجموعة مفتوحة $\mathbf{U}$ تكون محدبة في فضاء شعاعي طوبولوجي إذا وفقط إذا كان $\mathbf{U} + \mathbf{U} = 2\,\mathbf{U}$.

2. ليكن E فضاءً شعاعياً، نقول عن مجموعة $\mathbf{U} \subset E$ إنها متناظرة إذا كان $x \in \mathbf{U}$ يستلزم $-x \in \mathbf{U}$. لتكن $\mathcal{B}$ جماعة المجموعات الجزئية المتناظرة والمحدبة في E التي تتساوى كل مجموعة منها مع نواتها (راجع §2). تحقق من صحة القضايا التالية:

أ) تمثل الجماعة $\mathcal{B}$ الجملة الأساسية من جوارات 0 لطوبولوجيا منفصلة ومحدبة محلياً في الفضاء E (نقول عندئذٍ أن هذه الطوبولوجيا نووية محدبة).

ب) إن الطوبولوجيا النووية المحدبة هي أقوى الطوبولوجيات المحدبة محلياً التي تجعل العمليتين الخطيتين المعرّفتين على E مستمرتين.

ج) كلُّ تابعية خطية على E مستمرة بالنسبة للطوبولوجيا النووية المحدبة.

3. الفضاءات النظيمية عدودياً

هناك صنف آخر من الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية يتشكل من الفضاءات النظيمية عدودياً، وهي تلعب دوراً هاماً في التحليل. لصياغة تعريف هذه الفضاءات نحتاج إلى مفهوم تمهيدي.

ليكن $\|\cdot\|_1$ وَ $\|\cdot\|_2$ نظيمين على فضاء شعاعي E . نقول انهما متفقان إذا كانت كل متتالية $\{x_n\}$ من E كوشية بالنسبة للنظيمين ومتقاربة نحو $x \in E$ بالنسبة لاحدهما متتالية متقاربة نحو نفس النهاية x بالنسبة للنظيم الآخر.

نقول عن النظيم $\|\cdot\|_1$ أنه ليس أضعف من النظيم $\|\cdot\|_2$ إذا وجد ثابت $c > 0$ بحيث $\|x\|_1 \geq c\|x\|_2$ من أجل كل $x \in E$.

إذا كان النظيم الأول ليس أضعف من النظيم الثاني والنظيم الثاني ليس أضعف من النظيم الأول نقول أن النظيمين متكافئان. نقول عن نظيمين أنهما يقبلان المقارنة إذا كان احدهما ليس أضعف من الآخر.

تعريف 3. نقول عن فضاء E إنه نظيمي عدودياً إذا كان E فضاءً شعاعياً مزوداً بجماعة قابلة للعد من النظيمات $\|\cdot\|_n$ المتفقة مثنى مثنى.

وهكذا يصبح كل فضاء نظيمي عدودياً فضاءً شعاعياً طوبولوجياً إذا اعتبرنا الجملة الأساسية من جوارات 0 المؤلفة من المجموعات $\mathbf{U}_{r,\varepsilon}$ ، حيث $\mathbf{U}_{r,\varepsilon}$ معرّفة بدليلها r وبالعدد الموجب ε ، علماً أن كل $\mathbf{U}_{r,\varepsilon}$ يحوي كل العناصر $x \in E$ التي تحقق:

$$\|x\|_1 < \varepsilon, \ldots, \|x\|_r < \varepsilon$$

نقترح على القارئ أن يتأكد من أن مثل هذه الجملة تعرّف طوبولوجياً على E تجعل العمليتين الخطيتين المعرّفتين على E مستمرتين. نلاحظ أن كل فضاء نظيمي عدودياً يحقق مسلمة قابلية العد الأولى لأن جملة جوارات $\mathbf{U}_{r,\varepsilon}$:0 يمكن تعويضها (بدون تغيير الطوبولوجيا) بجملة جزئية قابلة للعد يأخذ فيها ε القيم $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. بالإضافة إلى ذلك، يمكن تعريف طوبولوجيا فضاء نظيمي عدودياً بواسطة مسافة، مثلاً بواسطة:

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}, \qquad x, y \in E \tag{1}$$

نقترح على القارئ أن يتأكد من أن التابع $\varrho(x, y)$ يحقق كل مسلمات المسافة وأنه لا متغير بالنسبة للإنسحابات (أي أن:

$\varrho(x+z, y+z) = \varrho(x, y)$ من أجل كل x ، y ، z في E) وأن الطوبولوجيا المولدة عنها هي الطوبولوجيا الأولى. وهكذا يمكن الحديث عن تمام فضاء نظيمي عدودياً، والمقصود من وراء ذلك التمام بالنسبة للمسافة التي أدخلناها آنفاً. نشير أيضاً إلى أن متتالية $\{x_k\}$ تكون متتالية كوشية بالنسبة للمسافة (1) إذا وفقط إذا كانت متتالية كوشية بالنسبة لكل نظيم $\|\cdot\|_n$ وكانت متقاربة (من أجل هذه المسافة) نحو عنصر $x \in E$ إذا وفقط إذا كانت متقاربة نحو نفس العنصر x (من أجل كل نظيم $\|\cdot\|_n$). بعبارة أخرى، فإن تمام فضاء نظيمي عدودياً يعني، في مثل هذا الفضاء، أن كل متتالية كوشية (بالنسبة لكل نظيم $\|\cdot\|_n$) متقاربة حتماً.

أمثلة 1. يمثل الفضاء $K[a, b]$ المؤلف من التوابع القابلة للاشتقاق لا نهائياً على قطعة (راجع المثال 3، الفقرة 1) مثالاً هاماً لفضاء نظيمي عدودياً، هذا إذا كان النظيم $\|\cdot\|_m$ على هذا الفضاء معرّفاً بـ:

$$\|f\|_m = \sup_{\substack{a \leq t \leq b \\ 0 \leq k \leq m}} |f^{(k)}(t)|$$

من الواضح أن هذه النظيمات متفقة فيما بينها وأنها تعرّف على $K[a, b]$ الطوبولوجيا التي أدخلناها آنفاً.

2. ليكن S فضاء التوابع القابلة للإشتقاق لانهائياً على المستقيم العددي التي تؤول إلى الصفر، عند اللانهاية، وكذا مشتقاتها من كل الرتب، وذلك بسرعة تفوق السرعة التي يؤول بها $\frac{1}{|t|^k}$ (مهما كان $k \in \mathbb{N}$) إلى الصفر (أي أن هذه التوابع تحقق الشروط: $t^k f^{(q)}(t) \to 0$ لما $|t| \to \infty$، وذلك مهما كان k وَ q مثبتين). نعرّف على هذا الفضاء جماعة قابلة للعد من النظيمات بوضع:

$$\|f\|_m = \sup |t^k f^{(q)}(t)| \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

نتأكد بسهولة من أن هذه النظيمات متفقة فيما بينها. وبالتالي فإن S فضاء نظيمي عدودياً.

3. هناك حالة خاصة هامة من الفضاءات النظيمية عدودياً، وهي

الفضاءات المسماة بالفضاءات الهيلبرتية عدودياً. ليكن H فضاءً شعاعياً مزوداً بجماعة قابلة للعد من الجداءات السلمية $(\varphi, \psi)_n$ بحيث تكون النظيمات $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$ الموافقة لهذه الجداءات السلمية متفقة فيما بينها. إذا كان هذا الفضاء تاماً فإننا نسميه فضاءً مترياً هيلبرتياً عدودياً.

4. يشكل الفضاء التالي مثالاً ملموساً لفضاء هيلبرتي عدودياً. لتكن Φ مجموعة كل المتتاليات العددية $\{x_n\}$ بحيث تكون السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2$$

متقاربة مهما كان العدد الطبيعي k. نعرّف على هذا الفضاء جماعة قابلة للعد من النظيمات، وذلك بوضع:

$$\|x\|_k = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot x_n^2}$$

من السهل التأكد من أن هذه النظيمات متفقة فيما بينها وأن الفضاء Φ تام بالمفهوم المشار اليه أعلاه. من الواضح أن كلاً من النظيمات $\|\cdot\|_k$ يمكن تعريفه بواسطة الجداء السلمي:

$$(x, y_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot x_n\ y_n$$

وهذا يعني أن Φ فضاء هيلبرتي عدودياً. نسميه فضاء المتتاليات السريعة التناقص.

إذا كان E فضاءً نظيمياً عدودياً نستطيع أن نفرض بأن النظيمات $\|\cdot\|_k$ المزود بها تحقق الشرط:

$$\|x\|_k \leq \|x\|_l \quad , \forall\, k < l \tag{2}$$

لأن لو كان الأمر غير ذلك لتمكنا من تعويض النظيمات $\|x\|_k$ بالنظيمات:

$$\|x\|'_k = \sup\{\|x\|_1, \|x\|_2, ..., \|x\|_k\}$$

التي تعرّف على E نفس الطوبولوجيا التي تعرفها جماعة النظيمات الأولى. بإتمام الفضاء E حسب كل نظيم $\|\cdot\|_k$ نحصل على جماعة فضاءات نظيمية تامة E_k . ثم من العلاقة (2) وتوافق النظيمات تأتي الاحتواءات :

$$E_k \supset E_l \ , \ \forall k < l$$

وهكذا نستطيع ، من أجل كل فضاء نظيمي عدودياً ، إيجاد متتالية متناقصة من الفضاءات النظيمية التامة :

$$E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_k \supset ...; \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \supset E$$

نستطيع البرهان على أن الفضاء E يكون تاماً إذا وفقط إذا كان $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ (برهن على ذلك !) . وهكذا فإن الفضاء $K[a, b]$ ، مثلاً ، المؤلف من التوابع القابلة للإشتقاق لانهائياً على القطعة $[a, b]$ يشكل تقاطع فضاءات نظيمية تامة D^n $(n = 0, 1, 2, ...)$ حيث يرمز D^n لفضاء التوابع القابلة لمشتقات مستمرة حتى الرتبة n (بما في ذلك الرتبة n نفسها) ، أما نظيم هذا الفضاء فهو معرف بِـ :

$$\|f\| = \sup_{\substack{a \le t \le b \\ 0 \le k \le m}} |f^{(k)}(t)|$$

في فترة الثلاثينات ، عندما كان إنشاء نظرية الفضاءات الشعاعية النظيمية قد تم بفضل أعمال باناخ ، كان الإعتقاد السائد وقتئذ هو أن هذا الصنف من الفضاءات واسع بما فيه الكفاية لتغطية الحاجات الملموسة للتحليل . لكن الأمر ظهر عكس ذلك فيما بعد . فقد تبين في العديد من المسائل أن حاجتنا متعلقة بفضاءات مثل فضاء التوابع القابلة للإشتقاق لا نهائياً ، والفضاء $\mathbf{R}^\infty$ المؤلف من كافة المتتاليات العددية الخ ، وهي فضاءات لا يمكن تعريف طوبولوجياتها الطبيعية بواسطة نظيم . ومنه يتضح أن الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية غير النظيمية ليست «غريبة» ولا «دخيلة» ؛ بل إن الأمر عكس ذلك حيث أن بعض هذه الفضاءات تمثل تعميات للفضاء الإقليدي ذي البعد المنتهي كما انها لا تقل أهمية ولا طبيعيّة عن فضاء هيلبرت ، مثلاً .

الفصل الرابع

التابعيات الخطية والمؤثرات الخطية

1 §. التابعيات الخطية المستمرة.

1. التابعيات الخطية المستمرة على فضاء شعاعي طوبولوجي.

كنا اعتبرنا تابعيات معرفة على فضاء شعاعي في 1 § من الفصل 3. عندما يتعلق الأمر بتابعيات على فضاء شعاعي طوبولوجي فإن التابعيات التي لها أهمية كبيرة هي التابعيات المستمرة. كما هو مألوف، نقول عن تابعية f معرفة على الفضاء E إنها مستمرة إذا استطعنا من أجل كل $\varepsilon > 0$ وكل $x_0 \in E$، إيجاد جوار U للعنصر x_0 بحيث:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in U \tag{1}$$

يَصدق هذا التعريف، بصفة خاصة، على التابعيات الخطية.

إذا كان E فضاء شعاعياً طوبولوجياً بعده منته فإن كل تابعية خطية على E مستمرة حتماً. أما في الحالة العامة فخطية تابعية لاتستلزم دوماً استمرارها.

إن القضية التالية هامة رغم بساطتها:

إذا كانت تابعية خطية f مستمرة عند نقطة $x \in E$ فهي مستمرة على كل E.

لرؤية ذلك نعتبر نقطة كيفية y من E، وليكن $\varepsilon > 0$. نختار جواراً U للنقطة x بحيث يكون الشرط (1) محققاً. عندئذ يعطينا انسحاب هذا الجوار:

$$V = U + (y - x)$$

الجوار المطلوب للنقطة y ، ذلك لأنه إذا كان $z \ni V$ فإن : $z + x - y \in U$ وبالتالي :

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y + x) - f(x)| < \varepsilon$$

إذن فلكي نثبت استمرار تابعية خطية يكفي أن نتأكد من أنها مستمرة عند نقطة واحدة، مثلاً النقطة $x = 0$.

إذا حقق الفضاء E مسلمة قابلية العد الأولى فإن استمرار تابعية خطية يمكن التعبير عنها بدلالة المتتاليات: نقول عن تابعية f إنها مستمرة عند النقطة $x \in E$ إذا كانت: $x_n \to x$ تستلزم $f(x_n) \to f(x)$. إن التأكد من كون هذا التعريف للإستمرار يكافىء التعريف السابق (شريطة أن تتحقق مسلمة قابلية العد الأولى) متروك للقارئ.

نظرية 1. لكي تكون تابعية خطية f مستمرة على E يلزم ويكفي أن يوجد جوار للصفر في E تكون التابعية f محدودة عليه.

البرهان. إذا كانت التابعية f مستمرة عند النقطة 0 فإننا نستطيع من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد جوار للصفر تتحقق من أجله المتراجحة:

$$|f(x)| < \varepsilon$$

والعكس بالعكس، ليكن U جواراً للصفر بحيث:

$$|f(x)| \leq C \quad , \quad \forall x \in U$$

وليكن $\varepsilon > 0$. عندئذ نلاحظ أن $\frac{\varepsilon}{C} U$ هو الجوار للصفر الذي تتحقق فيه: $|f(x)| < \varepsilon$. ومنه يأتي أن التابعية f مستمرة عند 0، وبالتالي فهي مستمرة عند كل نقطة من E .

تمرين. ليكن E فضاء شعاعياً طوبولوجياً؛ برهن على القضايا التالية:

أ) تكون تابعية خطية f على E مستمرة إذا وفقط إذا وجدت مجموعة

مفتوحة $U \supset E$ وعدد t بحيث $t \notin f(U)$ ، حيث يرمز $f(U)$ لمجموعة قيم f على U .

ب) تكون تابعية خطية f على E مستمرة إذا وفقط إذا كانت مجموعة الأصفار $\{x/f(x) = 0\}$ مغلقة في E .

جـ) إذا كانت كل تابعية خطية على E مستمرة فإن طوبولوجيا E تطابق الطوبولوجيا النووية المحدبة (راجع التمرين 2، الفقرة 2، 5§، الفصل 3) .

د) إذا كان بعد E غير منته وكان E قابلاً لنظيم فإنه توجد تابعية خطية غير مستمرة على E (استخدم وجود أساس هامل في E ، راجع تمارين الفقرة 3، 1§، الفصل 3) .

ر) نفرض، في E ، وجود جملة أساسية من جوارات 0 قوتها أصغر من البعد الجبري للفضاء E (أي قوة أساس هامل في E ، راجع تمارين الفقرة 3، 1§، الفصل 3) أو تساويه . أثبت وجود تابعية خطية غير مستمرة على E .

س) لكي تكون تابعية خطية f مستمرة على E يلزم ويكفي في حالة تمتع E بمسلمة قابلية العد الأولى أن تكون هذه التابعية محدودة على كل مجموعة محدودة .

2. التابعيات الخطية على فضاء نظيمي .

نفرض أن الفضاء المعتبر E نظيمي . من النظرية يأتي أن كل تابعية خطية ومستمرة f على E محدودة في جوار لـ0 . لكن كل جوار لـ0 يحوي كرة في فضاء نظيمي؛ وبالتالي فإن f محدودة في كرة . نرى، بفضل خطية التابعية f أن ذلك يكافىء أن f محدودة في كل كرة، وبصفة خاصة في كرة الوحدة $\|x\| \leq 1$. بخصوص القضية العكسية، إذا كانت f محدودة في كرة الوحدة فهي مستمرة حسب النظرية 1 (لأن داخلية هذه الكرة جوار لـ0) .

وهكذا تكون تابعية خطية على فضاء نظيمي مستمرة إذا وفقط إذا كانت القيم المأخوذة من طرف هذه التابعية على كرة الوحدة تشكل مجموعة محدودة.

لتكن f تابعية مستمرة على الفضاء النظيمي E . يسمى العدد :

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| \tag{2}$$

أي الحد الأعلى لمجموعة قيم $|f(x)|$ على كرة الوحدة في الفضاء E ، نظيم التابعية f. نشير إلى أن $\|f\|$ يتمتع بالخاصيتين البديهيتين التاليتين :

(1
$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

وهذا ينتج مباشرة من كون :

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|$$

من أجل $x \neq 0$.

2) من أجل كل $x \in E$ ، لدينا :

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \tag{3}$$

ذلك أنه إذا كان $x \neq 0$ فإن العنصر $\frac{x}{\|x\|}$ ينتمي إلى كرة الوحدة؛ وبالتالي يأتي من تعريف نظيم تابعية أن :

$$\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

ومنه تنتج (3). أما إذا كان $x = 0$ فإن طرفي المتراجحة (3) منعدمان.

تمرين. ليكن $C \geq 0$ عدداً يحقق المتراجحة :

$$\|f(x)\| \leq C\|x\| \tag{4}$$

وذلك من أجل كل x . برهن على أن $\|f\| = \text{Inf}\ C$ ، حيث نأخذ الحد الأدنى Inf على كل الأعداد C التي تحقق المتراجحة (4) .

نسوق الآن بعض الأمثلة لتابعيات خطية على فضاءات نظيمية .

1. ليكن $\mathbf{R}^n$ الفضاء الإقليدي ذي البعد n ، وليكن a شعاعاً كيفياً مختاراً في هذا الفضاء . إن الجداء السلمي :

$$f(x) = (x, a)$$

حيث x يتجول في الفضاء $\mathbf{R}^n$ ، تابعية خطية على $\mathbf{R}^n$. ثم من متراجحة كوشي - بونياكوفسكي يأتي :

$$|f(x)| = |(x, a)| \leq \|x\| \cdot \|a\| \tag{5}$$

وبالتالي فإن هذه التابعية محدودة وعليه فهي مستمرة على $\mathbf{R}^n$. من المتراجحة (5) نحصل على :

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|$$

لما كان الطرف الثاني لهذه المتراجحة لا يتعلق بـ x ، فإن :

$$\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|$$

أي أن : $\|f\| \leq \|a\|$. لكن بوضع $x = a$ نحصل على :

$$|f(a)| = (a, a) = \|a\|^2$$

أي أن :

$$\frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|$$

إذن :

$$\|f\| = \|a\| .$$

2. إن التكامل :

$$I(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d} t$$

حيث $x(t)$ تابع مستمر على $[a, b]$ يمثل تابعية خطية على الفضاء $C[a, b]$. إن هذه التابعية محدودة ونظيمها يساوي $(b-a)$. ذلك أن :

$$|I(x)| = \left| \int_a^b x(t) \mathrm{d} t \right| \leq \max |x(t)| \ (b-a) = \|x\| (b-a)$$

وتصبح هذه المتراجحة مساواة من أجل $x =$ ثابتاً .

3. نعتبر مثالاً أعم من ذلك . ليكن $y_0(t)$ تابعاً مستمراً على $[a, b]$. نضع من أجل كل تابع $C[a, b] \ni x(t)$:

$$F(x) = \int_a^b x(t) \ y_0(t) \ \mathrm{d} t$$

إنها تابعية خطية . وهي محدودة لأن :

$$|F(x)| = \left| \int_a^b x(t) \ y_0(t) \ \mathrm{d} t \right| \leq \|x\| \ \cdot \ \int_a^b |y_0(t)| \mathrm{d} t \qquad (6)$$

بما أنها خطية ومحدودة نستنتج أنها مستمرة . من المتراجحة (6) نحصل على التقدير التالي للنظيم :

$$\|F\| \leq \int_a^b |y_0(t)| \ \mathrm{d} t$$

(الواقع هو أن هذه المتراجحة مساواة ، أثبت ذلك !) .

4. نعتبر في الفضاء $C[a, b]$ التابعية الخطية :

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

المشار إليها في الفقرة 5 ، 1§ ، الفصل 3 . إن قيمتها عند $x(t)$ تطابق قيمة التابع $x(t)$ عند النقطة المعطاة t_0 . من الواضح أن :

$$|x(t_0)| \leq \|x\|$$

ولدينا المساواة، بدل المتراجحة، من أجل $x =$ ثابتاً. ومنه يأتي مباشرة أن نظيم التابعية δ_{t_0} يساوي 1.

5. نستطيع أن نعرّف تابعية خطية على كل فضاء إقليدي X بالطريقة المستعملة في $\mathbf{R}^n$؛ وذلك باختيار عنصر ثابت $a \in X$ وبوضع:

$$F(x) = (x, a)$$

من أجل كل $x \in X$.

نتأكد، كما هو الحال في الفضاء $\mathbf{R}^n$، بأن:

$$\|F\| = \|a\|$$

نعتبر فيما يلي التابعيات الخطية المستمرة لاغير؛ ولذا نهمل من الآن فصاعداً كلمة «مستمرة» بخصوص التابعيات.

يقبل مفهوم نظيم تابعية خطية التفسير الهندسي التالي. كنا رأينا (الفقرة 1، الفصل 3) أننا نستطيع أن نلحق بكل تابعية خطية مستوياً مصعداً L معرفاً بالمعادلة:

$$f(x) = 1$$

لنبحث عن المسافة d التي تفصل هذا المستوى المصعد عن النقطة 0. لدينا، تعريفاً: $d = \operatorname*{Inf}_{f(x)=1} \|x\|$. بفضل التقدير:

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

على المستوى المصعد $f(x) = 1$ لدينا: $\|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}$، إذن: $d \geq \frac{1}{\|f\|}$. من جهة أخرى، يأتي من تعريف نظيم f أن من أجل $\varepsilon > 0$، يوجد عنصر x_ε يحقق الشرط $f(x_\varepsilon) = 1$ وبحيث:

$$1 \geq (\|f\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|$$

وبالتالي:

$$d = \underset{f(x)=1}{\text{Inf}} \|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$$

بما أن $\varepsilon > 0$ ويمكن أخذ ε صغيراً بالقدر الذي نريده ينتج :

$$d = \frac{1}{\|f\|}$$

إذن فإن نظيم تابعية خطية f يساوي مقلوب المسافة التي تفصل المستوى المصعد $f(x) = 1$ عن النقطة 0 .

3. نظرية هان - باناخ في فضاء نظيمي.

أثبتنا (في الفصل 3) النظرية العامة لهان - باناخ التي تنص على أن كل تابعية خطية f_0 معرفة على فضاء جزئي L من فضاء شعاعي E وتحقق الشرط :

$$|f_0(x)| \leq p(x) \tag{7}$$

(حيث p تابعية محدبة مثبتة على E) يمكن دوماً تمديدها إلى كل الفضاء E مع الإحتفاظ بالشرط (7). أما في حالة فضاء نظيمي فإننا نستطيع صياغة هذه النظرية بالطريقة التالية :

ليكن E فضاء نظيمياً حقيقياً وَ L فضاء جزئياً من E وَ f_0 تابعية خطية محدودة على L . نستطيع تمديد هذه التابعية بحيث نحصل على تابعية خطية f معرفة على الفضاء E بأكمله مع الاحتفاظ بقيمة النظيم أي أن نظيم f_0 على L هو نظيم f على E .

لرؤية ذلك نرمز بِـ k لنظيم f_0 على L . من الواضح أن $k\|x\|$ تابعية محدبة . لنأخذ هذه التابعية مكان p ، ونطبق النظرية العامة لهان - باناخ نحصل عندئذ على النتيجة المطلوبة .

تقبل نظرية هان - باناخ هذه التفسير الهندسي التالي . تعرف المعادلة :

$$f_0(x) = 1 \tag{8}$$

في الفضاء الجزئي L مستوياً مصعداً يبعد عن الصفر مسافة $\frac{1}{\|f_0\|}$. بتمديد التابعية f_0 إلى الفضاء E بأكمله مع الاحتفاظ بقيمة النظيم، نرسم بواسطة هذا المستوى المصعد «الجزئي» مستوياً مصعداً «أكبر» منه في الفضاء E بأكمله وذلك دون «السماح» له بالاقتراب من الصفر.

أما فيما يخص النص العقدي لنظرية هان - باناخ (النظرية 4a، § 2، الفصل 3) فهو يعطينا نصاً عقدياً مماثلاً للنظرية السابقة:

ليكن E فضاء عقدياً نظيمياً، ولتكن f_0 تابعية خطية محدودة معرفة على فضاء جزئي $L \subset E$. توجد عندئذ تابعية خطية محدودة f معرفة على الفضاء E بأكمله وتحقق الشرطين:

$$f(x) = f_0(x) \quad , \quad x \in L$$

$$\|f\|_E = \|f_0\|_L$$

من نظرية هان - باناخ الخاصة بفضاء نظيمي نستخلص النتيجة الهامة التالية:

نتيجة. ليكن E فضاء نظيمياً. من أجل كل x_1 وَ x_2 في E حيث: $x_1 \neq x_2$، توجد تابعية خطية مستمرة f تفصل هاتين النقطتين، أي أن:

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

نلاحظ أن ذلك يكافىء وجود تابعية f تفصل x_0 عن 0 من أجل كل $x_0 \neq 0$، أي بحيث $f(x_0) \neq 0$. لإنشاء هذه التابعية، نعتبر في البداية العناصر ذات الشكل λx_0 ونعرف على الفضاء الجزئي المؤلف من هذه العناصر تابعية f_0 بوضع $f(\lambda x_0) = \lambda$؛ نمدد، بعد ذلك، هذه التابعية (باستعمال نظرية هان - باناخ) إلى الفضاء E بأكمله. نحصل أخيراً على تابعية خطية مستمرة f تحقق الشرط: $f(x_0) = 1 \neq 0$.

4. التابعيات الخطية على فضاء نظيمي عدودياً.

ليكن E فضاء نظيمياً عدودياً مزوداً بالنظيمات $\|\cdot\|_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$؛ نستطيع أن نفرض (الفقرة 8، § 4، الفصل 3) من أجل كل $x \in E$ أن:

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \ldots \leq \|x\|_n \leq \ldots \tag{9}$$

وذلك بدون أن نمس بعمومية المسألة.

لتكن f تابعية خطية مستمرة على E؛ يوجد عندئذ في E جوار U للصفر تكون التابعية f محدودة فيه. من تعريف طوبولوجيا على فضاء نظيمي عدودياً، نستنتج وجود عدد طبيعي k وعدد حقيقي $\varepsilon > 0$ بحيث تكون الكرة $B_{k,\varepsilon} = \{x : \|x\|_k < \varepsilon\}$ محتواة في U. وبالتالي فإن التابعية f محدودة في هذه الكرة، وعليه فهي محدودة ومستمرة بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_k$، أي أنه يوجد ثابت C بحيث:

$$|f(x)| \leq C\|x\|_k \quad , \quad x \in E$$

من جهة أخرى، واضح أنه إذا كانت تابعية خطية محدودة بالنسبة لأحد النظيمات $\|\cdot\|_n$ فإنها مستمرة على E. إذن، إذا كانت E_n^* هي مجموعة كل التابعيات الخطية على E المستمرة بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_n$ وكانت E^* هي مجموعة كل التابعيات الخطية المستمرة على E، فإن:

$$E_n^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^* \tag{10}$$

من الشرط (9) ينتج أيضاً:

$$E_1^* \subset E_2^* \subset \ldots \subset E_n^* \subset \ldots$$

إذا كانت f تابعية خطية مستمرة على E، أي إذا كانت $f \in E^*$ فإن رتبة f هي أصغر عدد n بحيث $f \in E_n^*$؛ من المساواة (10) يأتي أن كل تابعية مستمرة على E ذات رتبة منتهية.

تمرين. 1) برهن، في فضاء نظيمي عدودياً، أنه من أجل كل عنصرين: $x_1 \neq x_2$ توجد تابعية خطية مستمرة تفصل هاتين النقطتين.

2) أثبت نفس القضية باعتبار فضاء محدب محلي كيفي.

§ 2. الفضاء الثنوي

1. تعريف الفضاء الثنوي. نستطيع تعريف عمليتي الجمع والضرب في عدد في مجموعة التابعيات الخطية. لتكن f_1 وَ f_2 تابعيتين خطيتين على فضاء شعاعي E. نعرف مجموعهما $f_1 + f_2$ على أنه التابعية:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad , \quad x \in E$$

أما الجداء αf للتابعية f والعدد α فهو التابعية:

$$f(x) = \alpha f_1(x) \quad , \quad x \in E$$

نستطيع أيضاً تعريف التابعيتين $f_1 + f_2$ وَ αf_1 بـ:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x)$$

من الواضح أن المجموع $f_1 + f_2$ والجداء αf_1 تابعيتان خطيتان. إذا كان (إضافة إلى ذلك) الفضاء E طوبولوجياً والتابعيتان f_1 وَ f_2 مستمرتين على E، فإن الأمر كذلك فيما يخص $f_1 + f_2$ وَ αf_1. من السهل التأكد من أن العمليتين المعرفتين أعلاه على التابعيات تحقق مسلمات الفضاء الشعاعي. أي أن مجموعة التابعيات الخطية المستمرة المعرفة على فضاء شعاعي طوبولوجي تشكل فضاء شعاعياً. الفضاء الثنوي (أو ثنوي) للفضاء E هو تعريفاً الفضاء المشار اليه آنفاً؛ نرمز له بـ: E^*.

تمرين. تسمى مجموعة كل التابعيات الخطية على E (مستمرة كانت أو غير مستمرة) الثنوي الجبري للفضاء E ونرمز له بـ: $E^{\#}$. أعط مثالاً لفضاء شعاعي طوبولوجي E بحيث:

$$E^* \neq E^{\#}$$

نستطيع تعريف طوبولوجيا على الفضاء الثنوي E^* بطرق مختلفة. من بين كل الطوبولوجيات لـE^*، فإن أهمها هي الطوبولوجيا القوية والطوبولوجيا الضعيفة.

2. الطوبولوجيا القوية على الفضاء الثنوي.

نبدأ بأبسط الحالات، وهي الحالة التي يكون فيها الفضاء E نظيمياً. أدخلنا مفهوم النظيم على التابعيات الخطية المستمرة وذلك بوضع:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

من السهل أن نتأكد من أن $\|f\|$ يحقق كل الشروط المحتواة في تعريف النظيم. لدينا فعلاً:

1) $\|f\| > 0$ من أجل كل تابعية خطية f غير منعدمة.

2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ ،

3) $$\|f_1 + f_2\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|}$$

$$= \|f_1\| + \|f_2\|$$

وبالتالي يمكن تزويد الثنوي E^* لفضاء نظيمي ببنية فضاء نظيمي وذلك بصفة طبيعية. تسمى طوبولوجيا E^* الموافقة للنظيم الذي أدخلناه آنفاً

الطوبولوجيا القوية لِـ E^*. إذا أردنا التأكيد على أن الفضاء E^* فضاء نظيمي نكتب $(E^*, \|\cdot\|)$ بدل E^*.

لنبرهن على النظرية التالية التي تعبر عن خاصية هامة لثنوي فضاء نظيمي.

نظرية 1. إن الفضاء الثنوي $(E^*, \|\cdot\|)$ فضاء تام.

البرهان. لتكن $\{f_n\}$ متتالية لـكوشي مؤلفة من تابعيات خطية. عندئذ، من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد N بحيث $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ من أجل كل n وَ $N \leq m$. ومنه ينتج أن من أجل كل $x \in E$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{f_n(x)\}$ متقاربة من أجل كل $x \in E$.

نضع:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

ونثبت أن f تابعية خطية مستمرة. أما الخطية فهي بديهية:

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)]$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

للبرهان على استمرار f نعود إلى المتراجحة: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\|$ ونجعل m يؤول إلى ∞، عندئذ نجد:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \|x\|$$

ومنه ينتج أن التابعية $f - f_n$ محدودة، وبالتالي فإن الأمر كذلك فيما يخص التابعية $f = f_n + (f - f_n)$ وعليه فهي مستمرة. كما نستنتج أيضا بأن

$\varepsilon \leq \|f_n - f\|$ من أجل كل $n \geq N$ أي أن $\{f_n\}$ متقاربة نحو f. بذلك يتم البرهان على النظرية.

لنأكد مرة أخرى على صحة هذه النظرية حتى ولو كان الفضاء الأول E غير تام.

ملاحظة. إذا كان الفضاء E غير تام ورمزنا بِـ $\bar{E}$ لتتمته فإن الفضاءين E^* وَ $(\bar{E})^*$ متشاكلان.

لرؤية ذلك نلاحظ أن $E \subset \bar{E}$ وأن E متراص اينما كان في $\bar{E}$، وعليه فإن كل تابعية خطية f مستمرة على E يمكن تمديدها باستمرار إلى $\bar{E}$. نرمز لهذا التمديد (الوحيد!) بِـ $\bar{f}$. من الواضح أن $\bar{f} \in (\bar{E})^*$ وأن: $\|f\| = \|\bar{f}\|$ وأن كل تابعية لِـ $(\bar{E})^*$ تمديد لتابعية من E^* (أي لاقتصارها على E) وبالتالي فإن التطبيق $f \rightarrow \bar{f}$ تشاكل من الفضاء E^* على الفضاء $(\bar{E})^*$.

نعرف الآن الطوبولوجيا القوية على ثنوي فضاء شعاعي طوبولوجي كيفي. كنا عرفنا جواراً للصفر في ثنوي فضاء نظيمي على أنه مجموعة تابعيات تحقق الشرط:

$$\|f\| < \varepsilon$$

أي أننا نأخذ في الفضاء E^* (الثنوي لفضاء نظيمي) كجوارات للصفر مجموعات التابعيات f بحيث $|f(x)| < \varepsilon$ عندما يتجول x في كرة الوحدة $\|x\| \leq 1$ لِـ E. إذا تغير ε تصبح هذه المجموعات تشكل جملة أساسية من جوارات الصفر. في حالة ما إذا كان E فضاء شعاعياً طوبولوجياً غير نظيمي، فإنه من الطبيعي أن نأخذ بدل كرة الوحدة مجموعة محدودة كيفية $A \subset E$.

نعرف جواراً للصفر $U_{\varepsilon,A}$ على أنه مجموعة التابعيات الخطية التي تحقق الشرط:

$$|f(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in A$$

بتغيير ε وَ A نحصل على جملة أساسية من جوارات الصفر في E^*.

وهكذا نرى أن الطوبولوجيا القوية لِـ E^* معطاة بجملة جوارات تتعلق بعدد موجب ε وبالمجموعة المحدودة $A \subset E$. سوف لن نتأكد هنا، حتى ولوكان هذا غير صعب (راجع، مثلاً، [9]) من أن هذه الجملة تزود E^* ببنية فضاء شعاعي طوبولوجي.

من الواضح في حالة فضاء نظيمي E أن الطوبولوجيا القوية لِـ E^*، المعرفة أعلاه، تطابق التعريف المعطى بواسطة النظيم.

نشير إلى أن الطوبولوجيا القوية لِـ E^* منفصلة ومحدبة محلياً (بغض النظر عن طوبولوجيا E) . ذلك أنه إذا كان $f_0 \in E^*$ وَ : $f_0 \neq 0$ فإنه يوجد عنصر $x_0 \in E$ بحيث : $f_0(x_0) \neq 0$؛ نضع : $\varepsilon = \frac{1}{2} |f_0(x_0)|$ وَ $A = \{x_0\}$؛ عندئذ $f_0 \notin U_{\varepsilon,A}$ أي أن E^* منفصل. للبرهان على أن الطوبولوجيا القوية لِـ E^* محدبة محلياً، يكفي أن نلاحظ، من أجل كل $\varepsilon > 0$ وكل مجموعة محدودة $A \subset E$، بأن الجوار $U_{\varepsilon,A}$ محدب في E . نرمز بالطوبولوجيا القوية لِـ E^* بِـ b . إذا أردنا التأكيد على أن الفضاء E مزود بطوبولوجيته القوية، نكتب (E^*, b) بدل E^* .

3. أمثلة لفضاءات ثنوية.

1. ليكن E فضاء شعاعياً بعده n (حقيقي أو عقدي) . بعد اختيار أساس كيفي : $e_1, ..., e_n$ لهذا الفضاء يمكن كتابة كل شعاع $x \in E$ على الشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ وذلك بطريقة وحيدة. إذا كانت f تابعية خطية على E، من الواضح أن :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i \tag{1}$$

وبالتالي فإن كل تابعية خطية معرفة بصفة وحيدة بقيمها عند الأشعة $e_1, ..., e_n$ التي تؤلف الأساس، هذا ويمكن إعطاء تلك القيم بطريقة كيفية. لندخل التابعيات الخطية $g_1, ..., g_n$ بوضع :

$$g_j(e_i) = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases}$$

من الواضح أن هذه التابعيات مستقلة خطياً. ويتبين من جهة أخرى أن: $g_j(x) = x_j$ بحيث يمكن كتابة الدستور على الشكل:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, g_i(x)$$

ومنه يأتي أن التابعيات $g_1, ..., g_n$ تشكل أساساً للفضاء E^*؛ إذن فإن E^* فضاء شعاعي بعده n. يسمى الأساس $g_1, g_2, ..., g_n$ الأساس الثنوي للأساس: $e_1 ..., e_n$ لـ E.

إذا عرفنا نظيمات مختلفة على الفضاء E، فإنها تعرف نظيمات مختلفة على E^*. نسوق بعض الأمثلة لثنائيات نظيمات على E وعلى E^* تتوافق فيما بينها (نوصي القارىء بالقيام بالبراهين الضرورية):

أ) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ ، $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{1/2}$

ب) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ ، $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{1/q}$

حيث: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ وَ $1 < p < \infty$.

جـ) $\|x\| = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$ ، $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$

د) $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ، $\|f\| = \sup_{1 \le i \le n} |f_i|$

ترمز $x_1 ..., x_n$ في هذه الدساتير إلى إحداثيات الشعاع $x \in E$ بالنسبة للأساس: $e_1 ..., e_n$، وترمز: $f_1 ..., f_n$ لإحداثيات التابعية $f \in E^*$ بالنسبة للأساس الثنوي: $g_1, ..., g_n$.

تمرين. أثبت أن كل النظيمات السابقة المعرفة على فضاء ذي بعد n تعرف نفس الطوبولوجيا.

2. نعتبر الفضاء c_0 المؤلف من المتتاليات $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ المتقاربة نحو الصفر، المزود بالنظيم $\|x\| = \sup_n |x_n|$، ولنثبت أن ثنويه $(c_0^*, \|\cdot\|)$ متشاكل مع الفضاء l_1 المؤلف من المتتاليات $f = (f_1, ..., f_n, ...)$ القابلة للجمع مطلقاً، والمزود بالنظيم $\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. إن كل متتالية $f \in l_1$ تعرف على الفضاء c_0 تابعية خطية محدودة وفق الدستور:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, x_n \tag{2}$$

من الواضح أن $|\bar{f}(x)| \leq \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ بحيث أن:

$$\|\bar{f}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \leq \|f\|$$

نعتبر في c_0 الأشعة:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0, 0, ...)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0, 0, ...)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1, 0, ...)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ونضع: $x^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} e_n$ (إذا كان $f_n = 0$، نضع: $\frac{f_n}{|f_n|} = 0$). عندئذ $x^{(N)} \in c_0$، $\|x^{(N)}\| \leq 1$ وَ:

$$\bar{f}(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} \bar{f}(e_n) = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$$

بحيث أن: $\lim_{n \to \infty} \bar{f}(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|$. وبالتالي: $\|\bar{f}\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$؛ ثم

بمراعاة المتراجحة المثبتة آنفاً والتي لها اتجاه معاكس لاتجاه المتراجحة السابقة، نستنتج أن :

$$\|\tilde{f}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|$$

وهكذا، أنشأنا تطبيقاً خطياً إيزومترياً $f \to \tilde{f}$ من الفضاء l_1 في الفضاء c_0^*؛ يبقى أن نبرهن على أن صورة الفضاء l_1 بواسطة هذا التطبيق هي الفضاء c_0^* بأكمله، أي أن كل تابعية $\tilde{f} \in c_0^*$ تكتب على الشكل (2) مع $f = \{f_n\} \in l_1$. من أجل كل $x = \{x_n\} \in c_0$ لدينا $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$، حيث تتقارب سلسلة الطرف الثاني في c_0 نحو العنصر x لأن :

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\| = \sup_{n>N} |x_n| \to 0 \ , \ N \to \infty$$

لما كانت التابعية $\tilde{f} \in c_0^*$ مستمرة، فإن : $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \tilde{f}(e_n)$، إذن يكفي أن نثبت بأن : $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| < \infty$.

بوضع :

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{\tilde{f}}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|} e_n$$

وبملاحظة أن $x^{(N)} \in c_0$ وَ : $\|x^{(N)}\| \leq 1$ نجد أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{\tilde{f}}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|} \tilde{f}(e_n) = \tilde{f}\left(x^{(N)}\right) \leq \|\tilde{f}\|$$

ومنه يأتي أن : $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| < \infty$ لأن N كيفي.

3. من السهل أن نبرهن على أن الفضاء l_1^* (ثنوي l_1) متشاكل مع الفضاء m المؤلف من المتتاليات المحدودة $x = \{x_n\}$ والمزود بالنظيم $\|x\| = \sup_n |x_n|$.

4. ليكن $p > 1$ وَ l_p فضاء المتتاليات $x = \{x_n\}$ بحيث:

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty$$

يمكن أن نبرهن على أن الفضاء الثنوي l_p^* متشاكل مع الفضاء l_q، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. إن الشكل العام للتابعيات الخطية المستمرة على l_p هو:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n \quad ; \; x = \{x_n\} \in l_p \quad , \; f = \{f_n\} \in l_q$$

يعتمد البرهان على تطبيق متراجحة هولدر.

5. لندرس بنية ثنوي فضاء هيلبرت.

نظرية 2. ليكن H فضاء حقيقياً لهيلبرت. من أجل كل تابعية خطية مستمرة f، معرفة على H، يوجد عنصر وحيد $x_0 \in H$ بحيث:

$$f(x) = (x, x_0) \; , \; x \in H \tag{3}$$

وَ $\|x_0\| = \|f\|$. والعكس بالعكس، إذا كان $x_0 \in H$، فإن الدستور (3) يعرف تابعية خطية ومستمرة f بحيث $\|x_0\| = \|f\|$. إذن تعرف المساواة (3) تشاكلا: $f \rightarrow x_0$ بين الفضاءين H^* وَ H.

البرهان. من البديهي أن الدستور (3) يعرف من أجل كل $x_0 \in H$ تابعية خطية على H. بما أن $|f(x)| = |(x, x_0)| \leq \|x\| \cdot \|x_0\|$ فإن هذه التابعية مستمرة ولما كان $f(x_0) = \|x_0\|^2$ ينتج أن $\|x_0\| = \|f\|$. لنثبت أن كل تابعية خطية مستمرة f، معرفة على H، يمكن كتابتها على الشكل (3). إذا كان $f = 0$ نضع $x_0 = 0$. ليكن إذن $x_0 \neq 0$ وليكن $H_0 = \{x : f(x) = 0\}$ نواة التابعية f؛ من استمرار f يأتي أن H_0 فضاء جزئي مغلق في H. أثبتنا في الفقرة 6، الفصل 3 أن نواة كل تابعية خطية لها بعد مرافق يساوي 1. ثم بمراعاة النتيجة 3

(النظرية 7، 4§، الفصل 3) يأتي أن المكمل المعامد $H_0^{\perp}$ للفضاء الجزئي H_0 ذو بعد يساوي 1؛ يوجد إذن شعاع (غير منعدم) y_0 عمودي على H_0 بحيث يكتب كل شعاع $x \in H$ بطريقة وحيدة على الشكل $x = y + \lambda y_0$ حيث $y_0 \in H_0$. يمكن فرض $\|y_0\| = 1$. نضع $x_0 = f(y_0)y_0$. عندئذ، من أجل كل $x \in H$ ، لدينا:

$$x = y + \lambda y_0 \quad , \quad y \in H_0$$

$$f(x) = \lambda f(y_0)$$

$$(x, x_0) = \lambda(y_0, x_0) = \lambda f(y_0)(y_0, y_0) = \lambda f(y_0)$$

وهكذا $f(x) = (x, x_0)$ من أجل كل العناصر $x \in H$. إذا كان $f(x) = (x, x_0')$ حيث $x \in H$ ، فإن $(x, x_0 - x_0') = 0$ ، ومنه نحصل على $x_0 = x_0'$ بعد وضع $x = x_0 - x_0'$. بذلك يتم البرهان على النظرية.

ملاحظة 1. ليكن E فضاء إقليدياً غير تام وليكن H فضاء لهيلبرت يمثل تتمة E . لما كان الفضاءان E^* وَ H^* متشاكلين (راجع ملاحظة الفقرة 2، 2§، الفصل 4) والفضاء H^* متشاكلاً مع H يأتي:

إن الفضاء الثنوي E^* لفضاء إقليدي غير تام E متشاكل مع التتمة H للفضاء E .

2. تبقى النظرية 2 قائمة حتى ولو كان فضاء هيلبرت H عقدياً (يبقى البرهان كما هو شريطة استبدال $x_0 = f(y_0)y_0$ بِـ $x_0 = \overline{f(y_0)}y_0$) . الفرق الوحيد بين حالة فضاء حقيقي وحالة فضاء عقدي هو أن التطبيق من H في H^* الذي يلحق كل عنصر $x_0 \in H$ بالتابعية $f(x) = (x, x_0)$ يصبح، في الحالة العقدية، تشاكلاً خطياً مرافقاً أي تشاكلاً يلحق بكل عنصر λx_0 التابعية $\bar{\lambda} f$.

6. اعتبرنا في الأمثلة من 1 إلى 5 فضاءات نظيمية. نعتبر الآن فضاء نظيمياً عدودياً. ليكن Φ فضاء حقيقياً هيلبرتياً عدودياً يتألف من المتتاليات $x = \{x_n\}$ التي تحقق:

$$\|x\|_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k \; x_n^2 \right)^{1/2} < \infty$$

من أجل كل $k = 1, 2, \ldots$ ، مزوداً بالجداءات السلمية :

$$(x, y)_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k \; x_n \, y_n \quad , \; k = 1, 2 \ldots$$

إن الفضـاء Φ المزود بالجداء السلمي $(.,.)_k$ فضـاء إقليدي ؛ لتكن Φ_k متممته . من السهل أن نرى بأن Φ_k يمكن مطابقته بفضـاء هيلبرت المؤلف من المتتاليات $x = \{x_n\}$ بحيث : $\|x\|_k < \infty$. بفضل النظرية 2 فإن الفضـاء Φ_k^* متشـاكل مع الفضـاء Φ_k . يلحق هذا التشـاكل بكل تابعية خطية مستمرة $f \in \Phi_k^*$ متتالية $\bar{f} = \{f_n\}$ بحيث :

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k \; |f_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

$$f(x) = (x, \bar{f})_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k \; x_n \; f_n$$

$$x = \{x_n\} \in \Phi_k$$

والعكس بالعكس ، فإن كل متتالية من هذا الشكل تعرف عنصراً من Φ_k^* .
نعرف الآن التابعية $f \in \Phi_k^*$ لا بواسطة المتتالية $\{f_n\}$ وإنما بواسطة المتتالية $\{g_n\}$ حيث : $g_n = n^k f_n$ ، عندئذ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \; g_n \quad , \; \|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} \; g_n^2 \right)^{1/2}$$

وبالتالي فإننا نستطيع أن نطابق الفضـاء Φ_k^* بفضـاء هيلبرت المؤلف من المتتاليات $\{g_n\}$ بحيث :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} \; g_n^2 < \infty \tag{4}$$

والمزود بالجداء السلمي :

$$\left(g^{(1)}, g^{(2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}\, g_n{}^{(1)} \cdot g_n{}^{(2)}$$

لما كان $\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^*$ فإن Φ^* يمثل فضاء كل المتتاليات $\{g_n\}$ بحيث ، يوجد ، من أجل كل واحدة منها ، عدد k تحقق من أجله هذه المتتالية الشرط (4) .

إن قيمة كل تابعية من هذه التابعيات معرفة من أجل كل عنصر $\{x_n\} = x \ni \Phi$ ، وهي تساوي $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, g_n$.

وهكذا إذا كان الفضاء Φ تقاطع متتالية متناقصة من فضاءات هيلبرت :

$$\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k \;,\; \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots \supset \Phi_k \supset \ldots$$

فإن الفضاء Φ^* يساوي إتحاد متتالية متزايدة من فضاءات هيلبرت :

$$\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^* \;,\; \Phi_1^* \subset \Phi_2^* \subset \ldots \subset \Phi_k^* \subset \ldots$$

من المستحسن إدخال الرمز $\Phi^* = \Phi_{-k}$. نرمز أيضاً للفضاء l_2 بـ Φ_0 ، فنحصل على متتالية فضاءات هيلبرت ، غير منتهية من الجهتين :

$$\ldots \subset \Phi_k \subset \ldots \subset \Phi_1 \subset \Phi_0 \subset \Phi_{-1} \subset \ldots \subset \Phi_{-k} \subset \ldots$$

حيث : $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$ من أجل كل الأعداد : $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

4. الفضاء الثنوي المكرر .

بما أن التابعيات الخطية المستمرة على فضاء شعاعي طوبولوجي تشكل فضاء شعاعياً طوبولوجياً – وهو الثنوي (E^*, b) – فإنه بإمكاننا الحديث

أيضاً عن الفضاء E^{**} المؤلف من التابعيات الخطية المستمرة على E^* ، وهو الفضاء الثنوي المكرر لِـ E ، الخ .

نلاحظ أن كل عنصر x_0 من E يعرف تابعية خطية على E^* . لرؤية ذلك نضع :

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0) \tag{5}$$

حيث x_0 عنصر ثابت في E وَ f يرسم الفضاء E^* بأكمله .

تلحق المساواة (5) بكل عنصر f عدداً $\psi_{x_0}(f)$ وتعرف إذن تابعية على E^* . من جهة أخرى لدينا :

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha\psi_{x_0}(f_1) + \beta\psi_{x_0}(f_2)$$

وهذا ما يثبت خطية هذه التابعية .

كما نلاحظ أن مثل هذه التابعية مستمرة على E^* . فالفعل ، من أجل $\varepsilon > 0$ ومجموعة جزئية محدودة A في E تحوي العنصر x_0 ، نعتبر في E^* جواراً للصفر $\mathbf{U}(\varepsilon, A)$. من تعريف $\mathbf{U}(\varepsilon, A)$ لدينا :

$$|\psi_{x_0}(f)| = | f(x_0)| \leq \varepsilon \ , \ \forall f \in \mathbf{U}(\varepsilon, A)$$

لكن هذا يعني بأن التابعية ψ_{x_0} مستمرة عند النقطة 0 وبالتالي على الفضاء E^* بأكمله .

حصلنا إذن على تطبيق من الفضاء E بأكمله على جزء من الفضاء E^{**} . من الواضح أن هذا التطبيق خطي . يسمى هذا التطبيق من E في E^{**} التطبيق الطبيعي من الفضاء E في الفضاء الثنوي المكرر . نرمز له بِـ π . إذا كانت كمية التابعيات الخطية على E كبيرة بكفاية (مثلاً ، إذا كان الفضاء E نظيمياً أو على الأقل ، محدباً محلياً ومنفصلاً) يصبح هذ التطبيق تباينا لأن من أجل كل عنصرين مختلفين x' وَ x'' في E توجد عندئذ تابعية $f \in E^*$ بحيث : $f(x') \neq f(x'')$ ، أي أن $\psi_{x'}$ وَ $\psi_{x''}$ تابعيتان مختلفتان على

E^* . بالإضافة إلى ذلك، إذا كان: $\pi(E) = E^{**}$ فإن الفضاء E (المحدب محلياً والمنفصل) يسمى فضاء نصف إنعكاسي. يمكن أن ندخل في الفضاء E^{**} (بصفته ثنوي (E^*, b)) الطوبولوجيا القوية التي نرمز لها بـ b^* . إذا كان الفضاء E نصف إنعكاسي وكان التطبيق $\pi: E \to E^{**}$ π مستمراً، نقول عن E أنه فضاء انعكاسي. بإمكاننا أن نبين بأن التطبيق π^{-1} مستمر دوماً، إذن:

إذا كان E فضاء انعكاسياً، فإن التطبيق $\pi: E \to E^{**}$ تشاكل بين الفضاءين الطوبولوجيين E وَ $E^{**} = (E^{**}, b^*)$.

بما أن كل عنصر من E يمكن اعتباره الآن كعنصر من الفضاء E^{**} ، فإن من المستحسن استبدال الرمز $f(x)$ المخصص لقيم التابعية $f \in E^*$ بالرمز التالي الأكثر تناظراً:

$$f(x) = (f, x) \tag{6}$$

وهكذا نستطيع اعتبار (f, x)، من أجل $f \in E^*$ مثبت، كتابعية على E ، من أجل $x \in E$ مثبت يمكن اعتباره كتابعية على E^* (نعتبر عندئذ x كعنصر من E^{**}) .

إذا كان E فضاء نظيمياً (تكون عندئذ الفضاءات E^* ، E^{**} ، الخ نظيمية أيضاً) فإن التطبيق الطبيعي من الفضاء E في ثنويه المكرر E^{**} تطبيق إيزومتري.

لرؤية ذلك، نعتبر عنصراً x من E . نرمز لنظيمه في E بـ $\|x\|$ ونظيم صورته في E^{**} بـ $\|x\|_2$. لنثبت أن $\|x\| = \|x\|_2$. ليكن f عنصراً غير منعدم كيفي في E^* . عندئذ:

$$|(f, x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$$

أي:

$$\|x\| \ge \frac{|(f, x)|}{\|f\|}$$

لما كان الطرف الأيسر من المتراجحة السابقة لا يتعلق بـ f فإن:

$$\|x\| \geq \sup \frac{|(f, x)|}{\|f\|} = \|x\|_2$$

من جهة أخرى، يأتي من نظرية هان-باناخ أن من أجل كل $x_0 \in E$، توجد تابعية خطية غير منعدمة f_0 بحيث:

$$|(f_0, x_0)| = \|f_0\| \cdot \|x_0\|$$

(لإنشاء مثل هذه التابعية يكفي أن نضع $f_0(x) = \alpha \neq 0$ من أجل العناصر ذات الشكل $x = \alpha x_0$ وتمديد هذه التابعية إلى الفضاء E بأكمله وذلك مع الإحتفاظ بالنظيم).

من المساواة (7) ينتج:

$$\|x\|_2 = \sup_{f \in E^*} \frac{|(f, x)|}{\|x\|} \geq \|x\|$$

ومنه يأتي: $\|x\| = \|x\|_2$. وهو المطلوب. وهكذا إذا كان E فضاء نظيمياً، فإن E والمنوعة الخطية (غير المغلقة عموماً) $\pi(E) \subset E^{**}$ أيزومتريان. إذا طابقنا بين E وَ $\pi(E)$ يمكننا حينئذ اعتبار E كجزء من E^{**}.

نستخلص من كون التطبيق $\pi: E \rightarrow E^{**}$ تطبيقاً إيزومترياً، في الفضاءات النظيمية، أن مفهومي نصف الانعكاس والانعكاس متطابقان في هذه الفضاءات.

ثم لما كان ثنوي فضاء نظيمي تاماً دوماً فإننا نستنتج بأن كل فضاء نظيمي إنعكاسي E فضاء تام.

تمثل الفضاءات الإقليدية ذات الأبعاد المنتهية وفضاءات هيلبرت أبسط الفضاءات الانعكاسية (لدينا أكثر من ذلك بخصوص هذه الفضاءات: $E = E^*$).

يمثل الفضاء c_0 المؤلف من المتتاليات المتقاربة نحو 0 مثالاً لفضاء تام غير إنعكاسي. ذلك أن ثنوي c_0 هو الفضاء l_1 (راجع المثال 2 الفقرة 3،

أعلاه) المؤلف من كل المتتاليات العددية القابلة للجمع مطلقاً، ثم إن ثنوي l_1 هو الفضاء m المؤلف من كل المتتاليات المحدودة:

كما أن الفضاء $C[a, b]$ المؤلف من التوابع المستمرة على قطعة مستقيمة $[a, b]$ فضاء غير انعكاسي أيضاً. لكننا لن نعطي هنا أي برهان على ذلك[1].

كمثال لفضاء انعكاسي لا يطابق ثنويه هناك الفضاء l_p من أجل $1 < p \neq 2$ (ذلك أن من $l_p^* = l_q$ حيث:
$1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$، يأتي $l_p^{**} = l_q^* = l_p$)

تمرين. برهن على أن كل فضاء جزئي مغلق من فضاء انعكاسي، هو أيضاً فضاء انعكاسي.

§ 3. الطوبولوجيا الضعيفة والتقارب الضعيف

1. الطوبولوجيا الضعيفة والتقارب الضعيف في فضاء شعاعي طوبولوجي.

نعتبر فضاء شعاعياً طوبولوجياً E ومجموعة كل التابعيات المستمرة على هذا الفضاء. إذا كانت $f_1, ..., f_n$ جملة منتهية كيفية مؤلفة من مثل هذه التابعيات وكان ε عدداً حقيقياً موجباً فإن المجموعة:

$$\{x : |f_i(x)| < \varepsilon \ ; \ i = 1, 2, ..., n\} \tag{1}$$

مفتوحة في E وتحوي النقطة 0، أي أنها تشكل جواراً للصفر. إن تقاطع جوارين من هذا النوع مجموعة من الشكل (1)؛ وبالتالي يمكن إدخال طوبولوجيا في E، تقبل المجموعات من الشكل (1) كجملة أساسية من جوارات 0. تسمى هذه الطوبولوجيا الطوبولوجيا الضعيفة للفضاء E. إن

---

(1) لدينا أكثر من ذلك: لا يوجد أي فضاء نظيمي، ثنويه الفضاء $C[a, b]$.

الطوبولوجيا الضعيفة لِـ E هي أضعف طوبولوجيا من بين الطوبولوجيات التي تجعل كل التابعيات الخطية المستمرة بالنسبة لطوبولوجيا E الأولى، تابعيات مستمرة أيضاً بالنسبة إليها.

من الواضح أن كل مجموعة جزئية مفتوحة E بمفهوم الطوبولوجيا الضعيفة، مفتوحة أيضاً بالنسبة للطوبولوجيا الأولى للفضاء E، لكن القضية العكسية غير صحيحة عموماً (لأن المجموعات ذات الشكل (1) لا تشكل بالضرورة جملة أساسية من جوارات 0 بالنسبة للطوبولوجيا الأولى). يعني ذلك، حسب المصطلح الوارد في 5 §، الفصل 2، أن الطوبولوجيا الضعيفة للفضاء E هي أضعف من الطوبولوجيا الأولى. وهذا هو سبب تسميتها.

إذا وجدت تابعيات خطية مستمرة على E بكمية كبيرة بكفاية (إذا كان الفضاء E نظيمياً، مثلاً) فإن الطوبولوجيا الضعيفة لِـ E تحقق مسلمة الفصل لهوسدورف. من السهل أن نتأكد أيضاً من أن عمليتي الجمع والضرب في عدد المعرفتين على E مستمرتان بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة لهذا الفضاء.

نشير إلى أن مسلمة قابلية العد الأولى قد تكون غير محققة من قِبل الطوبولوجيا الضعيفة لفضاء E حتى ولوكان E نظيمياً. وبالتالي لا يمكن صياغة هذه الطوبولوجيا، عموماً، بدلالة متتاليات متقاربة. وعلى الرغم من ذلك فإن التقارب في E المعرف بهذه الطوبولوجيا يعتبر مفهوماً هاماً يطلق عليه اسم التقارب الضعيف. للتمييز بين هذا التقارب والتقارب المعرف بالطوبولوجيا الأولى للفضاء E (أي بالنظيم إذا كان E نظيمياً) نسمي التقارب الأخير التقارب القوي.

نستطيع صياغة التقارب الضعيف بالطريقة التالية: نقول عن متتالية $\{x_n\}$ من عناصر E إنها متقاربة بضعف نحو $x_0 \in E$، إذا كان: من أجل كل تابعية خطية مستمرة $\varphi(x)$ على E كانت المتتالية العددية $\{\varphi(x_n)\}$ متقاربة نحو $\varphi(x_0)$.

لرؤية ذلك نضع، لاختصار الاستدلالات، $x_0 = 0$ ونفرض أن: $\varphi(x_n) \to 0$ من أجل كل $\varphi \in E^*$. عندئذ من أجل كل جوار ضعيف:

$$U = \{x : |\varphi_i(x)| < \varepsilon \quad , \quad i = 1, 2, ..., k\}$$

للنقطة 0 يوجد N بحيث $x_n \in U$ من أجل كل الأعداد $n \geq N$ (لإيجاد N يكفي اختيار N_i بحيث يكون $|\varphi_i(x_n)| < \varepsilon$ من أجل $n \geq N_i$ وأخذ $N = \max N_i$). والعكس بالعكس، إذا تمكنا من أجل كل جوار ضعيف لـ $0 : U$، من إيجاد عدد N بحيث $x_n \in U$ من أجل كل $n \geq N$، فإن الشرط $\varphi(x_n) \to 0$ عندما $n \to \infty$ محقق من أجل $\varphi \in E^*$ مثبت. لما كانت الطوبولوجيا الضعيفة للفضاء E أضعف من طوبولوجيتها القوية فإن كل متتالية متقاربة بقوة متقاربة أيضاً بضعف. أما العكس فهو خاطىء عموماً (أنظر الأمثلة الواردة أسفله).

2. التقارب الضعيف في فضاء نظيمي.

نعالج بالتفصيل مفهوم التقارب الضعيف في حالة فضاء نظيمي.

نظرية 1. إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية متقاربة بضعف في فضاء نظيمي فإنه يوجد ثابت C بحيث:

$$\|x_n\| \leq C$$

أي أن كل المتتاليات المتقاربة بضعف في فضاء نظيمي محدودة.

البرهان. نعتبر في E^* المجموعات:

$$A_{kn} = \{f : |f(x_n)| \leq k\}$$

إن A_{kn} مغلقة بفضل استمرار $f(x_n)$ بصفته تابعاً f من أجل x_n مثبت. وبالتالي فإن المجموعات:

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$$

مغلقة أيضاً (لأنها تقاطع مجموعات مغلقة). من السهل أن نرى بأن:

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

لما كان الفضاء E^* تاماً فإنه توجد حسب نظرية بير (§3 ، الفصل 3) مجموعة A_{k_0} كثيفة في كرة $S[f_0, \varepsilon]$. لكن A_{k_0} مغلق ، ولذا :

$$S[f_0, \varepsilon] \subset A_{k_0}$$

من تعريف A_{k_0} ، نرى أن المتتالية $\{x_n\}$ محدودة في الكرة $S[f_0, \varepsilon]$. وهذا يستلزم أنها محدودة أيضاً في الكرة : $S[0, \varepsilon] = \{g : \|g\| \leq \varepsilon\}$. لرؤية ذلك نلاحظ أنه إذا كان $S[0, \varepsilon] \ni g$ فإن $f_0 + g \in S[f_0, \varepsilon]$.

لكن
$$(g, x_n) = (f_0 + g, x_n) - (f_0, x_n)$$

وتشكل الأعداد (f_0, x_n) متتالية محدودة بفضل التقارب الضعيف للمتتالية $\{x_n\}$. لكن التطبيق الطبيعي من E في E^{**} إيزومتري ، وعليه إذا كان : $|(g, x_n)| \leq C$ من أجل $S[0, \varepsilon] \ni g$ فإن :

$$\|x_n\| \leq \frac{C}{\varepsilon}$$

أي أن النظيمات $\|x_n\|$ تشكل مجموعة محدودة . وهو المطلوب .

ملاحظة . للبرهان على أن المتتالية $\{x_n\}$ محدودة (بالنظيم) استخدمنا فقط كون المتتالية العددية (f, x_n) محدودة من أجل كل $E^* \ni f$. إذن ، إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ من E بحيث تكون المتتالية العددية (f, x_n) محدودة من أجل كل $E^* \ni f$ ، فإنه يوجد ثابت C بحيث : $\|x_n\| \leq C$. نستطيع تعميم هذه النتيجة : كل مجموعة Q محدودة بضعف في فضاء نظيمي (أي محدودة بمفهوم الطوبولوجيا الضعيفة) محدودة بقوة أيضاً (أي أنها محتواة في كرة) . لرؤية ذلك نفرض وجود متتالية $Q \supset \{x_n\}$ بحيث : $\|x_n\| \to \infty$ لما $n \to \infty$. لما كانت Q مجموعة محدودة بضعف فإن الأمر كذلك فيما يخص المجموعة $\{x_n\}$ ، أي أن هذه المجموعة مجموعة ممتصة من طرف كل جوار ضعيف للصفر ؛ بصفة خاصة من أجل كل $E^* \ni f$ ، يوجد N بحيث :

$$\{x_n\} \subset N = \{x : |(f, x)| < 1\}$$

ومنه : $|(f, x_n)| < N$ وهذا من أجل كل الأعداد n . لكن هذا يناقض

الفرض $\|x_n\| \to \infty$ حسب الملاحظة أعلاه. إذا راعينا النتيجة القائلة أن مجموعة Q تكون محدودة بضعف إذا وفقط إذا كانت كل تابعية خطية مستمرة تابعية محدودة في Q فإننا نصل إلى النتيجة التالية:

حتى تكون مجموعة جزئية Q من فضاء نظيمي محدودة يلزم ويكفي أن تكون كل تابعية $f \in E^*$ محدودة في Q.

غالباً ما تكون النظرية الموالية مفيدة عندما يتعلق الأمر بالتأكد من أن متتالية ما متقاربة بضعف.

نظرية 2. تكون متتالية $\{x_n\}$ من عناصر فضاء نظيمي E متقاربة بضعف نحو $x \in E$، إن كانت:

1) الأعداد $\|x_n\|$ محدودة من الأعلى بثابت M.

2) المتتالية $f(x_n)$ متقاربة نحو $f(x)$ من أجل كل $f \in \Delta$، حيث Δ مجموعة مغلفها الخطي كثيف أينما كان في E^*.

البرهان. من الشرط (2) وتعريف العمليتين على التابعيات الخطية يأتي:

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x)$$

وذلك عندما تكون φ عبارة خطية من عناصر Δ.

ليكن φ عنصراً كيفياً من E^* وَ $\{\varphi_k\}$ متتالية عبارات خطية من عناصر Δ، متقاربة نحو φ. لنثبت أن: $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. ليكن M بحيث:

$$\|x_n\| \leq M \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$\|x\| \leq M$$

لنقيم الفرق $|\varphi(x_n) - \varphi(x)|$. بما أن $\varphi_k \to \varphi$، نستطيع من أجل كل $\varepsilon > 0$، إيجاد عدد K بحيث: $\|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon$ وهذا من أجل كل $k \geq K$. لدينا إذن:

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leq |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)|$$

$$\leq \varepsilon M + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)|$$

لكن الفرض $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x)$ من أجل $n \to \infty$ ، يستلزم أن :

$\varphi(x_n) - \varphi(x) \to 0$ من أجل $n \to \infty$ مهما كان $E^* \ni \varphi$.

أمثلة. لنوضح معنى مفهوم التقارب الضعيف في بعض الفضاءات الملموسة :

1. التقارب الضعيف في الفضاء الإقليدي ذي البعد المنتهي $\mathbf{R}^n$.

إن التقارب الضعيف والتقارب القوي متطابقان هنا. لرؤية ذلك نعتبر أساساً متعامداً ومتجانساً كيفياً $e_1, ..., e_n$ في الفضاء $\mathbf{R}^n$، ولتكن $\{x_k\}$ متتالية في $\mathbf{R}^n$ متقاربة بضعف نحو العنصر x .

ولتكن أيضاً :

$$x_k = x_k^{(1)} e_1 + ... + x_k^{(n)} e_n$$

وَ :

$$x = x^{(1)} e_1 + ... + x^{(n)} e_n$$

عندئذ :

$$x_k^{(1)} = (x_k, e_1) \to (x_1, e_1) = x^{(1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k^{(n)} = (x_k, e_n) \to (x, e_n) = x^{(n)}$$

أي أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة بالإحداثيات نحو x . وفي هذه الحالة : فإن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة بقوة نحو x . وبما أن التقارب القوي يستلزم التقارب الضعيف في جميع الحالات فإن هذين التقاربين متكافئان في $\mathbf{R}^n$.

2. التقارب الضعيف في l_2 . لكي تكون متتالية محدودة $\{x_n\}$ متقاربة بضعف نحو x يكفي أن تحقق الشروط التالية :

$$(x_k, e_i) = x_k^{(i)} \to x^i = (x, e_i) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

حيث :

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$$

. . . .

لرؤية ذلك نلاحظ أن العبارات الخطية للعناصر e_i كثيفة أينما كان في الفضاء l_2 (الذي يطابق ثنويه ، كما سبق أن رأينا) . ولذا فإن مقولتنا تأتي من النظرية 2 .

وهكذا ، فإن التقارب الضعيف لمتتالية محدودة $\{x_k\}$ في l_2 يعني أن المتتالية العددية $x_k^{(i)}$ المؤلفة من إحداثيات هذه الأشعة متقاربة من أجل $i = 1, 2, \ldots$. بعبارة أخرى فإن التقارب الضعيف يطابق التقارب بالإحداثيات (شريطة أن تكون المتتالية محدودة) .

من اليسير أن نرى في l_2 بأن التقارب الضعيف لا يطابق التقارب القوي . لرؤية ذلك نثبت أن المتتالية $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ متقاربة بضعف في l_2 نحو الصفر . كل تابعية خطية f على l_2 يمكن أن تمثل بالجداء السلمي : $f(x) = (x, a)$ (للشعاع $l_2 \ni x$ في شعاع ثابت $(a = (a_1, a_2, \ldots)$. وبالتالي :

$$f(e_n) = a_n$$

وبما أن $a_n \to 0$ لما $n \to \infty$ من أجل كل $a \in l_2$ ، نحصل على :

$$\lim_{n \to \infty} f(e_n) = 0$$

من أجل كل تابعية خطية على l_2 . ورغم ذلك فإن المتتالية $\{e_n\}$ لاتتقارب بقوة نحو أي نهاية .

تمارين . 1. لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر فضاء هيلبرتي H متقاربة بضعف

نحو عنصر x وبحيث $\|x\| \leftarrow \|x_n\|$ من أجل $n \to \infty$. برهن في هذه الظروف أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة بقوة نحو x ، أي أن : $\|x_n - x\| \to 0$.

2. برهن على أن مقولة التمرين 1 تبقى صحيحة إذا استبدلنا الشرط $\|x\| \leftarrow \|x_n\|$ بالشرط $\|x\| \geq \|x_n\|$ من أجل كل n ، أو بالشرط $\|x\| \geq \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

3. ليكن H فضاء لهيلبرت (قابلاً للفصل) وَ Q مجموعة جزئية محدودة في H . عندئذ تكون طوبولوجيا Q المستخرجة من الطوبولوجيا الضعيفة لِـ H ، معرفة بواسطة مسافة.

4. أثبت أن كل مجموعة جزئية مغلقة ومحدبة من فضاء هيلبرتي مغلقة بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة (بصفة خاصة، فإن كل فضاء شعاعي جزئي مغلق من فضاء هيلبرتي مغلق بضعف) . أعط مثالا لمجموعة مغلقة في فضاء هيلبرتي وغير مغلقة بضعف.

3. التقارب الضعيف في الفضاء $C[a, b]$ المؤلف من التوابع المستمرة. لتكن $\{x_n(t)\}$ متتالية توابع من $C[a, b]$ متقاربة بضعف نحو تابع $x(t)$. إن المتتالية $\{x_n(t)\}$ محدودة بالنسبة لنظيم $C[a, b]$. من بين التابعيات المعرفة على $C[a, b]$ نعتبر بصفة خاصة التابعيات δ_{t_0} التي تلحق كل واحدة منها بكل تابع قيمته عند نقطة مثبّتة t_0 (راجع المثال 4، الفقرة 2 ، § 1) . من أجل كل تابعية δ_{t_0} يعني الشرط :

$$\delta_{t_0}(x_n) \to \delta_{t_0}(x)$$

أن :

$$x_n(t_0) \to x(t_0)$$

إذن إذا كانت المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة بضعف فهي :

1) محدودة بانتظام أي أن $|x_n(t)| \leq C$ من أجل كل $n = 1, 2, \dots$ وكل $t \in [a, b]$ ؛

2) متقاربة عند كل نقطة.

يمكن أن نثبت بأن هذين الشرطين ضروريان وكذا كافيان لتقارب المتتالية $\{x_n(t)\}$ بضعف في $C[a, b]$.

بعبارة أخرى، فإن التقارب الضعيف في $C[a, b]$ يطابق التقارب النقطي (شريطة أن تكون المتتالية محدودة).

من الواضح أن هذا التقارب لا يطابق التقارب بمفهوم نظيم $C[a, b]$، أي مع التقارب المنتظم للتوابع المستمرة (أعط مثالاً يوضح ذلك).

3. الطوبولوجيا الضعيفة والتقارب الضعيف في الفضاء الثنوي.

أدخلنا في الفقرة 4 من 2§ طوبولوجيا في الفضاء الثنوي E^*، وأسميناها الطوبولوجيا القوية، وقد عرفناها بواسطة جملة من جوارات الصفر هي جماعة المجموعات ذات الشكل:

$$U_{\varepsilon,A} = \{f : |f(x)| < \varepsilon \quad , \quad x \in A\}$$

حيث A مجموعة محدودة كيفية من E، وَ ε عدد موجب كيفي. إذا اعتبرنا بدل المجموعات المحدودة كل المجموعات الجزئية المنتهية $A \subset E$ نحصل على الطوبولوجياً المسماة الطوبولوجيا الضعيفة للفضاء الثنوي E^*. بما أن كل مجموعة منتهية $A \subset E$ مجموعة محدودة أيضاً (القضية العكسية خاطئة عموماً) فمن الواضح بأن الطوبولوجيا الضعيفة للفضاء E^* أضعف من طوبولوجيته القوية. إن هاتين الطوبولوجيتين غير متطابقتين عموماً.

تعرف الطوبولوجيا الضعيفة، المدخلة في E^*، على هذا الفضاء تقارباً يدعى التقارب الضعيف للتابعيات. إن التقارب الضعيف للتابعيات الخطية مفهوم هام يلعب دوراً معتبراً في العديد من مسائل التحليل التابعي، وبصفة خاصة في نظرية التوزيعات التي سنتعرض لها في 4§ الموالي.

إن التقارب الضعيف لمتتالية $\{\varphi_n\}$ من التابعيات الخطية يطابق بطبيعة الحال تقارب هذه المتتالية من أجل كل عنصر مثبت في الفضاء E .
بعبارة أخرى ، نقول عن المتتالية $\{\varphi_n\}$ إنها متقاربة بضعف نحو $\varphi \in E^*$ ، إذا كان لدينا :

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x)$$

من أجل كل $x \in E$.

من الواضح أن الحال في الفضاء الثنوي هو الحال في الفضاء الأول ، فكل متتالية متقاربة بالنسبة للطوبولوجيا القوية متقاربة أيضاً بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة (لكن القضية العكسية غير صحيحة عموماً) .

ليكن E (وبالتالي E^* أيضاً) فضاء لباناخ . لدينا النظرية التالية المماثلة للنظرية 1 .

نظرية *1 . لتكن $\{f_n\}$ متتالية متقاربة بضعف مؤلفة من تابعيات خطية على فضاء لباناخ ، يوجد ثابت C بحيث :

$$\|f_n\| \leq C \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

بعبارة أخرى ، فإن كل متتالية متقاربة بضعف عناصرها في ثنويّ فضاء باناخي محدودة بالنظيم (أي ان نظيمات عناصرها محدودة) .

ليس هناك فارق بين برهان هذه النظرية وبرهان النظرية 1 . من جهة أخرى لدينا النظرية التالية المماثلة للنظرية 2 .

نظرية *2 . تكون متتالية تابعيات خطية $\{\varphi_n\}$ من E^* متقاربة بضعف نحو $\varphi \in E^*$ إذا كانت :

1) المتتالية محدودة ، أي :

$$\|\varphi_n\| \leq C \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

2) العلاقة $(\varphi_n, x) \to (\varphi, x)$ محققة من أجل كل العناصر x المنتمية إلى مجموعة مغلفها خطي كثيف أينما كان في E .

إن البرهان على هذه النظرية هو برهان النظرية 2 .

لنعتبر مثالاً . ليكن E فضاء التوابع المستمرة $C[a, b]$[1] ولتكن :

$$\varphi(x) = x(0)$$

وهذا يعني أن φ هو التابع δ (راجع § 1، الفقرة 2، المثال 4) . لتكن أيضاً $\{\varphi_n(t)\}$ متتالية توابع مستمرة تحقق الشرطين التاليين :

1) $\varphi_n(t) = 0$ من أجل $|t| > \frac{1}{n}$ وَ $0 \le \varphi_n(t)$.

2) $$\int_a^b \varphi_n(t)\,dt = 1$$

ومنه يأتي ، من أجل كل تابع $x(t)$ مستمر على $[a, b]$، أن :

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,x(t)\,dt = \int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(t)\,x(t)\,dt \to x(0);\quad n \to \infty$$

وذلك بتطبيق نظرية المتوسط .

إن العبارة :

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,x(t)\,dt$$

تابعية خطية على $C[a, b]$. وهكذا يمكن كتابة التابع δ كنهاية بمفهوم التقارب الضعيف للتابعيات الخطية على $C[a, b]$ ، لمتتالية توابع «معتادة» .

ملاحظة. يقبل الفضاء E^* المؤلف من التابعيات الخطية على فضاء E تفسيرين : إما أن نعتبر E^* كثنوي الفضاء الأول E ، وإما أن نعتبره فضاء الأساس أي أن الفضاء E^{**} ثنويه . وهذا يعني أننا نستطيع ادخال

(1) نعتبر أن النقطة 0 منتمية إلى $[a, b]$. بدل $t = 0$ يمكن اعتبار أية نقطة أخرى.

الطوبولوجيا الضعيفة في E^* بطريقتين مختلفتين: اما باعتبار E^* فضاء تابعيات، فنعرف الجوارات في E^* بواسطة مجموعات جزئية منتهية من E، واما بصفته فضاء الأساس، فنعرف الطوبولوجيا عليه بواسطة الفضاء الثنوي E^{**}. إذا تعلق الأمر بفضاء انعكاسي فإننا نعلم أنه لا فرق بين هذا وذاك. أما إذا كان الفضاء E غير انعكاسي فإن هاتين الطوبولوجيتين مختلفتان في E^*. لتفادي الشبهات نحتفظ بتسمية الطوبولوجيا الضعيفة على فضاء الأساس (أي طوبولوجيا E^* المعرفة بواسطة E^{**}) أما الطوبولوجيا الضعيفة على فضاء التابعيات (أي الطوبولوجيا على E^* المعرفة بواسطة E) فنسميها الطوبولوجيا * - الضعيفة. من البديهي أن الطوبولوجيا * - الضعيفة على الفضاء E^* أضعف من الطوبولوجيا الضعيفة لِـ E (أي أن الطوبولوجيا الضعيفة تحوي كمية من المجموعات المفتوحة أكبر من كمية المجموعات المفتوحة في الطوبولوجيا * - الضعيفة أو تساويها).

4. المجموعات المحدودة في الفضاء الثنوي.

تلعب النظرية التالية دوراً هاماً في العديد من التطبيقات لمفهوم التقارب الضعيف للتابعيات الخطية.

نظرية 3. إذا كان E فضاء شعاعياً نظيمياً قابلاً للفصل فإن كل متتالية محدودة مؤلفة من تابعيات خطية مستمرة على E تحوي متتالية جزئية متقاربة بضعف.

البرهان. نختار في E مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. إذا كانت $\{\varphi_n\}$ متتالية نظيمات عناصرها محدودة، مؤلفة من تابعيات خطية على E، فإن المتتالية العددية:

$$\varphi_1(x_1),\ \ \varphi_2(x_1), ..., \varphi_n(x_1), ...$$

محدودة. ولذا يمكن أن نستخرج من $\{\varphi_n\}$ متتالية جزئية:

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, ..., \varphi_n^{(1)}, ...$$

بحيث تكون المتتالية العددية :

$$\varphi_1^{(1)}(x_1), \varphi_2^{(1)}(x_1), ..., \varphi_n^{(1)}(x_1), ...$$

متقاربة . ثم من $\{\varphi_n^{(1)}\}$ يمكن استخراج متتالية جزئية :

$$\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, ..., \varphi_n^{(2)}, ...$$

بحيث تكون المتتالية العددية :

$$\varphi_1^{(2)}(x_2), \varphi_2^{(2)}(x_2), ..., \varphi_n^{(2)}(x_2), ...$$

متقاربة . بإعادة هذه الطريقة نحصل على جملة متتاليات :

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, ..., \varphi_n^{(1)}, ...$$

$$\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, ..., \varphi_n^{(2)}, ...$$

. . . .

(كل واحدة منها محتواة في السابقة) بحيث أن كل متتالية $\{\varphi_n^{(k)}\}$ متقاربة عند النقاط : $x_1, x_2, ..., x_k$. باعتبار «القطر» :

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, ..., \varphi_n^{(n)}, ...$$

نحصل على متتالية جزئية من التابعيات الخطية بحيث تكون المتتالية العددية :

$$\varphi_1^{(1)}(x_n), \varphi_2^{(2)}(x_n), ...$$

متقاربة من أجل كل n . ومنه يأتي (حسب النظرية 2*) أن المتتالية $\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(2)}(x), ...$ متقاربة أيضاً من أجل كل $x \in E$. وهو المطلوب .

تعني هذه النظرية بمراعاة النظرية 1* ، أن في ثنوي فضاء لباناخ قابل للفصل E^* نجد أن المجموعات المحدودة شبه متراصة عدودياً بالنسبة للطوبولوجيا * - الضعيفة وليس هناك مجموعات شبه متراصة عدودياً غير المجموعات المحدودة .

لنثبت هنا أن شبه التراص العدودي هو في الواقع شبه تراص.

نبدأ بالبرهان على النظرية التالية:

نظرية 4. لتكن S^* كرة الوحدة المغلقة في الفضاء E^* الثنوي لِفضاء نظيمي قابل للفصل E. إن الطوبولوجيا، المقتصرة على S^* من الطوبولوجيا * - الضعيفة للفضاء E^*، يمكن تعريفها بواسطة المسافة:

$$\varrho(f, g) = \sum 2^{-n} |(f - g, x_n)| \quad (2)$$

حيث $\{x_n\}$ مجموعة قابلة للعد مثبتة وكيفية، كثيفة أينما كان في كرة الوحدة S للفضاء E.

البرهان. من الواضح أن التابع $\varrho(f, g)$ يتمتع بكل خاصيات المسافة؛ من جهة أخرى فهو لامتغير بالنسبة للإنسحابات:

$$\varrho(f + h, g + h) = \varrho(f, g)$$

وبالتالي يكفي أن نتأكد من أن جماعة جوارات الصفر، المعرفة في S^* بالطوبولوجيا الضعيفة للفضاء E^*، تكافىء جماعة جوارات الصفر المعرفة في S^* بالمسافة (2)؛ بعبارة أخرى يكفي أن نتأكد من:

أ) أن كل «كرة»

$$Q_\varepsilon = \{f : \varrho(f, 0) < \varepsilon\}$$

تحوي تقاطع S^* مع جوار معين ضعيف للصفر في E^*.

ب) أن كل جوار ضعيف للصفر في E^* يحوي تقاطع S^* مع «كرة» معينة Q_ε.

نختار N بحيث $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$ ونعتبر الجوار الضعيف للصفر:

$$V = V_{x_1, \dots, x_N, \varepsilon/2} = \{f : |(f, x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \; k = 1, 2, \dots, N\}$$

عندئذ، إذا كان $f \in V \cap S^*$ فإن:

$$\varrho(f, 0) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |(f, x^n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |(f, x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{N} 2^{-n} < \varepsilon$$

أي أن $S^* \cap V \subset Q_\varepsilon$. وهذا يثبت المقولة (أ). لنثبت (ب). ليكن $U = U_{y_1, \ldots, y_m; \delta} = \{f : |(f, y_k)| < \delta \ , \ k = 1, 2, \ldots, m\}$ جواراً * - ضعيفاً للصفر كيفياً في E^*. يمكن أن نفرض بأن: $\|y_k\| \leq 1$، $k = 1, 2, \ldots, m$؛ بما أن المجموعة $\{x_n\}$ كثيفة أينما كان في S، توجد أرقام $n_1, \ldots, n_m$ بحيث $\|y_k - x_{n_k}\| < \frac{\delta}{2}$، $k = 1, 2, \ldots, m$.

لتكن: $N = \max(n_1, \ldots, n_m)$ وَ $\varepsilon = 2^{-(N+1)\delta}$. عندئذ نستنتج من المتراجحات:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |(f, x_n)| < \varepsilon$$

من أجل $f \in S^* \cap Q_\varepsilon$، أن: $|(f, x_n)| < 2^n \varepsilon$؛ بصفة خاصة:

$$|(f, x_{n_k})| < 2^{n_k} \cdot \varepsilon \leq 2^{N} \varepsilon = \frac{\delta}{2}$$

وبالتالي، من أجل $k = 1, 2, \ldots, m$ لدينا:

$$|(f, y_k)| \leq |(f, x_{n_k})| + |(f, y_k - x_{n_k})| < \frac{\delta}{2} + \|f\| \cdot \|y_k - x_{n_k}\| < \delta$$

وبالتالي $S^* \cap Q_\varepsilon \subset U$. انتهى البرهان.

من الواضح أن هذه النتيجة تشمل مباشرة كل كرة، وبالتالي كل مجموعة جزئية محدودة $M \subset E^*$.

أثبتنا (النظرية 3) أن من كل متتالية محدودة من عناصر E^* يمكن استخراج متتالية جزئية * - متقاربة بضعف. بعبارة أخرى فإن كل مجموعة محدودة M في الثنوي E^* لفضاء شعاعي نظيمي قابل للفصل مزود بالطوبولوجيا * - الضعيفة مجموعة شبه متراصة عدودياً. لكن النظرية

الســابقة تثبت أن كل مجموعة من هذا النوع تشكل فضــاء طوبولوجياً قابل لمسافة. نعلم من جهة أخرى أن مفهوم التراص ومفهوم التراص العدودي متطابقان في الفضاءات المترية.

نحصل عندئذ على النتيجة التالية.

نظرية *3. كل مجموعة محدودة M في الفضــاء E^*، الثنوي لفضــاء E نظيمي وقابل للفصل، مجموعة شبه متراصة بمفهوم الطوبولوجيا * – الضعيفة للفضــاء E^*.

لنثبت أنه إذا كان E فضــاء شعاعياً نظيمياً وقابلاً للفصل فإن كل كرة مغلقة في الفضــاء (E^*, b) مغلقة أيضاً بالنسبة للطوبولوجيا * – الضعيفة للفضــاء E^*.

بما أن كل انسحاب في الفضــاء E^* يحول المجموعات المغلقة (بالنسبة للطوبولوجيا * – الضعيفة) إلى مجموعات مغلقة يكفي أن نبرهن على أن كل كرة من الشكل $S_c^* = \{f : \|f\| \leq C\}$ مغلقة بالنسبة للطوبولوجيا * – الضعيفة. ليكن $f \notin S_c^*$. من تعريف النظيم لتابعية نستنتج وجود شعاع $x \in E$ بحيث $\|x\| = 1$، $f_0(x) = \alpha > c$. تصبح عندئذ المجموعة:

$$U = \left\{f : f(x) > \frac{\alpha + c}{2}\right\}$$

جواراً * – ضعيفاً للتابعية f_0 لا يحوي أي عنصر من الـكرة S_c^*؛ وبالتالي فإن الـكرة S_c^* مغلقة بالنسبة للطوبولوجيا * – الضعيفة.

نستنتج مما سبق النظرية التالية:

النظرية 5. كل كرة مغلقة في الفضــاء الثنوي لفضــاء نظيمي قابل للفصل كرة متراصة بمفهوم الطوبولوجيا * – الضعيفة.

إن النتائج المقدمة أعلاه حول المجموعات المحدودة في الفضــاء الثنوي

يمكن تعميمها من الفضاءات النظيمية إلى الفضاءات المحدبة محلياً. راجع، بهذا الخصوص [42] مثلاً.

§ 4. التوزيعات

1. تعميم مفهوم التابع.

عادة ما نضطر في فرع التحليل إلى اعتبار لفظ «تابع» بمفهوم واسع ومتغير يتكيف مع نوعية المسائل المطروحة. فقد نعتبر أحيانا توابع مستمرة، وقد نعتبر توابع الاشتقاق مرة أو عدة مرات الخ، ويحدث أيضاً أن يعجز المفهوم التقليدي للتابع، حتى ولو اعتبرنا أوسع شكل له (وهو اعتباره كقانون كيفي يلحق بكل قيمة لِـ x تنتمي إلى ساحة التعريف لهذا التابع، عدداً $(y = f(x))$، عن تأدية المهمة المنتظرة منه. لتوضيح ذلك نسوق الآن مثالين.

1) من المفيد تعريف توزيع الكتل على طول مستقيم بواسطة كثافة هذا التوزيع. لكن إذا وجدت نقاط على هذا المستقيم مزودة بكتل موجبة فإن كثافة مثل هذا التوزيع لا يمكن أبداً وصفها بأي تابع «معتاد».

2) نتعرض أحيانا، لدى تطبيق بعض طرق التحليل الرياضي على بعض المسائل، إلى استحالة اجراء عملية من العمليات؛ فمثلاً إذا كان لدينا تابع لا يقبل مشتقاً (في بعض النقاط أو كلها) فإننا لا نستطيع اشتقاقه إذا كان المقصود من مشتقه تابعاً «معتاداً». بالإمكان تفادي هذه العراقيل بالإقتصار على دراسة التوابع التحليلية مثلا. لكن مثل هذا الحصر لمجموعة التوابع المقبولة غير مرغوب فيه في الكثير من الحالات.

هناك وسيلة أخرى تجعلنا نتفادى هذا النوع من الصعوبات، وهي تتمثل في اعتبار، بدل تضييق مفهوم التابع، تعميم واسع لهذا المفهوم وذلك بواسطة إدخال التوابع المعممة أو التوزيعات، التي تعرف انطلاقاً من مفهوم الفضاء الثنوي المعتبر أعلاه.

نؤكد مرة أخرى على أن إدخال التوزيعات يرجع أصلاً إلى مسائل جد ملموسة وليس إلى مجرد ميول تعميم مفاهيم التحليل إلى أوسع نطاق. فقد شرع الفيزيائيون في استعمال التوزيعات منذ زمن بعيد، وقبل أن يتم إنشاء النظرية الرياضية للتوزيعات.

قبل الشروع في تقديم التعاريف الدقيقة، دعنا نقدم الفكرة الرئيسية لهذا الإنشاء.

ليكن f تابعاً معطى على المستقيم العددي، يقبل المكاملة على كل مجال منته، وليكن φ تابعاً مستمراً ومنعدماً خارج مجال معين (نسمي هذه التوابع، في المستقبل، التوابع ذات الحوامل المحدودة). بواسطة التابع المعطى f، نلحق بكل تابع φ من هذا النوع عدداً:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \qquad (1)$$

(الواقع هو أن التكامل مأخوذ على مجال منته لأن التابع φ ذو حامل محدود). بعبارة أخرى، يمكن اعتبار التابع f كتابعية (خطية، بفضل الخاصيات الأساسية للتكامل) على فضاء توابع ذات حوامل محدودة. ورغم ذلك فإن التابعيات ذات الشكل (1) ليست الوحيدة التي يمكن تعريفها على مثل ذلك الفضاء؛ نستطيع مثلاً الحاق بكل تابع φ قيمته عند النقطة $x = 0$، فنحصل على تابعية خطية لا يمكن كتابتها على الشكل (1). إذن، فإن التوابع $f(x)$ تنتمي، بالفعل، إلى مجموعة أوسع تحوي كل التابعيات الخطية المعرفة على فضاء توابع ذات حوامل محدودة.

يمكن اختيار فضاء التوابع φ بطرق مختلفة؛ نأخذ مثلاً فضاء التوابع المستمرة ذات الحوامل المحدودة. ورغم هذا، فإنه من المعقول، كما سنرى ذلك، أن نخضع التوابع المقبولة φ ليس فقط إلى شرط الاستمرار وشرط الحامل المحدود بل أيضاً إلى شروط أكثر تقييداً متعلقة بقابلية المفاضلة.

2. فضاء توابع الأساس.

ننتقل الآن إلى التعاريف الدقيقة. نعتبر على المستقيم العددي المجموعة K المؤلفة من كافة التوابع ذات الحوامل المحدودة φ القابلة لمشتقات مستمرة من كل الرتب. إن التوابع المنتمية إلى K تشكل فضاء شعاعياً (مزوداً بالعمليتين المعتادتين للجمع وللضرب في عدد). لا يمكن أن ندخل على هذا الفضاء نظيماً ينسجم مع النظرية التي سنقدمها أسفله، إلاَّ أننا نستطيع إدخال مفهوم التقارب بصفة طبيعية.

نقول عن متتالية $\{\varphi_n\}$ من عناصر K أنها متقاربة نحو تابع $\varphi \in K$ إذا:

1) وجد مجال تنعدم[1] خارجه كل التوابع φ_n.

2) كانت المتتالية $\{\varphi_n^{(k)}\}$ المؤلفة من المشتقات ذات الرتبة k[2] $(k = 0, 1, 2, \dots)$ متقاربة بانتظام على هذا المجال نحو $\varphi^{(k)}$ (انتظام التقارب بالنسبة لمجموعة الأعداد k غير مطلوب).

يسمى الفضاء الشعاعي K مع هذا المفهوم للتقارب فضاء الأساس ونسمي عناصره توابع الأساس.

من السهل وصف الطوبولوجيا على K التي يعرفها التقارب السابق في K. إن هذه الطوبولوجيا مولدة عن جماعة جوارات الصفر التي نعرف كل واحد منها بواسطة مجموعة منتهية من التوابع المستمرة والموجبة: $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ حيث يتألف كل جوار من هذه الجوارات من توابع K التي تحقق المتراجحات:

$$|\varphi(x)| < \gamma_0(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$|\varphi^{(m)}(x)| < \gamma_m(x)$$

وذلك مهما كان x. أما التأكد من كون التقارب في K المعرف أعلاه يعطي بالفعل هذه الطوبولوجيا فإننا نتركه للقارئ.

(1) المجال الذي ينعدم خارجه φ يختلف عادة باختلاف التوابع φ.

(2) المقصود من المشتق ذي الرتبة 0 هو، كالعادة، التابع نفسه.

تمرين. نرمز بِـ K_m للفضاء الجزئي من الفضاء K ، المشكل من التوابع $\varphi \in K$ المنعدمة خارج القطعة المستقيمة $[-m, m]$. يمكن تزويد الفضاء K_m ببنية فضاء نظيمي عدودياً ، وذلك بوضع :

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x| \leq m}} |\varphi^k(x)| \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

أثبت أن الطوبولوجيا (وكذا تقارب المتتاليات) للفضاء K_m ، المولدة عن هذه الجماعة من النظيمات ، تطابق الطوبولوجيا (التقارب ، على التوالي) المقتصرة على K_m من الطوبولوجيا (التقارب ، على التوالي) في الفضاء K التي أدخلناها أعلاه. من الواضح أن : $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m \subset \ldots$ وَ $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$. أثبت أن المجموعة $Q \subset K$ تكون محدودة بالنسبة للطوبولوجيا المعرفة على K إذا وفقط إذا وجد عدد m بحيث تكون Q مجموعة جزئية محدودة من الفضاء المحدود عدودياً K_m . لتكن T تابعية خطية على الفضاء K ؛ أثبت تكافؤ الشروط الأربعة التالية : (أ) التابعية T مستمرة بالنسبة لطوبولوجيا الفضاء K ؛ (ب) التابعية T محدودة على كل مجموعة محدودة $Q \subset K$ ؛ (ج) إذا كان $\varphi_n \in K$ وَ $\varphi_n \to 0$ (بمفهوم تقارب المتتاليات ، المعرف في K) فإن : $T(\varphi_n) \to 0$ ؛ (د) من أجل كل m فإن الاقتصار T_m للتابعية T على الفضاء الجزئي $K_m \subset K$ تابعية مستمرة على K_m .

3. التوزيعات.

تعريف 1. نسمي توزيعاً أو تابعاً معمما (معطى على المستقيم $-\infty < x < \infty$) كل تابعية مستمرة $T(\varphi)$ معرفة على فضاء الأساس K . المقصود من استمرار التابعية T هنا هو أن تكون $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ إذا تقاربت المتتالية φ_n نحو φ في فضاء الأساس.

نلاحظ في البداية أن كل تابع $f(x)$ قابل للمكاملة على كل مجال منته يولد توزيعاً. ذلك أن العبارة :

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{2}$$

تابعية خطية مستمرة على K . نسمي التابعيات من هذا الشكل التوزيعات النظامية ؛ ونسمي التوزيعات الأخرى أي تلك التي لا تكتب على الشكل (2) التوزيعات الشاذة.

نسوق أمثلة لبعض التوزيعات الشاذة.

1. «التابع δ» :

$$T(\varphi) = \varphi(0)$$

إنها تابعية خطية ومستمرة على K ، وهي بالتالي توزيع حسب المصطلح الذي أدخلناه آنفاً. تكتب هذه التابعية ، كما جرت العادة ، على الشكل :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{3}$$

حيث نرمز بِـ $\delta(x)$ «للتابع» المنعدم عند كل نقطة $x \neq 0$ واللامنتهى عند النقطة $x = 0$ بحيث :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

كنا اعتبرنا التابع δ في 1 § كتابعية على فضاء التوابع المستمرة المعرفة على قطعة مستقيمة. لكن باعتبار التابع δ كتابعية على K ، نحصل على بعض الفوائد ؛ منها ، مثلا ، أننا نستطيع في هذه الحالة إدخال مفهوم مشتق التابع δ.

2. «التابع δ المسحوب» . ليكن :

$$T(\varphi) = \varphi(a)$$

من الطبيعي كتابة هذه التابعية على الشكل التالي المماثل للشكل (3) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a)\, \varphi(x)\, dx \tag{4}$$

3. «مشتق التابع δ» . نلحق بكل $\varphi \in K$ العدد $-\varphi'(0)$. سنرى أسفله أن اعتبار هذه التابعية كمشتق لتابعية المثال الأول اعتبار طبيعي.

4. نعتبر التابع $1/x$. إنه لايقبل المكاملة على أي مجال يحوي نقطة الصفر. وعلى الرغم من ذلك، من أجل كل $\varphi \in K$ فإن التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

موجود ومنته بمفهوم القيمة الرئيسية. ذلك لأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx = \int_a^b \varphi(x) \frac{1}{x} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_b^a \frac{\varphi(0)}{x} dx$$

يرمز هنا (a, b) للمجال الذي ينعدم خارجه التابع φ. إن التكامل الأول من الطرف الأيمن موجود بالمفهوم المعتاد (بصفته تكاملاً لتابع مستمر)؛ أما التكامل الثاني فهو موجود بمفهوم القيمة الرئيسية. وهكذا نرى أن التابع $1/x$ يعرف تابعية على K، أي توزيعاً. يمكن أن نبرهن على أن كل التابعيات الواردة في الأمثلة من 1 إلى 4 تابعيات شاذة (أي أنها لاتكتب على الشكل (2) مهما كان التابع f القابل للمكاملة محلياً).

4. عمليات على التوزيعات.

نعرف على التوزيعات، أي على التابعيات الخطية المستمرة على K عمليتي الجمع والضرب في عدد. من جهة أخرى، من البديهي أن جمع التوزيعات النظامية أي التوابع «المعتادة» على المستقيم العددي كجمع توزيعات (أي تابعيات خطية) يطابق جمعها كتوابع، وكذا الأمر فيما يخص الضرب في عدد.

ندخل في فضاء التوزيعات عملية الإنتقال إلى النهاية. نقول عن متتالية توزيعات $\{f_n\}$ أنها متقاربة نحو f إذا كان لدينا:

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$$

من أجل كل $\varphi \in K$.

بعبارة أخرى فإن تقارب متتالية توزيعات معرف كتقارب هذه المتتالية

من أجل كل عنصر من K . نرمز لفضـاء التوزيعات على K عند تزويده بهذا التقارب بِـ K^* .

إذا كان α تابعاً قابلاً للإشتقاق لانهائياً ، فمن الطبيعي أن نعرف جداء α في توزيع f بواسطة الدستور :

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$$

(إن لعبارة الطرف الأيمن معنى لأن $\alpha\varphi \in K$) . إن كل هذه العمليات أي الجمع والضرب في عدد والضرب في تابع قابل للاشتقاق لا نهائياً عمليات مستمرة .

سوف لن ندخل جداء توزيعين . يمكن أن نبرهن على أنه من المستحيل تعريف مثل هذه العملية إذا ما طلبنا أن تكون مستمرة ومطابقة لعملية ضرب التوابع المعتاد في حالة التوزيعات المنتظمة .

ندخل الآن عملية اشتقاق التوزيعات ونعرض خاصياتها .

لتكن في البداية تابعية T على K معرفة بتابع يقبل الاشتقاق باستمرار f :

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

من الطبيعي أن نسمي مشتق T التابعية $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ المعرفة بالدستور :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

بالمكاملة بالتجزئة وبمراعاة كون تابع الأسـاس φ ينعدم خارج مجال محدود نحصل على :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

وهكذا نحصل على عبارة تمثل $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ لاتتعلق بمشتق التابع f. تقودنا هذه الاعتبارات إلى تبني التعريف التالي:

تعريف 2. المشتق $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ لتوزيع T هو تعريفاً، التابعية المعرفة بالدستور:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(\varphi) = -\ T(\varphi')$$

من الواضح أن التابعية المعرفة بهذا الدستور خطية ومستمرة، أي أنها توزيع. نعرف المشتق الثاني لتوزيع بطريقة مماثلة، وكذا الأمر بالنسبة للمشتقات الأخرى.

لنرمز للتوزيع بـf ولمشتقه (بمفهوم التعريف أعلاه) بـf' نستنتج الخاصيتين التاليتين من تعريف التوزيع:

1. يقبل كل توزيع مشتقات من كل الرتب.

2. إذا تقاربت متتالية توزيعات $\{f_n\}$ نحو توزيع f (بمفهوم تقارب التوزيعات المعرف أعلاه) فإن متتالية المشتقات $\{f'_n\}$ متقاربة نحو المشتق f' للتوزيع الذي يمثل النهاية؛ وكذا الأمر فيما يخص المشتقات من كل الرتب.

إن ذلك يكافىء القول بأن كل سلسلة متقاربة من التوزيعات يمكن اشتقاقها حداً حداً وهذا من أجل كل رتبة (اشتقاق).

نعتبر الآن بعض الأمثلة.

1. مما سبق يأتي أنه إذا كان f توزيعاً منتظماً (أي تابعاً «معتاداً» يقبل مشتقاً مستمراً أو مستمراً بتقطع) فإن مشتقه بمفهوم مشتق توزيع يطابق مشتقه بالمفهوم المعتاد.

2. ليكن:

$$f(x) = \begin{cases} 1\ ,\ x > 0 \\ 0\ ,\ x \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

يعرّف هذا التابع، المسمى تابع هيفساي‍د (Heaviside)، تابعية خطية:

$$(f, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

طبقاً لتعريف مشتق توزيع ، لدينا :

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)$$

(لأن φ ينعدم عند اللانهاية) . وبالتالي فإن مشتق تابع هيفسايد (5) هو التابع δ .

3. من المثالين 1 وَ 2 يأتي أنه إذا كان f تابعاً له قفزات عند النقاط $x_1, x_2, \ldots$ ، تساوى على التوالي $h_1, h_2, \ldots$ وكان f يقبل الإشتقاق (بالمفهوم المعتاد) عند النقاط الأخرى فإن مشتقه (بمفهوم مشتق توزيع) يساوي مجموع مشتقه المعتاد f' (عند النقاط التي يوجد فيها هذا المشتق) وعبارة من الشكل :

$$\sum_i h_i\,\delta(x - x_i)$$

4. بتطبيق تعريف مشتق توزيع على التابع δ نرى أن مشتقه تابعية تأخذ القيمة $-\varphi'(0)$ من أجل كل تابع في K . وهذا هو بالضبط «مشتق التابع δ» .

5. نعتبر السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \tag{6}$$

إن مجموعها تابع دوري دورته 2π معرف على القطعة $[-\pi, \pi]$ بالدستور :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x \leq \pi \\ -\dfrac{\pi + x}{2}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

إن مشتق هذا التابع (بمفهوم مشتق توزيع) يساوي :

$$-1/2 + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) \tag{7}$$

وهو توزيع (إذا طبقناه على أي تابع ذي حامل محدود، نحصل على عدد منته من الحدود غير المنعدمة) . من جهة أخرى، باشتقاق السلسلة (6) حداً حداً نحصل على السلسلة المتباعدة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

ورغم ذلك فإن هذه السلسلة متقاربة بمفهوم تقارب التوزيعات نحو العبارة (7) . وهكذا يسمح مفهوم التوزيع بإعطاء معنى محدد لمجموع سلسلة متباعدة بالمفهوم المعتاد؛ والأمر كذلك فيما يخص العديد من التكاملات المتباعدة. نواجه هذه الحالة عادة في النظرية الكمية للحقول وفي بعض الفروع الأخرى من الفيزياء النظرية. كما نواجه نفس الحالة أيضاً لدى حل بعض المسائل الأولية للفيزياء الرياضية بطريقة فوريي. وهكذا نرى مثلاً أن معادلة الوتر المهتز $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ تؤدي إلى سلاسل مثلثية تقبل مشتقات ثانية بالنسبة لـ x وَ t بمفهوم نظرية التوزيعات فقط، ولذا فإن هذه السلاسل تحقق المعادلة المعتبرة ضمن مفهوم التوزيعات فقط.

5. كفاية مجموعة توابع الأساس.

عرفنا التوزيعات كتابعيات خطية على فضاء وبخاصة على الفضاء K المؤلف من التوابع القابلة للإشتقاق لانهائياً ذات الحوامل المحدودة. ورغم هذا، كان بإمكاننا أن نختار فضاء الأساس بطريقة أخرى. لننظر في الأسباب التي جعلتنا نختار الفضاء K كفضاء أساس؛ مع العلم أن هذه الأسباب قائمة أيضاً في حالات أخرى. عندما نفرض على التوابع المنتمية إلى K أن تكون ذات حوامل محدودة وقابلة للإشتقاق لانهائياً نحصل، أولاً، على عدد كبير من التوزيعات (لأن تضييق فضاء الأساس يستلزم توسيع الفضاء الثنوي) ونحصل، ثانياً، على حرية أكبر فيما يتعلق بتطبيق عمليات التحليل الأساسية على التوزيعات (مثل الانتقال إلى النهاية والاشتقاق) . في نفس الوقت، فإن فضاء توابع الأساس K لايفتقر كثيراً إلى عناصر؛ فهو يحوي عدداً كافياً من العناصر يجعلنا نتمكن من تمييز التوابع المستمرة عن غيرها. بعبارة أدق لدينا:

ليكن f_1 وَ f_2 تابعين مستمرين (وبالتالي قابلين للمكاملة محلياً) مختلفين على المستقيم العددي. يوجد عندئذ تابع $\varphi \in K$ بحيث:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\varphi(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (8)$$

لرؤية ذلك، نضع $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. إذا كان: $f(x) \not\equiv 0$ فإنه توجد نقطة x_0 بحيث $f(x_0) \neq 0$. ومنه يوجد جوار (α, β) لِـ x_0 لاتتغير فيه إشارة $f(x)$. نعتبر التابع:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\beta - x)(x - \alpha)}} & , \alpha < x < \beta \\ 0 & ; x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

إن هذا التابع منعدم خارج (α, β) وموجب داخل هذا المجال؛ زيادة على ذلك فهو يقبل الاشتقاق نهائياً، ولذا $\varphi \in K$ (تأكد من وجود المشتقات عند $x = \alpha$ وَ $x = \beta$). من جهة أخرى، واضح أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\varphi(x)\,dx \neq 0$$

وهكذا بينا أن K يحوي ما يكفي من العناصر للتمييز بين تابعين مستمرين[1].

6. تعيين توزيع انطلاقاً من معرفة مشتقه. المعادلات التفاضلية في مجموعة التوزيعات.

تعتبر المعادلات التفاضلية من الميادين الرئيسية التي تطبق فيها نظرية التوزيعات. بل إن المسائل المرتبطة بالمعادلات التفاضلية هي التي نشطت تطور هذه النظرية. تنطبق نظرية التوزيعات بوجه خاص على المعادلات ذات المشتقات الجزئية التي لن نتعرض لها هنا. وغم ذلك نتناول بعض

(1) تشمل هذه النتيجة توابع أعم من التوابع المستمرة، لكن توضيح ذلك يتطلب معرفة تكامل لوبيغ (Lebesgue) الذي سنقدمه في الفصل الموالي.

المسائل البسيطة التي لها علاقة بحل المعادلات التفاضلية (العادية) المرتبطة بالتوزيعات. نبدأ بأبسط معادلة تفاضلية:

$$y' = f(x)$$

(حيث $f(x)$ توزيع أو تابع «معتاد»)، أي أن المسألة تتمثل في البحث عن توزيع انطلاقاً من معرفتنا لمشتقه. نعتبر في البداية الحالة $f(x) = 0$.

نظرية 1. إن الحلول الوحيدة (في مجموعة التوزيعات) للمعادلة:

$$y' = 0 \tag{9}$$

هي الثوابت.

البرهان. تعني المعادلة (9) أن:

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0$$

وذلك من أجل كل تابع أساس $\varphi \in K$. نعتبر المجموعة $K^{(1)}$ المؤلفة من توابع K التي تكتب على شكل مشتقات لتوابع من K. من الواضح أن $K^{(1)}$ فضاء جزئي شعاعي من K. نضع: $\varphi_1(x) = -\varphi'(x)$؛ إن التابع φ_1 يرسم $K^{(1)}$ عندما يرسم φ المجموعة K. تعرف المساواة (10) تابعية y على $K^{(1)}$:

نلاحظ الآن أن تابع الأساس φ يكون منتمياً إلى $K^{(1)}$ إذا وفقط إذا كان:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 0 \tag{11}$$

وهذا يعني أن $K^{(1)}$ هو نواة التابعية $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$. لرؤية ذلك نفرض أن: $\varphi(x) = \psi'(x)$، عندئذ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \psi(x) \Big]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{12}$$

بخصوص القضية العكسية، فإن العبارة:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dt \tag{13}$$

تابع يقبل الإشتقاق لا نهائياً. إذا تحقق الشرط (11) فإن $\psi(x)$ يصبح تابعاً حامله محدود. أما مشتقه فهو $\varphi(x)$.

طبقاً لنتائج الفقرة 6، 1§، الفصل 3، نلاحظ أن كل تابع أساس $\varphi \in K$ يكتب على الشكل:

$$\varphi = \varphi_1 + c\,\varphi_0 \qquad (\varphi_1 \in K^{(1)})$$

حيث φ_0 تابع أساس مثبت لا ينتمي إلى $K^{(1)}$ ويحقق الشرط:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1$$

من أجل ذلك، يكفي أن نضع:

$$\begin{cases} c = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx \\ \varphi_1(x) = \varphi(x) - c\,\varphi_0(x) \end{cases}$$

وهكذا إذا أعطينا قيمة التابعية y لتابع الأساس $\varphi_0(x)$، نلاحظ أن هذه التابعية تعرف بطريقة وحيدة على الفضاء K بأكمله. بوضع $(y, \varphi_0) = \alpha$ نحصل على:

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) + c(y, \varphi_0) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\,\varphi(x)\,dx$$

أي أن التوزيع y يساوي الثابت α، وهو المطلوب.

ومنه ينتج أنه إذا تحققت المساواة $f' = g'$ من أجل توزيعين f وَ g فإن $f - g$ يساوي ثابتاً.

نعتبر الآن المعادلة:

$$y' = f(x) \tag{14}$$

حيث $f(x)$ توزيع كيفي.

نظرية 2. من أجل كل $f \in K^*$ ، يوجد حل للمعادلة (14) ينتمي إلى K^* .

من الطبيعي أن نسمي هذا الحل توزيعاً (أو تابعاً) أصلياً للتوزيع f .

البرهان. تعني المعادلة (14) أن :

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = (f, \varphi) \tag{15}$$

وذلك من أجل كل تابع أساسي $\varphi \in K$. تعرف هذه المساواة قيمة التابعية y من أجل كل التوابع $\varphi_1 \in K^{(1)}$:

$$(y, \varphi_1) = (f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\, d\xi)$$

نستخدم الآن التمثيل :

$$\varphi = \varphi_1 + c\,\varphi_0$$

لعناصر K الذي حصلنا عليه أعلاه . بوضع $(y, \varphi_0) = 0$ نعرّف التابعية y على الفضاء K بأكمله :

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) = \left(f\ ,\ -\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\, d\xi\right)$$

نتأكد ، بدون أية صعوبة ، من أن هذه التابعية خطية ومستمرة . وهي تحقق أضافة إلى ذلك المعادلة (14) . لرؤية ذلك نلاحظ أن لدينا :

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)\, d\xi\right) = (f, \varphi)$$

وهذا من أجل كل $\varphi \in K$.

وهكذا من أجل كل توزيع $f(x)$ يوجد حل للمعادلة :

$$y' = f(x)$$

أي أن لكل توزيع توزيعاً أصلياً . من النظرية 1 ، يأتي أن هذا التوزيع الأصلي معرف بالتابع $f(x)$، بطريقة وحيدة بتقدير ثابت جمعي .

تمتد النتائج المحصل عليها فتشمل جمل المعادلات التفاضلية الخطية. نكتفي هنا بتقديم هذه النتائج بدون برهان.

نعتبر جملة متجانسة مؤلفة من n معادلة تفاضلية خطية ذات n توزيعاً مجهولاً:

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_k \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{16}$$

حيث a_{ik} توابع قابلة للإشتقاق لانهائياً. تقبل مثل هذه الجملة كمية من الحلول «التقليدية» (أي حلول نعبر عنها بواسطة توابع «معتادة»، قابلة للإشتقاق لانهائياً). يمكن أن نثبت بأن الجملة (16) لاتقبل حلولاً أخرى في مجموعة التوزيعات.

في حالة جملة غير متجانسة من الشكل:

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k + f_i \tag{17}$$

حيث f_i توزيعات وَ a_{ik} توابع معتادة قابلة للإشتقاق لانهائياً، يوجد في مجموعة التوزيعات حل معرف بتقدير حل كيفي للجملة المتجانسة (16).

إذا كانت في الجملة (17) a_{ik} وكذا f_i توابع «معتادة» فإن كل الحلول لهذه الجملة الموجودة في K^* توابع معتادة.

7. بعض التعميمات.

اعتبرنا فيما سبق توزيعات «لمتغير حقيقي واحد» أي توزيعات على المستقيم العددي. يمكن أن ننطلق من نفس الأفكار وندخل توزيعات على مجموعة محدودة، مثلاً على قطعة مستقيمة أو دائرة، كما يمكن إدخال توزيعات متعددة المتغيرات والتوزيعات ذات متغير عقدي، الخ.

نلاحظ بهذا الخصوص أن حتى التوزيعات على المستقيم العددي، نفسها، يمكن تعريفها بطرق أخرى تختلف عن الطريقة المقدمة سابقاً. لنعتبر بعض أنماط التوزيعات المشار اليها آنفاً، باختصار:

أ) التوزيعات المتعددة المتغيرات. نعتبر في الفضاء ذي n بعداً: $\mathbf{R}^n$ المجموعة K^n المؤلفة من التوابع $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ التي تقبل مشتقات جزئية من كل الرتب بالنسبة لكل المتغيرات وبحيث يكون كل واحد من هذه المشتقات منعدما خارج متوازي وجوه:

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., n$$

تؤلف المجموعة K^n فضاء شعاعياً (باعتبار عمليتي الجمع والضرب المعتادتين) نستطيع أن ندخل عليه مفهوم التقارب بالطريقة التالية: $\varphi_k \to \varphi$ إذا وجد متوازي وجوه: $a_i \leq x_i \leq b_i$ ، $i = 1, 2, ..., n$ تنعدم خارجه التوابع φ_k ، ويتحقق داخله التقارب المنتظم:

$$\frac{\partial^r \varphi_k}{\partial_{x_1^{\alpha_1}} \dots \partial_{x_n^{\alpha_n}}} \to \frac{\partial^r \varphi}{\partial_{x_1^{\alpha_1}} \dots \partial_{x_n^{\alpha_n}}} \; , \; \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r\right)$$

من أجل كل جملة أعداد صحيحة غير سالبة $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

نسمي توزيعاً لِـ n متغيراً كل تابعية خطية ومستمرة على K^n . إن كل تابع «معتاد» ذي n متغيراً $f(x)$ قابل للمكاملة في كل ساحة محدودة من $\mathbf{R}^n$ هو، في نفس الوقت، توزيع. أما قيم التابعية الموافقة له فهي معطاة بالدستور:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad (x = (x_1, ..., x_n), dx = dx_1 \dots dx_n)$$

نلاحظ من جهة أخرى، كما هو الحال بالنسبة لِـ $n = 1$ ، أن تابعين مستمرين مختلفين يعرفان تابعيتين مختلفتين (أي أنهما يشكلان توزيعين مختلفين) .

كما أن مفاهيم الانتقال إلى النهاية والمشتق الخ تُعرَّف بالنسبة للتوزيعات ذات n متغيراً بنفس الطرق المتبعة في حالة متغير واحد. وهكذا نعرّف مثلاً المشتقات الجزئية لتوزيع بالدستور:

$$\left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial_{x_1^{\alpha_1}} \dots \partial_{x_n^{\alpha_n}}}, \varphi(x)\right) = (-1)^r \left(f(x), \frac{\partial^r \varphi(x)}{\partial_{x_1^{\alpha_1}} \dots \partial_{x_n^{\alpha_n}}}\right)$$

ومنه يتضح أن كل توزيع ذي n متغيراً يقبل مشتقات جزئية من كل رتبة.

ب) التوزيعات العقدية. نأخذ الآن التوابع ذات الحوامل المحدودة والقابلة للإشتقاق لانهائياً على المستقيم العددي والتي تأخذ قيمها في حقل الأعداد العقدية، نأخذها كتوابع الأساس. تسمى التابعيات الخطية على الفضاء $\tilde{K}$ لهذه التوابع التوزيعات العقدية. نذكر أنه توجد في فضاء شعاعي عقدي تابعيات خطية وتابعيات خطية مرافقة. أما النوع الأول منها فيحقق الشرط:

$$(f, \alpha\,\varphi) = \alpha(f, \varphi)$$

(حيث α عدد)، وأما النوع الثاني فيحقق الشرط:

$$(f, \alpha\,\varphi) = \overline{\alpha}\,(f, \varphi)$$

إذا كان f تابعاً معتاداً قيمه عقدية على المستقيم العددي، نستطيع أن نلحق به تابعية خطية على $\tilde{K}$ بطريقتين مختلفتين:

$$(f, \varphi)_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad (18_1)$$

وَ:

$$(f, \varphi)_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}\,(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad (18_2)$$

ثم يمكن أن نلحق بنفس التابع $f(x)$ تابعيتين خطيتين مرافقتين، وهما:

$$_1(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (18_3)$$

$$_2(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}\,(x)\,\overline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (18_4)$$

يعتبر كل اختيار من بين الاحتمالات الأربعة السابقة طريقة معينة «لدكّ» (أو «غمس») فضاء التوابع «المعتادة» في فضاء التوزيعات. يمكن أن نعرّف على التوزيعات العقدية عمليتي الجمع والضرب في عدد بطرق مماثلة لتلك التي استخدمناها أعلاه فيما يخص التوزيعات العددية.

ﺟ) التوزيعات على الدائرة. من المفيد أحيانا أن نتناول توزيعات معرفة على مجموعة محدودة. وأبسط مثال لذلك نحصل عليه باعتبار التوزيعات على دائرة. نأخذ مجموعة التوابع القابلة للإشتقاق على دائرة مع عمليتي الجمع والضرب (في عدد) المعتادتين كفضاء الأساس. نقول عن متتالية $\{\varphi_n(x)\}$ مؤلفة من توابع هذا الفضاء انها متقاربة إذا كانت متتالية المشتقات $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ متقاربة بانتظام على كل الدائرة، وذلك من أجل $k = 0, 1, 2, \ldots$. بما أن مجموعة قيم المتغير (على الدائرة) محدودة فلسنا في حاجة إلى افتراض أن التوابع ذات حوامل محدودة. تسمى التابعيات الخطية على هذا الفضاء التوزيعات على الدائرة.

يمكن اعتبار كل تابع معتاد على الدائرة كتابع دوري معرف على المستقيم العددي. ويسمح نفس الاعتبار، إذا ما طبق على التوزيعات، بربط التوزيعات على الدائرة بالتوزيعات الدورية. نسمي توزيعاً دورياً (دورته a) كل تابعية f تحقق الشرط:

$$\big(f(x), \varphi(x-a)\big) = \big(f(x), \varphi(x)\big)$$

وهذا من أجل كل تابع أساس φ. كمثال لتوزيع دوري هناك التابع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi . \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$$

الذي أشرنا إليه أعلاه.

د) فضاءات أساس أخرى. كنا أطلقنا أسم توزيعات، في المستقيم العددي، على التابعيات الخطية على الفضاء K المؤلف من التوابع القابلة للاشتقاق لانهائياً ذات الحوامل المحدودة. لكن هذا الاختيار لا يمثل الاختيار الممكن الوحيد. فبدل فضاء التوابع ذات الحوامل المحدودة K يمكن اعتبار، مثلاً، فضاء أوسع وهو المؤلف من التوابع القابلة للاشتقاق لانهائياً $\varphi(x)$ على المستقيم العددي والمتناقصة، هي ومشتقاتها، بسرعة تفوق سرعة تناقص أية قوة لـ $\frac{1}{|x|}$. بعبارة أوضح يكون تابع $\varphi(x)$ منتمياً إلى فضاء الأساس،

الذي نرمز له بـ S_∞، إذا تمكنا، من أجل كل عددين p وَ q $(p, q = 0, 1, 2, ...)$، من إيجاد ثابت $C_{p,q}$ (يتعلق بـ p, q, φ) يحقق:

$$|x^p \varphi^{(q)}(x)| < C_{p,q} \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{19}$$

نعرّف التقارب في S_∞ كما يلي: نقول عن متتالية $\{\varphi_n(x)\}$ انها متقاربة نحو $\varphi(x)$ إذا كانت المتتالية $\{\varphi_n^{(q)}(x)\}$ متقاربة بانتظام على كل مجال منته من أجل كل $q = 0, 1, ...$، وكانت الثوابت $C_{p,q}$ في المتراجحات:

$$|x^p \varphi_n^{(q)}(x)| < C_{p,q}$$

مستقلة عن n.

نلاحظ في هذه الحالة أن مجموعة التوزيعات أقل غنى من حالة الفضاء K. نجد مثلاً أن التابع:

$$f(x) = x^2$$

يمثل تابعية خطية ومستمرة على K ولايمثل ذلك على S_∞.

إن اختيار S_∞ كفضاء أساس مفيد، مثلاً، في دراسة تحويلات فوريي للتوزيعات.

يثبت تطور نظرية التوزيعات أنه من غير الضروري، عموماً، أن نختار فضاء الأساس اختياراً نهائياً، بل بالعكس، من المستحسن أن نترك هذا الفضاء يتغير حسب مجموعة المسائل المطروحة. إلاّ أنه من المهم توفر الشرط التالي: من جهة، ينبغي أن تكون هناك كمية «كافية» من توابع الأساس (بحيث نتمكن من التمييز بين التوابع «المعتادة» أو على وجه التحديد، تمييز التوزيعات النظامية)، ومن جهة أخرى يجب أن تكون لهذه التوابع مشتقات من رتب كبيرة بكفاية.

تمرين. أثبت أنه بالإمكان تزويد الفضاء S_∞ ببنية فضاء نظيمي عدودياً وذلك بوضع مثلاً:

$$\|\varphi\|_n = \sum_{p+q=n} \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\leq i\leq p \\ 0\leq j\leq q}} |(1+|x|^i)\,\varphi^{(j)}(x)|$$

وأثبت أن كل متتالية متقاربة في S_∞ بمفهوم التعريف المعطى أعلاه متقاربة أيضاً بمفهوم الطوبولوجيا المعرفة بهذه النظيات.

5 § المؤثرات الخطية

1. تعريف وأمثلة لمؤثرات خطية.

ليكن E وَ E_1 فضاءين شعاعيين طوبولوجيين. نقول عن تطبيق من E في E_1:

$$y = Ax \qquad (x \in E\,, y \in E_1)$$

إنه مؤثر خطي من E في E_1 إذا تحقق الشرط:

$$A(\alpha\, x_1 + \beta x_2) = \alpha\, Ax_1 + \beta\, Ax_2$$

تسمى المجموعة D_A لكل العناصر $x \in E$ المعرف عندها التطبيق A ساحة تعريف المؤثر A؛ لانفرض، عموماً، بأن $D_A = E$، لكننا سنفرض دوماً بأن D_A منوعة خطية، أي إذا كان x وَ y في D_A فإن: $\alpha\, x + \beta y \in D_A$ وذلك مهما كان α وَ β.

نقول عن المؤثر A إنه مستمر عند النقطة $x_0 \in D_A$ إذا استطعنا من أجل كل جوار V للنقطة $y_0 = A x_0$، إيجاد جوار U للنقطة x_0 بحيث $Ax \in V$ من أجل كل $x \in U \cap D_A$. ونقول عن المؤثر A أنه مستمر إذا كان مستمراً عند كل نقطة $x \in D_A$.

إذا كان E وَ E_1 فضاءين نظيميين فإن هذا التعريف يكافىء القول بأن A يكون مستمراً إذا تمكنا، من أجل كل $\varepsilon > 0$، من إيجاد $\delta > 0$ بحيث:

$$\|Ax' - Ax''\| < \varepsilon$$

بمجرد قيام المتراجحة $\|x' - x''\| < \delta$ (حيث x' وَ x'' في D_A) .

إن مفهوم التابعية الخطية، الذي أدخلناه في بداية هذا الفصل، حالة خاصة من حالة المؤثر الخطي. بعبارة أوضح، فإن كل تابعية خطية مؤثر خطي ساحة تعريفه الفضاء المعطى E وفضاء وصوله $\mathbf{R}^1$. بوضع $E_1 = \mathbf{R}^1$ في تعريفي الخطية والإستمرار لمؤثر، نجد ثانية التعريفين الموافقين لتابعية.

نشير من جهة أخرى إلى أن العديد من المفاهيم والنتائج التي سنعرضعها هنا والخاصة بالمؤثرات الخطية تشكل في الواقع تعميات شبه آلية للنتائج التي سبق أن قدمناها في 1§ من هذا الفصل والمتعلقة بالتابعيات الخطية.

أمثلة لمؤثرات خطية.

1. ليكن E فضاء شعاعياً طوبولوجيا. نضع:

$$Ax = x \quad , \quad \forall\, x \in E$$

يسمى هذا المؤثر الذي يحول كل نقطة من الفضاء E إلى النقطة نفسها مؤثراً مطابقاً.

2. ليكن E وَ E_1 فضاءين شعاعيين طوبولوجيين كيفيين، وليكن:

$$0x = 0 \quad , \quad \forall\, x \in E$$

(يرمز 0 للعنصر المنعدم في الفضاء E_1). يسمى المؤثر 0 المؤثر المنعدم.

3. الشكل العام لمؤثر خطي من فضاء بعده منته في فضاء بعده منته. ليكن A مؤثراً خطياً من $\mathbf{R}^n$ (ذي الأساس $e_1, e_2, \ldots, e_n$) في الفضاء $\mathbf{R}^m$ (ذي الأساس $f_1, \ldots, f_m$). إذا كان x شعاعاً كيفياً من $\mathbf{R}^n$، فإن:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$

ومنه ينتج، بفضل خطية المؤثر A، أن:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i\ Ae_i$$

وهكذا نرى أن المؤثر A يكون معرّفاً إذا ما عرفنا الصور بواسطة A لأشعة الأساس $e_1 ..., e_n$. نعتبر تحاليل الأشعة Ae_i وفق الأساس: $f_1, f_2, ..., f_m$.
نجد عندئذ:

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\ f_k$$

يبيّن ذلك أن المؤثر A معرف بالمصفوفة ذات المعاملات $\|a_{ki}\|$. أما صورة الفضاء $\mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^m$ فهي فضاء جزئي شعاعي بعده يساوي مرتبة المصفوفة $\|a_{ki}\|$، وبالتالي فهي أصغر من n أو تساويها. نلاحظ أن كل مؤثر خطي، معطى على فضاء بعده منته، مستمر حتماً.

4. نعتبر فضاء هيلبرتيا H وفضاء جزئياً كيفياً H_1 من H. نحلل H إلى مجموع مباشر للفضاء الجزئي H_1 ومكمله المتعامد، أي اننا نكتب كل عنصر $h \in H$ على الشكل:

$$h = h_1 + h_2 \quad (h_1 \in H_1, h_2 \perp H_1)$$

ونضع:

$$Ph = h_1$$

من الطبيعي أن نسمي المؤثر P المسقط المتعامد من H على H_1. نتأكد بسهولة أن P خطي ومستمر.

5. نعتبر في فضاء التوابع المستمرة على القطعة $[a, b]$ المؤثر المعرف بالدستور:

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

حيث $K(s, t)$ تابع مستمر لمتغيرين، معين. إن التابع $\psi(t)$ مستمر مهما

كان التابع المستمر $\varphi(s)$، وهو الأمر الذي يجعل المؤثر (1) معرفاً من فضاء التوابع المستمر في نفس الفضاء. نلاحظ أن خطية هذا المؤثر بديهية. حتى نستطيع الحديث عن استمراره يجب أن نعين أولاً الطوبولوجيا المعتبرة على فضاء التوابع المستمرة. نقترح على القارئ أن يثبت استمرار هذا المؤثر في الحالتين التاليتين: أ) عند اعتبار الفضاء $C[a, b]$ أي فضاء التوابع المستمرة مع النظيم $\|\varphi\| = \max|\varphi(t)|$؛ ب) عند اعتبار الفضاء $C^2[a, b]$، أي فضاء التوابع المستمرة مع النظيم $\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

6. نعتبر في فضاء التوابع المستمرة المؤثر:

$$\psi(t) = \varphi_0(t)\varphi(t)$$

حيث $\varphi_0(t)$ تابع مستمر معطى. من الواضح أن هذا المؤثر خطي. (أثبت استمراره باعتبار النظيمين المشار إليهما في المثال السابق.)

7. من أهم المؤثرات في التحليل هو مؤثر الاشتقاق. يمكن أن نعتبره في فضاءات مختلفة:

أ) نعتبر فضاء التوابع المستمرة $C[a, b]$ والمؤثر:

$$Df(t) = f'(t)$$

في هذا الفضاء. من الواضح أن هذا المؤثر (المعتبر كمؤثر من $C[a, b]$ في $C[a\ b]$) ليس معرفاً على فضاء التوابع المستمرة، فهو معرف فقط على المنوعة الخطية المؤلفة من التوابع القابلة لمشتق مستمر. إن المؤثر D خطي، لكنه غير مستمر. وهذا ينتج، مثلاً، من كون المتتالية:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

متقاربة نحو 0 (من أجل مسافة $C[a, b]$) في حين أن المتتالية:

$$D\varphi_n(t) = \cos nt$$

متباعدة.

ب) يمكن اعتبار مؤثر الاشتقاق من الفضـاء D_1 المؤلف من التوابع القابلة للإشتقاق باستمرار على $[a, b]$ مع النظيم :

$$\|\varphi\|_1 = \max|\varphi(t)| + \max|\varphi'(t)|$$

في الفضـاء $C[a, b]$. نرى في هذه الحالة أن المؤثر D خطي ومستمر ؛ وهو يطبق الفضـاء D_1 بأكمله على الفضـاء $C[a, b]$ بأكمله .

جـ) ليس من المستحسن أن نعتبر مؤثر الإشتقاق كمؤثر من D_1 في $C[a, b]$ إذ أنه رغم استمرار D وتعريفه على الفضـاء D_1 بأكمله ، الّا أننا لا نستطيع أن نطبق D مرتين على نفس التابع من D_1 . فمن اللائق إذن اعتبار مؤثر الاشتقاق على فضـاء أضيق من D_1 ، بعبارة أوضح ، يليق أن نعتبره على الفضـاء D_∞ المؤلف من التوابع القابلة للاشتقاق لانهائياً على القطعة $[a, b]$ ، والمزود بالطوبولوجيا المعطاة بواسطة الجماعة القابلة للعد من النظيمات :

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0\le k\le n\\ a\le t\le b}} |\varphi^k(t)|$$

يحول مؤثر الإشتقاق هذا الفضـاء إلى الفضـاء ذاته ، وهو ، كما نتأكد من ذلك بسهولة ، مؤثر مستمر على D_∞ .

د) تشكل التوابع القابلة للاشتقاق لانهائياً مجموعة جد ضيقة . بوسعنا اعتبار مؤثر الاشتقاق على فضـاء أوسع مع الإحتفاظ باستمرار هذا المؤثر ، وهذا الفضـاء هو فضـاء التوزيعات . من الواضح حسب ماورد سلفاً ، أن الإشتقاق مؤثر خطي على فضـاء التوزيعات ، ومستمر (أي أنه إذا كانت متتالية توزيعات $\{f_n(t)\}$ متقاربة نحو $f(t)$ فإن المتتالية المؤلفة من مشتقات عناصر $\{f_n(t)\}$ متقاربة نحو مشتق التوزيع $f(t)$) .

2. المؤثرات الخطية المحدودة والاستمرار .

نقول عن مؤثر خطي من E في E_1 إنه محدود إذا كان معرفاً على E

بأكمله ويحول كل مجموعة محدودة إلى مجموعة محدودة. توجد علاقة قوية بين مفهوم المؤثر المحدود الخطي ومفهوم الإستمرار، توضح القضيتان التاليتان هذه العلاقة:

I. إن كل مؤثر خطي مستمر مؤثر محدود.

لرؤية ذلك نعتبر $E \supset M$ مجموعة محدودة. نفرض أن المجموعة AM المحتواة في E_1 غير محدودة. يوجد عندئذ في E_1 جوار لـ0: V بحيث تكون كل المجموعات: $\frac{1}{n}AM$ خارج V. حينئذ توجد متتالية عناصر $M \ni x_n$ بحيث تكون العناصر $\frac{1}{n}Ax_n$ غير منتمية إلى V. وبالتالي، لدينا[1]، من جهة: $0 \to \frac{1}{n}x_n$ في E، ومن جهة أخرى فإن المتتالية $\left\{\frac{1}{n}Ax_n\right\}$ لاتؤول إلى الصفر في E_1؛ وهذا يناقض فرض استمرار المؤثر A.

II. إذا كان A مؤثراً خطياً ومحدوداً من E في E_1، وحقق الفضاء E مسلمة قابلية العد الأولى، فإن المؤثر مستمر.

ذلك أنه إذا لم يكن A مستمراً فإنه يوجد جوار للصفر V في E_1 وجملة أساسية من جوارات الصفر $\{U_n\}$ في E بحيث، من أجل كل n، يمكن إيجاد عنصر $\frac{1}{n}U_n \ni x_n$ بحيث $Ax_n \notin nV$. إن المتتالية $\{x_n\}$ محدودة في E (وهي متقاربة نحو 0) أما المتتالية $\{Ax_n\}$ فهي غير محدودة في E_1 (لأنها غير محتواة في مجموعة من المجموعات nV). إذن إذا لم يكن المؤثر A غير مستمر والفضاء E يحقق مسلمة قابلية العد الأولى فإن A غير محدود. بذلك يتم برهان القضية II.

وهكذا، إذا تعلق الأمر بمؤثر معطى على فضاء يتمتع بمسلمة قابلية العد الأولى (تلك هي حالة الفضاءات النظيمية أو النظيمية عدودياً، مثلاً) فإن هذا المؤثر يكون محدوداً إذا وفقط إذا كان مستمراً.

إن كل المؤثرات المعتبرة في الأمثلة من 1 إلى 6 الواردة في الفقرة السابقة

(1) راجع التمرين 1، الفقرة 1، §5، الفصل 3.

مؤثرات مستمرة. بما أن كل الفضاءات المعتبرة في هذه الأمثلة تحقق مسلمة قابلية العد الأولى فإن كل تلك المؤثرات محدودة.

إذا كان E وَ E_1 فضاءين نظيميين فإن الشرط الذي يجعل مؤثراً A من E في E_1 محدوداً، نستطيع صياغته كالتالي: نقول عن A إنه محدود إذا حوّل كل كرة إلى مجموعة محدودة. وبفضل خطية المؤثر A يمكن أيضاً صياغة هذا الشرط كالتالي: يكون المؤثر A محدوداً إذا وجد ثابت C بحيث:

$$\|Af\| \leq C\|f\|$$

من أجل كل $f \in E$ يسمى أصغر ثابت C يحقق المتراجحة السابقة نظيم المؤثر A ونرمز له بِـ$\|A\|$.

نظرية 1. من أجل كل مؤثر (خطي) محدود A من فضاء نظيمي في فضاء نظيمي، لدينا:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{2}$$

البرهان. نضع:

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

من خطية A نستنتج المساواة:

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

وبالتالي، لدينا:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha$$

من أجل كل عنصر x.

أو :

$$\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$$

ومنه يأتي :

$$\|A\| = \text{Inf } C \leq \alpha$$

من جهة أخرى، من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $x_\varepsilon \neq 0$ بحيث :

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|}$$

أو :

$$(\alpha - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| \leq \|Ax_\varepsilon\| \leq C\|x_\varepsilon\|$$

وبالتالي :

$$\alpha - \varepsilon \leq \text{Inf } C = \|A\|$$

ولما كان ε كيفياً فإن :

$$\alpha \leq \|A\|$$

إذن :

$$\|A\| = \alpha \text{ .}$$

3. مجموع وجداء المؤثرات.

تعريف 1. ليكن A وَ B مؤثرين خطيين من الفضاء الشعاعي E في الفضاء E_1 . المجموع $A + B$ لهذين المؤثرين هو تعريفاً المؤثر C الذي يلحق بعنصر $x \in E$ العنصر :

$$y = Ax + Bx \in E_1$$

وهو معرّف من أجل كل العناصر المنتمية إلى التقاطع $D_A \cap D_B$ لساحتي تعريف المؤثرين A وَ B .

من السهل التأكد من أن $C = A + B$ مؤثر خطي ومستمر إذا كان A وَ B كذلك.

إذا كان E وَ E_1 فضاءين نظيميين وكان A وَ B محدودين فإن المؤثر $A + B$ محدود أيضا، ولدينا:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \tag{3}$$

من أجل كل x، لدينا بالفعل:

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

ومنه نحصل على (3).

تعريف 2. ليكن A وَ B مؤثرين خطيين: A من E في E_1 وَ B من E_1 في E_2. الجداء BA لهذين المؤثرين هو تعريفاً المؤثر C الذي يلحق بكل عنصر $x \in E$ العنصر:

$$z = B(Ax) \in E_2$$

إن ساحة التعريف D_C للمؤثر C مؤلفة من العناصر $x \in D_A$ بحيث $Ax \in D_B$. من الواضح أن المؤثر BA خطي. وهو مستمر إذا كان A وَ B مستمرين.

تمرين. أثبت أن D_C منوعة خطية في حالة ما إذا كانت D_A وَ D_B منوعتين خطيتين.

إذا كان A وَ B مؤثرين محدودين في فضاءات نظيمية فإن المؤثر BA محدود أيضاً و:

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \tag{4}$$

ذلك أن:

$$\|B(Ax)\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \tag{5}$$

ومنه نحصل على (4).

نستطيع تعريف مجموع وجداء ثلاثة مؤثرات أو أكثر تكرارياً. إن هاتين العمليتين تجميعيتان.

الجداء kA لمؤثر A في عدد k هو مؤثر يلحق بكل عنصر x العنصر kAx.

تؤلف المجموعة $\mathscr{L}(E, E_1)$ التي تضم كل المؤثرات الخطية المستمرة المعرفة على الفضاء E بأكمله، والتي تطبق E في E_1 (حيث E وَ E_1 فضاءان شعاعيان طوبولوجيان معطيان)، تؤلف فضاء شعاعياً بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب (في عدد) المعرّفتين أعلاه. إذا كان E وَ E_1 فضاءين نظيميين فإن $\mathscr{L}(E, E_1)$ فضاء نظيمي (تعريف نظيم مؤثر هو التعريف الوارد أعلاه).

تمرين. ليكن E فضاء نظيمياً وَ E_1 فضاء نظيمياً تاماً. عندئذ:

أ) يكون الفضاء النظيمي $\mathscr{L}(E, E_1)$ تاماً؛

ب) إذا كان $A_k \in \mathscr{L}(E, E_1)$ وَ $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| < \infty$ فإن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ متقاربة نحو مؤثر $A \in \mathscr{L}(E, E_1)$ وَ:

$$\|A\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} A_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| \tag{6}$$

4. المؤثر المقلوب، قابلية القلب

ليكن A مؤثراً من E في E_1 وَ D_A ساحة تعريفه وَ R_A ساحة قيمه.

تعريف 3. نقول عن A إنه يقبل القلب إذا كانت المعادلة:

$$Ax = y$$

تقبل حلاً وحيداً x من أجل كل $y \ni R_A$.

إذا كان A يقبل القلب فمن أجل كل $y \ni R_A$ ، يوجد عنصر وحيد $x \ni D_A$ ، وهو حل المعادلة $Ax = y$. يسمى المؤثر من R_A في D_A الذي يلحق بِـ y العنصر x ، مقلوب A ونرمز له بِـ A^{-1} .

نظرية 2. إن المؤثر A^{-1} ، المقلوب لمؤثر خطي A ، هو أيضاً خطي.

البرهان. نلاحظ أولاً أن ساحة القيم R_A للمؤثر A ، أي الساحة $D_{A^{-1}}$ منوعة خطية. ليكن y_1 وَ y_2 في R_A . يكفي أن نتأكد من المساواة:

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 \tag{7}$$

ليكن: $Ax_1 = y_1$ وَ $Ax_2 = y_2$. بفضل خطية A ، نجد:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \tag{8}$$

من تعريف المؤثر المقلوب، يمكن أن نكتب:

$$A^{-1}y_1 = x_1$$

$$A^{-1}y_2 = x_2$$

نضرب العلاقتين السابقتين على التوالي في α_1 وَ α_2 ، ثم نجمعهما طرفاً طرفاً فنحصل على:

$$\alpha A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

من جهة أخرى، من المساواة (8) ومن تعريف المؤثر المقلوب يأتي:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

نقارن هذه المساواة بالمساواة السابقة فنجد:

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2$$

نظرية 3. (نظرية باناخ المتعلقة بمقلوب مؤثر) . ليكن A مؤثراً خطياً محدوداً وتقابلياً من فضاء باناخي E على فضاء باناخي E_1 . عندئذ يكون المؤثر المقلوب A^{-1} محدوداً أيضاً :

للبرهان على هذه النظرية نحتاج إلى التوطئة التالية :

توطئة . ليكن E فضاء لباناخ وَ M مجموعة كثيفة أينما كان في E . عندئذ يقبل كل عنصر غير منعدم y من E نشراً وفق السلسلة :

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots$$

حيث $y_k \in M$ وَ $\|y_k\| \leq \frac{3\|y\|}{2^k}$.

البرهان . سوف ننشىء العناصر y_k خطوة خطوة. نختار y_1 بحيث يكون :

$$\|y - y_1\| \leq \frac{\|y\|}{2} \qquad (9)$$

وهذا ممكن لأن المتراجحة (9) تعرف كرة مركزها y ونصف قطرها $\frac{\|y\|}{2}$، يوجد داخلها، بالضرورة، عنصر من M (لأن M كثيف أينما كان في E) . نختار بعد ذلك $y_2 \in M$ بحيث يكون :

$$\|y - y_1 - y_2\| \leq \frac{\|y\|}{4}$$

ثم نختار y_3 بحيث يكون :

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3\| \leq \frac{\|y\|}{8}$$

وبصورة عامة نختار y_n بحيث يكون :

$$\|y - y_1 - y_2 - \dots - y_n\| \leq \frac{\|y\|}{2^n}$$

نلاحظ أن هذه الاختيارات ممكنة لأن M كثيف أينما كان في E . يتبين من اختيار العناصر y_k أن لدينا :

$$\|y - \sum_{k=1}^{n} y_k\| \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

أي أن السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ متقاربة نحو y . لنقيّم نظيمات العناصر y_k :

$$\|y_1\| = \|y_1 - y + y\| \leq \|y_1 - y\| + \|y\| \leq \frac{3\|y\|}{2}$$

$$\|y_2\| = \|y_2 + y_1 - y + y - y_1\| \leq \|y - y_1 - y_2\| + \|y - y_1\| \leq \frac{3\|y\|}{4}$$

أخيراً :

$$\|y_n\| = \|y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1 - y + y - y_1 - \ldots - y_{n-1}\| \leq$$

$$\leq \|y - y_1 - \ldots - y_n\| + \|y - y_1 - \ldots - y_{n-1}\| \leq \frac{3\|y\|}{2^n}$$

وبذلك ينتهي برهان التوطئة .

برهان النظرية 3. نعتبر في الفضـاء E المجموعة M_k المؤلفة من العناصر y المحققة للمتراجحة $\|A^{-1}y\| \leq k\|y\|$. إن كل عنصر من الفضـاء E_1 ينتمي إلى مجموعة من المجموعات M_k ، وبالتالي : $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. من نظرية بير (الفقرة 3 ، 3 § ، الفصل 2) يأتي أن هناك على الأقل مجموعة M_k ، مثلاً M_n ، كثيفة في كرة B . نختار داخل الـكرة B طبقة كروية P مركزها في نقطة من M_n ؛ نعني بالطبقة P هنا مجموعة النقاط z التي تحقق المتراجحة : $\beta < \|z - y_0\| < \alpha$ حيث $0 < \beta < a$ ، $M_n \ni y_0$.

بإزاحة الطبقة P بحيث يكون مركزها في نقطة 0 ، نحصل على الطبقة الـكروية : $P_0 = \{z : 0 < \beta < \|z\| < \alpha\}$.

لنثبت وجود مجموعة M_N كثيفة في P_0 . ليكن $P \cap M_n \ni z$ ؛ عندئذ $z - y_0 \in P_0$ وَ :

$$\|A^{-1}(z - y_0)\| \leq \|A^{-1}z\| + \|A^{-1}y_0\| \leq n(\|z\| + \|y_0\|) \tag{10}$$

$$\leq n(\|z - y_0\| + 2\|y_0\|) = n\|z - y_0\| \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|z - y_0\|}\right)$$

$$\leq n\|z - z_0\| \left[\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)\right]$$

إن العبارة $n\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)$ لاتتعلق بِـ z . نضع[1] :

$$N = 1 + \left[n\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)\right]$$

ومنه يأتي ، حسب (10) ، أن $z - y_0$ ينتمي إلى M_N ؛ ومن كوْن M_n كثيفة في P يأتي أن M_N كثيفة في P_0 .

نعتبر عنصراً غير منعدم كيفي $y \in E_1$. يمكن دوماً إيجاد عدد λ بحيث : $\alpha < \|\lambda y\| < \beta$ ، أي $\lambda y \in P_0$. لما كان M_N كثيفاً في P_0 ، يمكننا إنشاء متتالية عناصر $y_k \in M_N$ متقاربة نحو λy . ومن ثم تتقارب $\frac{1}{\lambda} y_k$ نحو y . من البديهي أنه إذا كان $y_k \in M_N$ فإن $\frac{1}{\lambda} y_k \in M_N$ ، مهما كان العدد الحقيقي $\lambda \neq 0$ ؛ وعليه نستنتج أن M_N كثيف في $E_1/\{0\}$ ، وبالتالي ، في E_1 .

نعتبر عنصراً غير منعدم $y \in E_1$ ؛ من التوطئة المثبتة يأتي أن y يقبل نشراً وفق السلسلة :

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots$$

حيث $y_k \in M_N$ وَ :

$$\|y_k\| < \frac{3\|y\|}{2^k} .$$

نعتبر في الفضاء E السلسلة المؤلفة من الصور العكسية للعناصر y_k ، أي من العناصر $x_k = A^{-1}y_k$.

إن هذه السلسلة متقاربة نحو عنصر x ، لأن لدينا المتراجحة :

$$\|x_k\| = \|A^{-1}y_k\| \leq N\|y_k\| < N\frac{3\|y\|}{2^k}$$

(1) المقصود من القوسين الكبيرين [] هنا هو الجزء الصحيح للعدد الموجود داخلهما .

بالإضافة إلى ذلك :

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq 3N\|y\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3N\|y\|$$

بفضل تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ واستمرار المؤثر A ، يمكن أن نطبق المؤثر A على هذه السلسلة ، حداً حداً. نحصل على :

$$Ax = Ax_1 + Ax_2 + \ldots = y_1 + y_2 + \ldots = y$$

ومنه : $x = A^{-1}y$. زيادة على ذلك :

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \leq 3N\|y\|$$

ولما كانت هذه المتراجحة محققة من أجل كل $y \neq 0$ ، فإن المؤثر A^{-1} محدود . انتهى برهان النظرية .

تمارين . 1. ليكن E وَ E_1 فضاءين نظيميين ؛ نقول عن مؤثر خطي A من E في E_1 ، ساحة تعريفه منوعة خطية $D_A \subset E$ ، إنه مغلق إذا كان

$$\begin{cases} x_n \in D_A \\ x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D_A \\ \\ Ax = y \end{cases}$$

أثبت أن كل مؤثر محدود مؤثر مغلق .

2. نعتبر الجداء المباشر $E \times E_1$ للفضاءين E وَ E_1 ، أي الفضاء الشعاعي النظيمي المؤلف من كل الثنائيات $[x, y]$ بحيث $x \in E$ ، $y \in E_1$ مع النظيم : $\|[x, y]\| = \|x\| + \|y\|_1$ ($\|\cdot\|$ وَ $\|\cdot\|_1$ نظيمان على E وَ E_1 على التوالي) . يمكن أن نلحق بالمؤثر A المجموعة $G_A = \{[x, y]; x \in D_A, y = Ax\}$ ($E \times E_1 \supset G_A$) التي تسمى بيان A . أثبت أن G_A منوعة خطية في $E \times E_1$ ، وأنها تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان المؤثر A مغلقاً . أثبت أنه إذا كان E وَ E_1 فضاءين لباناخ وكان المؤثر A المعرف على الفضاء E بأكمله مغلقاً فإن A محدود (تلك هي نظرية باناخ المتعلقة بالبيان المغلق) .

إشـارة إلى الحل. طبق النظرية 3 على المؤثر: $P:[x, Ax] \to x$ من G_A في E.

3. ليكن E وَ E_1 فضـاءين نظيميين عدودياً وتامين. نفرض أن A مؤثر خطي مستمر تقابلي من E على E_1؛ أثبت أن المقلوب A^{-1} لِـ A مستمر أيضـاً. صغ نظرية البيان المغلق في الفضـاءات النظيمية عدودياً. وبرهن عليها.

نعتبر المجموعة $\mathcal{L}(E, E_1)$ المؤلفة من المؤثرات الخطية المحدودة A التي تطبق فضـاء باناخي E في فضـاء باناخي E_1. إن $\mathcal{L}(E, E_1)$ فضـاء باناخي.

لتكن $\mathcal{G}\mathcal{L}(E, E_1)$ مجموعة مؤثرات هذا الفضـاء، التي تطبق E على E_1 بأكمله، والتي تقبل مقلوباً محدوداً. إن هذه المجموعة مفتوحة في $\mathcal{L}(E, E_1)$. بعبارة أوضح، لدينا النظرية التالية:

نظرية 4. ليكن A_0 عنصراً من $\mathcal{G}\mathcal{L}(E, E_1)$، وَ ΔA مؤثراً من $\mathcal{L}(E, E_1)$ بحيث: $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$. عندئذ يقبل المؤثر $A_0 + \Delta A$ مقلوباً محدوداً: $(A_0 + \Delta A)^{-1}$، أي $\mathcal{G}\mathcal{L}(E, E_1) \ni A = A_0 + \Delta A$.

البرهان. نختار عنصراً $y \in E_1$ ونعتبر التطبيق B من الفضـاء E في نفسه المعرف بالدستور:

$$Bx = A_0^{-1}\, y - A_0^{-1}\, \Delta A x$$

من الشرط: $\|\Delta A\| < \|A_0^{-1}\|^{-1}$ ينتج أن التطبيق B مقلص. لما كان الفضـاء E تاما، توجد نقطة ثابتة (صـامدة) وحيدة x للتطبيق B:

$$x = Bx = A_0^{-1} y - A_0^{-1}\, \Delta A x$$

ومنه:

$$Ax = A_0 x + \Delta A x = y$$

إذا كان $Ax' = y$ فإن x' نقطة ثابتة أيضـاً للتطبيق B، وبالتالي $x = x'$.

وهكذا من أجل كل $y \in E_1$ ، فإن المعادلة $Ax = y$ تقبل حلاً وحيداً في الفضاء E ، أي أن المؤثر A يقبل مقلوباً A^{-1} معرفاً على الفضاء E_1 بأكمله من النظرية 3 ، يتضح أن المؤثر A^{-1} محدود . وهو المطلوب .

نظرية 5. ليكن E فضاء لباناخ و I المؤثر المطابق في E و A مؤثراً خطياً محدوداً يطبق E في نفسه بحيث : $\|A\| < 1$. عندئذ يقبل المؤثر $I - A$ مقلوباً $(I - A)^{-1}$ محدوداً يمكن كتابته على الشكل :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \tag{11}$$

البرهان. نلاحظ أن وجود المؤثر $(I - A)^{-1}$ والخاصية القائلة أنه محدود ناتجان من النظرية 4 (كما يأتي ذلك من الإستدلال الموالي) .

بما أن : $\|A\| < 1$ فإن :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty \, .$$

ثم إن E تام ، وبالتالي فإن تقارب السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ يستلزم أن مجموع السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ مؤثر خطي ومحدود . من أجل كل n لدينا :

$$(I - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k (I - A) = I - A^{n+1}$$

إذا جعلنا n يسعى إلى ∞ في المساواة السابقة نجد ، بمراعاة كون $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$ ، أن :

$$(I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = I$$

وبالتالي :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

وهو المطلوب.

تمرين. ليكن A مؤثراً خطياً ومحدوداً يطبق فضاء لباناخ E على فضاء لباناخ E_1. برهن على وجود ثابت $\alpha > 0$ بحيث إذا كان $B \in \mathfrak{L}(E, E_1)$ وَ $\|A - B\| < \alpha$ فإن B يطبق E على E_1 بأكمله (باناخ!).

5. المؤثرات القرينة.

نعتبر مؤثراً خطياً مستمراً $y = Ax$ يطبق فضاء شعاعياً طوبولوجياً E في فضاء E_1 من نفس النوع. لتكن g تابعية خطية معرفة على E_1، أي $g \in E_1^*$. لنطبق التابعية g على العنصر $y = Ax$؛ نتأكد بسهولة من أن $g(Ax)$ تابعية خطية مستمرة معرفة على E؛ نرمز لها بِـf. وبالتالي فإن التابعية f عنصر من الفضاء E^*. وهكذا ألحقنا بكل تابعية $g \in E_1^*$ تابعية $f \in E^*$، أي أننا حصلنا على مؤثر من E_1^* في E^*. يسمى هذا المؤثر المؤثر القرين للمؤثر A ونرمز له بِـA^*.

إذا رمزنا بقيمة التابعية f عند العنصر x بِـ(f, x) نحصل على :

$$(g, Ax) = (f, x)$$

أو :

$$(g, Ax) = (A^* g, x)$$

يمكن اعتبار هذه المساواة بمثابة تعريف للمؤثر القرين.

مثال. المؤثر القرين في فضاء بعده منته.

ليكن A مؤثراً يطبق الفضاء الحقيقي $\mathbf{R}^n$ في الفضاء الحقيقي $\mathbf{R}^m$، ولتكن $\|a_{ij}\|$ مصفوفة هذا المؤثر.

يمكن كتابة التطبيق $y = Ax$ على شكل جملة علاقات:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad , \; i = 1, 2, ..., m$$

وكتابة التابعية $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

من المساواة:

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{j=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum g_i a_{ij}$$

نحصل على $f_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$. لما كان $f = A^*g$ نستنتج أن المؤثر A^* معطى بالمصفوفة المنقولة لمصفوفة المؤثر A.

نستخلص خواص المؤثرات القرينة مباشرة من التعريف.

1. المؤثر A^* خطي.

2. $(A + B)^* = A^* + B^*$

3. إذا كان k عدداً فإن $(kA)^* = kA^*$

إذا كان A مؤثراً مستمراً من E في E_1 فإن A^* مؤثر مستمر من (E_1^*, b) في (E^*, b) (تأكد من ذلك!). إذا كان E وَ E_1 فضاءين لباناخ فإن هذه القضية يمكن تحديدها أكثر كالتالي:

نظرية 6. إذا كان A مؤثراً خطياً محدوداً يطبق فضاء لباناخ E في فضاء لباناخ E_1، لدينا:

$$\|A^*\| = \|A\|$$

البرهان. بفضل خواص نظيم مؤثر، لدينا :

$$|(A^*g, x)| = |(g, Ax)| \le \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$$

ومنه :

$\|A^*g\| \le \|A\| \cdot \|g\|$؛ وبالتالي :

$$\|A^*\| \le \|A\| \qquad (12)$$

ليكن $E \ni x$ وَ $Ax \neq 0$، نضع : $E_1 \ni y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|}$؛ من البديهي أن $\|y_0\| = 1$. من نتيجة نظرية هان-باناخ، توجد تابعية g بحيث $\|g\| = 1$ وَ $(g, y_0) = 1$، أي أن : $(g, Ax) = \|Ax\|$. من العلاقات :

$$\|Ax\| = (g, Ax) = |(A^*g, x)| \le \|A^*g\| \cdot \|x\|$$

$$\le \|A^*\| \cdot \|g\| \cdot \|x\| = \|A^*\| \cdot \|x\|$$

يأتي : $\|A\| \le \|A^*\|$، ومنه نستنتج بفضل المتراجحة (12)، أن :

$$\|A^*\| = \|A\|$$

انتهى برهان النظرية.

تمرين. ليكن E وَ E_1 فضاءين لباناخ انعكاسيين، وليكن A عنصراً من $\mathcal{L}(E, E_1)$. أثبت أن $A^{**} = A$.

6. المؤثرات القرينة في فضاء إقليدي. المؤثرات القرينة لنفسها.

نعتبر الحالة التي يكون فيها A مؤثراً محدوداً في فضاء هيلبرتي H (حقيقي أو عقدي). بالاعتماد على النظرية الخاصة بالشكل العام لتابعية خطية على فضاء هيلبرتي فإن التطبيق τ الذي يلحق بكل عنصر $H \ni y$ التابعية الخطية :

$$(\tau y)(x) = (x, y)$$

تشاكل (أو تشاكل مرافق، إذا كان H عقدياً) من الفضاء H على الفضاء الثنوي H^* بأكمله: ليكن A^* مؤثراً مرافقاً لِـ A. من الواضح أن التطبيق $\tilde{A}^* = \tau^{-1}A^*\tau$ مؤثر خطي محدود في H، ثم إنه من السهل أن نرى بأن:

$$(Ax, y) = (x, \tilde{A}^* y)$$

وهذا مهما كان $y \ni H$.

لما كان $\|A\| = \|A^*\|$ والتطبيقان τ وَ τ^{-1} إيزومتريين فإن $\|A\| = \|\tilde{A}^*\|$. يصدق كل ما قيل سابقاً على أي فضاء إقليدي بعده منته، حقيقي أو عقدي.

نتبنى الاصطلاح التالي. إذا كان R فضاء إقليدياً (بعده منته أو غير منته) نسمي المؤثر $\tilde{A}^*$ المعرف أعلاه من R في R المؤثر القرين للمؤثر A في R.

من المهم أن نلاحظ بأن هذا التعريف يختلف عن تعريف مؤثر قرين في فضاء كيفي لباناخ E حيث أن المؤثر القرين A^*، في الحالة الأخيرة، يعمل في الفضاء الثنوي E^*. للتمييز بين المؤثرين A^* وَ $\tilde{A}^*$ يسمى $\tilde{A}^*$ أحيانا المؤثر القرين الهيرميتي. أما فيما يخصنا فسنكتب A^* بدل $\tilde{A}^*$ وذلك كيلا نثقل المصطلحات والرموز، كما سنتكلم دوماً عن المؤثر القرين، وهذا دون أن ننسى أن المعنى المقصود منه في حالة فضاء إقليدي هو المعنى المشار إليه أعلاه.

من الواضح بالنسبة لفضاء إقليدي R أن قرين مؤثر A يمكن تعريفه على أنه المؤثر A^* الذي يحقق المساواة:

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

من أجل كل x وَ $y \ni R$.

أصبح المؤثران A وَ A^* الآن مؤثرين في نفس الفضاء، من الممكن إذن

أن تتحقق المساواة $A = A^*$. لنبرز صنفاً هاماً من المؤثرات في فضاء إقليدي (وبصفة خاصة، في فضاء هيلبرتي) .

تعريف 4. نقول عن مؤثر خطي محدود في فضاء إقليدي R أنه قرين نفسه، إذا كان $A = A^*$ ، أي إذا كان :

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

من أجل كل x وَ y في R .

نشير إلى الخاصية الهامة التالية التي يتمتع بها A^* قرين A . نقول عن فضاء جزئي R_1 من الفضاء الإقليدي R إنه لامتغير بالنسبة للمؤثر A ، إذا كان $x \in R_1$ يستلزم $Ax \in R_1$. إذا كان الفضاء الجزئي R_1 لامتغيراً بالنسبة لِـ A فإن مكمله المتعامد $R_1^{\perp}$ لا متغير بالنسبة لِـ A^* ؛ ذلك أنه إذا كان $y \in R_1^{\perp}$ فإن :

$$(x, A^*y) = (Ax, y) = 0$$

من أجل كل $x \ni R_1$ ، لأن $Ax \in R_1$. بصفة خاصة، إذا كان A قرين نفسه فإن المكمل المتعامد لكل فضاء جزئي لامتغير بالنسبة لِـ A هو أيضاً لامتغير بالنسبة لِـ A .

تمرين . نفرض أن A وَ B مؤثران خطيان محدودان في فضاء إقليدي، أثبت العلاقات التالية :

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(A^*)^* = A$$

$$I^* = I$$

(I هو المؤثر المطابق) .

7. طيف مؤثر. الحَالّة.[1]

أنه لمن الصعب في نظرية المؤثرات أن نشير إلى مفهوم أكثر أهمية من مفهوم الطيف. لندخل هذا المفهوم في حالة فضاء ذي بعد منته.

ليكن A مؤثراً خطياً في الفضاء ذي n بعداً $\mathbf{C}^n$. نقول عن عدد λ أنه قيمة ذاتية للمؤثر A إذا قبلت المعادلة:

$$Ax = \lambda x$$

حلولاً غير منعدمة. تسمى مجموعة القيم الذاتية طيف المؤثر A؛ ونسمي باقي القيم الأخرى لِـλ القيم النظامية. أي أن عدداً λ يكون نظامياً إذا كان المؤثر $A - \lambda I$ قابلاً للقلب. وحينئذ يكون المؤثر $(A - \lambda I)^{-1}$ معرفاً على الفضاء $\mathbf{C}^n$ بأكمله، وبما أن كل مؤثر في فضاء بعده منته مؤثر محدود، فإن هناك احتمالين في هذه الحالة:

1) تقبل المعادلة $Ax = \lambda x$ حلاً غير منعدم، أي أن λ قيمة ذاتية لِـA؛ نلاحظ عندئذ أن المؤثر $(A - \lambda I)^{-1}$ غير موجود.

2) المؤثر $(A - \lambda I)^{-1}$ موجود ومحدود ومعرف على الفضاء المعتبر بأكمله، أي أن λ نقطة نظامية.

إذا كان المؤثر A معطى في فضاء E ذي بعد غير منته فإن هناك احتمالاً ثالثاً:

3) المؤثر $(A - \lambda I)^{-1}$ موجود، أي أن المعادلة $Ax = \lambda x$ لاتقبل حلاً غير منعدم، لكن هذا المؤثر غير معرف على الفضاء E بأكمله (وقد يكون غير محدود).

نتبنى المصطلحات التالية. نقول عن العدد λ أنه نظامي للمؤثر A المعرف في فضاء لباناخ (عقدي) E إذا كان المؤثر $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$، المسمى حَالّة المؤثر A، مؤثراً معرفاً على الفضاء E بأكمله، وبالتالي

(1) نفرض، كلما تكلمنا عن طيف مؤثر، أن هذا المؤثر يعمل في فضاء عقدي.

(حسب النظرية 3) محدوداً. أما المجموعة المتبقية من قيم λ فتسمى طيف المؤثر A . نلاحظ أن الطيف يحوي كل القيم الذاتية للمؤثر A ، لأنه إذا كان $(A - \lambda I)x = 0$ من أجل $x \neq 0$ فإن المؤثر $(A - \lambda I)^{-1}$ غير موجود. تسمى مجموعة القيم الذاتية لِـ λ الطيف النقطي.

أما الجزء المتبقي من الطيف، أي مجموعة الأعداد λ التي يوجد من أجلها المؤثر $(A - \lambda I)^{-1}$، وهو غير معرف على E بأكمله، فيسمى الطيف المستمر. وهكذا يمثل كل عدد λ (بالنسبة للمؤثر A) إما قيمة نظامية، وإما قيمة ذاتية وإما نقطة من الطيف المستمر. إن إمكانية وجود طيف مستمر لمؤثر هي التي تجعل نظرية المؤثرات في فضاء بعده غير منته تختلف إختلافاً جوهرياً عن النظرية المماثلة في فضاء بعده منته.

ليكن A مؤثراً محدوداً في فضاء باناخي E . إذا كانت النقطة λ نظامية أي إذا كان المؤثر $(A - \lambda I)^{-1}$ معرفاً في E بأكمله ومحدوداً فإن المؤثر $(A - (\lambda + \delta) I)^{-1}$ معرف أيضاً في E بأكمله ومحدود، وذلك من أجل δ صغير بكفاية (النظرية 4)؛ أي أن النقطة $\lambda + \delta$ نظامية أيضاً. وهكذا يتضح أن مجموعة النقاط النظامية تؤلف مجموعة مفتوحة؛ ومنه يأتي أن الطيف، وهو متمم المجموعة السابقة، مجموعة مغلقة.

نظرية 7.
إذا كان A مؤثراً خطياً ومحدوداً في فضاء لباناخ E وكان $\|A\| < |\lambda|$، فإن λ نقطة نظامية.

البرهان. لما كان بديهياً أن:

$$A - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)$$

فإن:

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}$$

إن السلسلة الأخيرة تتقارب من أجل $|\lambda| > \|A\|$ وتعطي مؤثراً محدوداً معرفاً على الفضـاء E بأكمله (النظرية 5) . بعبارة أخرى فإن :

طيف المؤثر A يوجد في القرص المتمركز في 0 والذي نصف قطره $\|A\|$.

أمثلة . 1. نعتبر في الفضـاء $C[a, b]$ مؤثراً A معرفاً بالدستور :

$$Ax(t) = tx(t) \tag{13}$$

عندئذ :

$$(A - \lambda I)\, x(t) = (t - \lambda)\, x(t)$$

إن المؤثر (13) يقبل القلب من أجل كل λ لأن من المسـاواة :

$$(t - \lambda)\, x(t) = 0$$

ينتج أن التابع المستمر $x(t)$ منعدم في $[a, b]$. إلا أنه إذا كان λ عنصراً من $[a, b]$ فإن المؤثر المقلوب المعطى بالدستور :

$$(A - \lambda I)^{-1} x(t) = \frac{1}{t - \lambda}\, x(t)$$

غير معرف على الفضـاء $C[a, b]$ بأكملـه وهو غير محـدود (برهن على ذلك !) . ومنه يأتي أن طيف المؤثر (13) هو القطعة $[a, b]$، وأن هذا الطيف لايحوي قيماً ذاتية ، أي أن هناك طيفاً مستمراً لا غير .

2. نعتبر في الفضـاء l_2 مؤثراً A معرفاً بالطريقة التالية :

$$A : (x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots) \tag{14}$$

ليس لهـذا المؤثر قيم ذاتية . (أثبت ذلك !) . إن المؤثر A^{-1} محـدود ، لـكنه معرف على الفضـاء الجزئي $x_1 = 0$ من l_2 فقط ، أي أن : $\lambda = 0$ نقطة من طيف هذا المؤثر .

تمرين. هل توجد نقاط أخرى، غير $\lambda = 0$، في طيف المؤثر (14)؟

ملاحظات. 1. كل مؤثر خطي ومحدود ومعرف على فضاء باناخي عقدي وله على الأقل عنصر غير منعدم، يقبل حتماً طيفاً غير خال. هناك مؤثرات تتكون أطيافها من نقطة واحدة (مؤثر الضرب في عدد، مثلاً).

2. يمكن أن ندقق النظرية 7 بالطريقة التالية. ليكن:

$$r = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A_n\|}$$

(يمكن إثبات وجود هذه النهاية من أجل كل مؤثر A محدود)؛ عندئذ يقع طيف المؤثر A بأكمله في القرص الذي نصف قطره 0 ومركزه r. يسمى العدد r نصف القطر الطيفي للمؤثر A.

3. تقبل الحالَّتان R_μ وَ R_λ الموافقتان للنقطتين μ وَ λ التبديل فيما بينهما وهما تحققان العلاقة:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$$

التي يمكن البرهان عليها بسهولة، وذلك بضرب طرفيها في:

$$(A - \lambda I)(A - \mu I)$$

ومنه ينتج أنه إذا كانت λ_0 نقطة نظامية للمؤثر A فإن مشتق R_λ بالنسبة لِـ λ عند $\lambda = \lambda_0$، أي النهاية:

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{R_{\lambda 0 + \Delta\lambda} - R_{\lambda 0}}{\Delta\lambda}$$

موجودة (بمفهوم تقارب نظيمات المؤثرات) وقيمتها هي $R^2_{\lambda_0}$.

تمرين. ليكن A مؤثراً قرين نفسه محدوداً في فضاء هيلبرتي عقدي H. أثبت أن طيفه مجموعة جزئية محدودة ومغلقة من المحور الحقيقي.

§ 6. المؤثرات المتراصة.

1. تعريف وأمثلة لمؤثرات متراصة.

بخلاف المؤثرات الخطية في فضاء بعده منته، التي توجد من أجلها دراسة معمقة وكاملة، نجد أن دراسة المؤثرات الخطية الكيفية في فضاء بعده غير منته قضية معقدة لا نستطيع تصور اتساعها. ورغم ذلك فإن هناك أصنافاً هامة من هذه المؤثرات يمكن وصفها وصفاً تاماً. من أهم هذه الأصناف نجد صنف ما يدعى بالمؤثرات المتراصة. فهذه المؤثرات، هي من جهة قريبة جداً، بحكم خواصها، من المؤثرات ذات البعد المنتهي (أي المؤثرات المحدودة التي تحوّل فضاء معطى إلى فضاء ذي بعد منته) وتقبل إلى جانب ذلك وصفاً كاملاً، وهي تلعب من جهة ثانية دوراً هاماً في العديد من التطبيقات، وبالدرجة الأولى في نظرية المعادلات التكاملية التي سنتناولها في الفصل التاسع.

تعريف 1. يسمى مؤثر A يطبق فضاء لباناخ E في نفسه (أو في فضاء آخر E_1 لباناخ) مؤثراً متراصاً أو مستمرا تماما، إذا حوّل كل مجموعة محدودة إلى مجموعة شبه متراصة.

نلاحظ أن كل مؤثر خطي مؤثر متراص في فضاء نظيمي بعده منته، وذلك لأنه يحول كل مجموعة محدودة إلى مجموعة محدودة ونعلم أن كل مجموعة محدودة مجموعة شبه متراصة في فضاء ذي بعد منته.

أما في فضاء ذي بعد غير منته فإن تراص مؤثر شرط أقوى من شرط الاستمرار لهذا المؤثر (أي أقوى من كونه محدوداً). ففي فضاء هيلبرتي مثلاً، نجد أن المؤثر المطابق مستمر لكنه غير متراص. (برهن على ذلك، بغض النظر عن المثال 1 الوارد أسفله).

نعتبر بعض الأمثلة.

1. ليكن I المؤثر المطابق في فضاء لباناخ E. لنثبت أنه إذا كان E ذا

بعد غير منته فإن المؤثر I غير متراص. من أجل ذلك يكفي، بطبيعة الحال، أن نثبت بأن كرة الوحدة في $E^{`}$ (التي يحولها المؤثر I إلى نفسها) ليست شبه متراصة. ينتج ذلك، بدوره، من التوطئة الموالية والتي سنستفيد منها في المستقبل.

توطئة 1. لتكن $x_1, x_2, \ldots$ أشعة مستقلة خطياً في فضاء نظيمي E وليكن E_n الفضاء الجزئي من E المولّد عن الأشعة $x_1, \ldots, x_n$. توجد عندئذ متتالية أشعة: $y_1, y_2, \ldots$ تحقق الشروط التالية:

1) $\|y_n\| = 1$

2) $y_n \in E_n$

3) $1/2 < \varrho(y_n, E_{n-1})$ حيث ترمز $\varrho(y_n, E_{n-1})$ للمسافة التي تفصل الشعاع y_n عن المجموعة E_{n-1}، أي:

$$\operatorname*{Inf}_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\|$$

البرهان. بما أن الأشعة: $x_1, x_2, \ldots$ مستقلة خطياً فإن:

$x_n \notin E_{n-1}$ وَ $0 < \varrho(x_n, E_{n-1}) = \alpha$.

ليكن x^* شعاعاً من E_{n-1} بحيث: $\|x_n - x^*\| < 2\alpha$. حينئذ، بما أن:

$$\alpha = \varrho(x_n, E_{n-1})$$

$$= \varrho(x_n - x^*, E_{n-1})$$

فإن الشعاع:

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}$$

يحقق الشروط الثلاثة الواردة في التوطئة. يمكن أن نأخذ y_1 مساوياً لِـ $\frac{x_1}{\|x_1\|}$. انتهى برهان التوطئة.

بفضل هذه التوطئة نستطيع، في كرة الوحدة من كل فضاء نظيمي بعده غير منته، إنشاء متتالية أشعة $\{y_n\}$ تحقق $1/2 < \varrho(y_{n-1}, y_n)$. من الواضح أن هذه المتتالية لاتحوي أية متتالية جزئية متقاربة. وهذا يعني أن شبه التراص غير متوفر.

2. ليكن A مؤثراً خطياً ومستمراً يحوّل فضاء باناخياً E إلى فضاء جزئي بعده منته E . إن هذا المؤثر متراص لأنه يحوّل كل مجموعة جزئية محدودة $E \supset M$ إلى مجموعة جزئية محدودة من فضاء بعده منته، أي إلى مجموعة شبه متراصة.

بصفة خاصة، نلاحظ في فضاء هيلبرتي أن مؤثر الاسقاط المتعامد على فضاء جزئي يكون متراصاً إذا وفقط إذا كان هذا الفضاء الجزئي ذا بعد منته.

3. نعتبر في الفضاء l_2 المؤثر A المعرف بالطريقة التالية: إذا كان: $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ فإن:

$$Ax = (x_1, \frac{1}{2} x_2, ..., \frac{1}{2^n} x_n, ...) \quad (1)$$

إن هذا المؤثر متراص. ذلك أن كل مجموعة محدودة في l_2 محتواة في كرة من هذا الفضاء، يكفي إذن أن نبين بأن صور الكرات متراصة، وبفضل خطية المؤثر A يكفي أيضاً أن نتأكد من ذلك بالنسبة لكرة الوحدة لا أكثر.

نلاحظ أن المؤثر (1) يحوّل كرة الوحدة في l_2 إلى مجموعة نقاط محتواة في متوازي الوجوه الأساسي (راجع الفقرة 1، §7، الفصل 2) . وبالتالي فإن هذه المجموعة محدودة كلية، وعليه فهي متراصة.

تمرين. ليكن:

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, ...)$$

ما هي الشروط التي لا بد أن تتوفر في المتتالية العددية $\{a_n\}$ لكي يكون هذا المؤثر متراصاً في l_2؟

4. نجد في فضاء التوابع المستمرة $C[a, b]$ صنفاً هاماً من المؤثرات المتراصة يتألف من المؤثرات التي تكتب على الشكل:

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \tag{2}$$

لنثبت القضية التالية:

إذا كان التابع $K(s, t)$ محدوداً على المربع $a \leq s \leq b$ ، $a \leq t \leq b$ وكانت كل نقاط تَقَطُّعِه واقعة على عدد منته من المنحنيات:

$$t = \varphi_k(s) \quad , \quad k = 1, 2, ..., n$$

حيث φ_k توابع مستمرة فإن الدستور (2) يعرف في الفضاء $C[a, b]$ مؤثراً متراصاً.

نلاحظ في البداية أن تلك الشروط تستلزم وجود التكامل (2) مهما كان s في $[a, b]$، أي أن التابع $y(s)$ معرف. ليكن:

$$M = \sup_{a \leq s, t \leq b} |K(s, t)|$$

ولتكن G مجموعة النقاط (s, t) التي تحقق المتراجحة التالية على الأقل من أجل قيمة لِـ k $(k = 1, 2, ..., n)$:

$$|t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12\, Mn}$$

إن الأثر $G(s)$ لهذه المجموعة على كل مستقيم $s =$ ثابتاً هو اتحاد المجالات التالية:

$$G(s) = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ t \; : \; |t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12\, Mn} \right\}$$

ليكن F متمم المجموعة G بالنسبة للمربع $a \leq s, t \leq b$. لما كانت المجموعة F متراصة والتابع $K(s, t)$ مستمراً على F ، يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$|K(s', t') - K(s'', t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b - a)}$$

وهذا من أجل كل النقاط (s', t') ، (s'', t'') التي تحقق الشرط :

$$|s' - s''| + |t' - t''| < \delta \tag{3}$$

لنقيّم الآن الفرق $y(s') - y(s'')$ مع افتراض $|s' - s''| < \delta$ ، لدينا :

$$|y(s') - y(s'')| \leq \int_a^b |K(s', t) - K(s'', t)| \cdot |x(t)| \mathrm{d}t$$

لتقييم تكامل الطرف الثاني من هـذه المتراجحة ، نقسم قطعة المكاملـة $[a, b]$ إلى جزءين P وَ Q ، حيث $P = G(s') \cup G(s'')$ ، وَ Q هو الجزء المتبقي من القطعة $[a, b]$. بعد ملاحظة أن P اتحاد لمجالات طولها الـكلي أصغر من $\frac{\varepsilon}{3M}$ أو يساويه ، نحصل على :

$$\int_P |K(s', t) - K(s'', t)| \cdot |x(t)| \mathrm{d}t < \frac{2\varepsilon}{3} \|x\|$$

يقبل التكامل على Q ، بطبيعة الحال ، التقييم التالي :

$$\int_Q |K(s', t) - K(s'', t)| \cdot |x(t)| \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{3} \|x\|$$

وبالتالي :

$$|y(s') - y(s'')| < \varepsilon \|x\| \tag{4}$$

تبين المتراجحة (4) أن التابع $y(s)$ مستمر ، أي أن الدستور (2) يعرف مؤثراً يطبق الفضـاء $C[a, b]$ في نفسه . تثبت المتراجحة (4) أيضـاً أنه إذا كانت $\{x(t)\}$ مجموعة محدودة في $C[a, b]$ فإن المجموعة الموافقة لها $\{y(s)\}$ متسـاوية الاستمرار . أخيراً ، إذا كان $\|x\| \leq C$ فإن :

$$\|y\| = \sup |y(s)| \leq \sup \int_a^b |K(s, t)| \cdot |x(t)| \mathrm{d}t$$

$$\leq M(b - a) \|x\|$$

وهكذا يتضح أن المؤثر (2) يحوّل كل مجموعة محدودة من $C[a, b]$ إلى مجموعة توابع محدودة بانتظام ومتساوية الاستمرار، وبالتالي شبه متراصة

4 a. إن الشرط القائل إن نقاط تقطّع التابع $K(s, t)$ تقع على عدد منته من المنحنيات تقطع المستقيمات s = ثابتاً عند نقطة وحيدة هو شرط هام. ليكن، مثلاً:

$$K(s, t) = \begin{cases} 0 \quad , \quad s < \frac{1}{2} \\ 1 \quad , \quad s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

إن المؤثر (2) الذي له هذه النواة على المربع $0 \leq s, t \leq 1$، حيث تملأ نقاط تقطّع $K(s, t)$ القطعة $s = \frac{1}{2}$، $0 \leq t \leq 1$، يحوّل التابع $x(t) = 1$ إلى تابع متقطع.

4 b. إذا وضعنا $K(s, t) = 0$ من أجل $s > t$، فإن المؤثر (2) يأخذ الشكل:

$$y(s) = \int_a^s K(s, t) x(t) \, \mathrm{d} t \tag{5}$$

نفرض أن التابع $K(s, t)$ مستمر من أجل $s > t$، عندئذ يأتي من اعتبارات المثال 4 أن المؤثر (5) متراص في $C[a\, b]$.

يسمى هذا المؤثر مؤثراً من نمط فولتيرا[1] (Volterra)

ملاحظة. طبقاً لتعريف مؤثر متراص الوارد أعلاه، من الممكن أن تكون صورة كرة الوحدة المغلقة غير متراصة (رغم أنها شبه متراصة). لرؤية ذلك نعتبر في الفضاء $C[-1, 1]$ مؤثر المكاملة:

$$J x(s) = \int_{-1}^{s} x(t) \, \mathrm{d} t$$

(1) فيتو فولتيرا، رياضي إيطالي، قام باعمال هامة تتعلق بالتحليل التابعي والمعادلات التكاملية.

مما أثبتناه أعلاه ينتج أن J مؤثر متراص في $C[-1,1]$. نضع :

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq t \leq 0 \\ nt & , \quad 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \quad \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

عندئذ يكون $x_n \in C[-1,1]$ ، $\|x_n\| = 1$ من أجل كل n وَ :

$$y_n(t) = J x_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{2} nt^2 & , \quad 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ t - \frac{1}{2n} & , \quad \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

من الواضح أن المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة في $C[-1,1]$ نحو التابع :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

الذي لا يمثل صورة (بواسطة التطبيق J) لأي تابع من $C[a,b]$ لأن التابع $y(t)$ غير مستمر .

ورغم ذلك ، يمكن أن نبرهن أنه إذا كان الفضاء إنعكاسياً (هيلبرتياً ، مثلاً) ، فإن صورة كرة الوحدة المغلقة ، بواسطة تطبيق خطي متراص ، متراصة .

2. الخاصيات الأساسية للمؤثرات المتراصة .

نظرية 1. إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية مؤثرات متراصة في فضاء لباناخ E ، متقاربة بالنظيم نحو مؤثر A ، فإن المؤثر A متراص أيضاً .

البرهان. لإثبات تراص المؤثر A ، يكفي أن نثبت من أجل كل متتالية

محدودة $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ من عناصر E أنه يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة من المتتالية $\{Ax_n\}$.

بما أن المؤثر A_1 متراص، يمكن أن نستخرج من المتتالية $\{A_1 x_n\}$ متتالية جزئية متقاربة. لتكن :

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}, ... \tag{6}$$

متتالية جزئية من $\{x_n\}$ بحيث تكون المتتالية $\{A_1 x_n^{(1)}\}$ متقاربة. نعتبر الآن المتتالية $\{A_2 x_n^{(1)}\}$. إنها تحوي، بدورها، متتالية جزئية متقاربة. لتكن :

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}, ...$$

متتالية جزئية من (6) بحيث تكون المتتالية $\{A_2 x_n^{(2)}\}$ متقاربة. إن المتتالية $\{A_1 x_n^{(2)}\}$ متقاربة أيضا. نتبع نفس الاستدلال ونختار في $\{x^{(2)}\}$ متتالية جزئية :

$$x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, ..., x_n^{(3)}, ...$$

بحيث تكون $\{A_3 x_n^{(3)}\}$ متقاربة، الخ. نعتبر أخيراً المتتالية القطرية :

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(n)}, ...$$

التي يحوّلها كل مؤثر من المؤثرات $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ إلى متتالية متقاربة. نثبت أن المؤثر A يحوّلها أيضاً إلى متتالية متقاربة. ومنه يأتي تراص A. لما كان الفضاء E تاماً، يكفي أن نبين بأن $\{Ax_n^{(n)}\}$ متتالية لكوشي. لدينا :

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \leq \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| + \tag{7}$$

$$+ \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + \|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|$$

ليكن : $\|x_n\| \leq C$؛ نختار في البداية k بحيث $\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}$، ثم نختار N بحيث :

$$\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

من أجل كل $N < n$ وَ $N < m$. (وهذا ممكن، لأن المتتالية $\{A_k x_n^{(n)}\}$ متقاربة) . نستنتج من (7)، في هذه الحالة، أن :

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| < \varepsilon$$

من أجل كل n وَ m كبيرين بكفاية . انتهى برهان النظرية .

من السهل أن نتأكد من كون كل عبارة خطية لمؤثرات متراصة مؤثراً متراصاً . وبالتالي، تشكل مجموعة المؤثرات المتراصة فضاء جزئياً شعاعياً مغلقاً في الفضاء $\mathcal{L}(E, E)$ المؤلف من كافة المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على E .

نتساءل الآن عما إذا كانت مجموعة المؤثرات المتراصة «مغلقة» بالنسبة لعملية ضرب المؤثرات، أي عما إذا كان جداء مؤثرين متراصين مؤثراً متراصاً . لدينا، في الواقع، قضية أقوى من ذلك .

نظرية 2. إذا كان A مؤثراً متراصاً وَ B مؤثراً محدوداً فإن المؤثرين AB وَ BA متراصان .

البرهان . إذا كانت المجموعة $M \subset E$ محدودة فإن المجموعة BM محدودة أيضاً . وبالتالي فإن المجموعة $A B M$ شبه متراصة، وهذا يعني أن المؤثر AB متراص .

كما أنه إذا كانت M محدودة فإن AM شبه متراصة، ومنه يأتي، بفضل استمرار B، أن المجموعة BAM متراصة أيضاً وهذا يعني تراص المؤثر BA . وهو المطلوب .

نتيجة . إذا كان E فضاء ذا بعد غير منته فإن مقلوب مؤثر متراص لايمكن أن يكون محدوداً .

لأنه لوكان الأمر غير ذلك لأصبح المؤثر المطابق $I = A^{-1}A$ متراصاً في E، وهذا مستحيل (راجع المثال 1) .

ملاحظة. تثبت النظرية 2 أن المؤثرات المتراصة تشكل في حلقة المؤثرات المحدودة $\mathcal{L}(E, E)$ مثالياً ثنائي الجانب[1].

نظرية 3. إن المؤثر القرين لمؤثر متراص مؤثر متراص.

البرهان. ليكن A مؤثراً متراصاً في فضاء لباناخ E. نثبت أن المؤثر القرين A^* المعرف في E^* يحوّل كل مجموعة جزئية محدودة من E^* إلى مجموعة جزئية شبه متراصة. لما كانت كل مجموعة جزئية محدودة من فضاء نظيمي محتواة في كرة، يكفي أن نثبت بأن A^* يحوّل كل كرة إلى مجموعة متراصة. بفضل خطية المؤثر A^* يكفي أن نبين أن الصورة A^*S^* لـكرة الوحدة المغلقة $S^* \subset E^*$ شبه متراصة.

نعتبر عناصر E^* كتوابع ساحة تعريفها لاتساوي الفضاء E بأكمله، حيث نعتبر أن هذه الساحة هي المجموعة المتراصة $\overline{AS}$ أي ملاصق الصورة AS لـكرة الوحدة بواسطة التطبيق A. عندئذ تصبح المجموعة Φ المؤلفة من التوابع الموافقة للتابعيات المنتمية لِـ S^* محدودة بانتظام ومتساوية الإستمرار. لرؤية ذلك نلاحظ أن الشرط $\|\varphi\| \leq 1$ يؤدي إلى:

$$\sup_{x \in \overline{AS}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in AS} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| . \sup_{x \in S} \|Ax\| \leq \|A\|$$

وَ:

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq \|\varphi\| \cdot \|x' - x''\| \leq \|x' - x''\|$$

وبالتالي، فإن هذه المجموعة Φ شبه متراصة في الفضاء $C[\overline{AS}]$ (بفضل نظرية أرزيلا). لكن المجموعة Φ، المزودة بالمسافة المقتصرة من المسافة المعتادة في فضاء التوابع المستمرة $C[\overline{AS}]$ والمجموعة $A^* S^*$ (المزودة بالمسافة المولدة عن نظيم الفضاء E^*) أيزومتريان؛ ذلك إنه إذا كان g_1 وَ g_2 عنصرين من S^*، فإن:

(1) المثالي (الثنائي الجانب) لحلقة R هو تعريفاً كل حلقة جزئية u من R بحيث إذا كان $a \in u$ وَ $r \in R$ فإن $ar \in u$ وَ $ra \in u$.

$$\|A^* g_1 - A^* g_2\| = \sup |(A^* g_1 - A^* g_2, x)| = \sup_{x\in S} |(g_1 - g_2, Ax)|$$

$$= \sup_{x\in S} |(g_1 - g_2, z)| = \sup_{x\in \overline{AS}} |(g_1 - g_2, z)| = \varrho(g_1, g_2)$$

لما كانت المجموعة Φ شبه متراصة فهي محدودة كلية، وبالتالي فإن المجموعة $A^* S^*$ محدودة كلية أيضاً (لأن Φ وَ AS^* إيزومتريان) . ومنه يأتي شبه تراص A^*S^* في E . وهو المطلوب.

ملاحظة. نتأكد بسهولة من أن المجموعة Φ مغلقة في $C(\overline{AS})$ وبالتالي فهي متراصة، ولذا فإن المجموعة A^*S^* متراصة أيضاً، رغم أن (كما تثبت ذلك ملاحظة الفقرة 2، 6 §، الفصل 4) صورة كرة الوحدة المغلقة (بواسطة تطبيق متراص كيفي) قد تكون غير متراصة. تختلف الوضعية التي وجدناها في النظرية السابقة عن الحالة العامة وذلك لأن كرة الوحدة المغلقة S^* في E^* متراصة من أجل الطوبولوجيا * - الضعيفة للفضاء E^* (راجع النظرية 3، 3 §) . وهو ما يؤدي إلى تراص (بالنسبة لمسافة الفضاء E^*) صورة المجموعة S^* بواسطة كل مؤثر متراص.

تمارين. 1. ليكن A مؤثراً خطياً ومحدوداً في فضاء لباناخ. برهن على أنه إذا كان المؤثر A^* متراصاً فإن A^* متراص أيضاً.

2. حتى يكون مؤثر خطي A في فضاء هيلبرتي H متراصاً يلزم ويكفي أن يكون المؤثر (الهيرميتي) القرين A^* متراصاً.

3. القيم الذاتية لمؤثر متراص.

نظرية 4. إذا كان A مؤثراً في فضاء لباناخ E فإنه لايمكن أن يقبل، من أجل $\delta > 0$، سوى عدد منته من الأشعة الذاتية المستقلة خطياً الموافقة للقيم الذاتية التي لها طويلة أكبر من δ.

البرهان. لتكن $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ متتالية قيم ذاتية (قد يكون البعض منها متساوياً) للمؤثر A بحيث $|\lambda_n| > \delta$؛ لتكن $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ متتالية الأشعة الذاتية الموافقة لها، نفرض أن هذه الأشعة مستقلة خطياً.

نستخدم التوطئة 1 (الفقرة 1، §6) وننشىء متتالية أشعة $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ بحيث:

1) $y_n \in E_n$

2) $\|y_n\| = 1$

3) $\varrho(y_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}$

حيث يرمز E_n للفضاء الجزئي المولد عن الأشعة $x_1, x_2 ..., x_n$.

من المتراجحة $|\lambda_n| > \delta$ يأتي أن المتتالية $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ محدودة. نثبت أن متتالية الصور $\left\{A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}$ لاتحوي أية متتالية جزئية متقاربة. لرؤية ذلك، نعتبر $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$؛ عندئذ:

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n$$

حيث:

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \in E_{n-1}$$

إذن من أجل كل p وَ q حيث $q < p$، لدينا:

$$\left\|A\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right)\right\| = \|y_p + z_p - (y_q + z_q)\| =$$

$$= \|y_p - (y_q + z_q - z_p)\| > \frac{1}{2}$$

لأن: $y_q + z_q - z_p \in E_{p-1}$.

لكن هذا يناقض الفرض القائل أن المؤثر A متراص.

من النظرية السابقة نستنتج، بصفة خاصة، أن عدد الأشعة الذاتية المستقلة خطياً الموافقة لقيمة ذاتية معطاة $\lambda_n \neq 0$ لمؤثر متراص A عدد منته.

كما نستنتج من هذه النظرية أيضاً أن عدد القيم الذاتية λ_n لمؤثر متراص A المنتمية إلى خارج القرص $|\lambda| > \delta > 0$، عدد منته وأن مجموعة كل القيم الذاتية لمؤثر A يمكن ترتيبها ترتيباً متناقصاً لطويلاتها $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

4. المؤثرات المتراصة في فضاء هيلبرتي.

تكلمنا سابقاً عن المؤثرات المتراصة في فضاء باناخي كيفي. نورد فيما يلي بعض المعلومات المحصل عليها بفضل ما نعرفه عن فضاءات هيلبرت.

قلنا أن مؤثراً A يكون متراصاً إذا حوّل كل مجموعة محدودة إلى مجموعة شبه متراصة. بما أن $H = H^*$ (أي أن H ثنوي فضاء قابل للفصل) فإن كل المجموعات المحدودة في H شبه متراصة بضعف (وليس هناك مجموعات أخرى تحقق هذه الخاصية). ولذا نستطيع القول أن كل مؤثر متراص في فضاء هيلبرتي هو مؤثر يحوّل كل مجموعة شبه متراصة بضعف إلى مجموعة شبه متراصة بالنسبة للطوبولوجيا القوية.

يستحسن في بعض الأحيان تبني التعريف التالي لتراص مؤثر في فضاء هيلبرتي: نقول عن مؤثر A إنه متراص في H إذا حوّل كل متتالية متقاربة بضعف إلى متتالية متقاربة بقوة. لرؤية ذلك نفرض أن الشرط الأخير محقق، ولتكن M مجموعة محدودة في H. إن كل مجموعة غير منتهية من M تحوي متتالية متقاربة بضعف. إذا حول المؤثر A هذه المتتالية إلى متتالية متقاربة بقوة، فإن المجموعة AM شبه متراصة. بخصوص القضية العكسية، نعتبر مؤثراً متراصاً A وَ متتالية متقاربة بضعف $\{x_n\}$ نحو النهاية x. عندئذ، نجد أن $\{Ax_n\}$ تحوي متتالية جزئية متقاربة بقوة. من جهة أخرى، وبفضل استمرار A، فإن المتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربة بضعف نحو Ax وهو ما

يستلزم أن $\{Ax_n\}$ لا يمكن أن تكون لها أكثر من نقطة تراكم واحدة وبالتالي فإن $\{Ax_n\}$ متتالية متقاربة.

5. المؤثرات المتراصة القرينة لنفسها في H.

فيما يخص المؤثرات الخطية القرينة لنفسها في فضاء إقليدي بعده منته لدينا النظرية المعروفة حول إمكانية تبسيط مصفوفات هذه المؤثرات إلى الشكل القطري وذلك باختيار أساس متعامد ومتجانس ملائم. نعمم ضمن هذه الفقرة تلك النظرية إلى المؤثرات المتراصة القرينة لنفسها في فضاء هيلبرتي. إن نتائج هذه الفقرة تصلح، في آن واحد، من أجل الفضاءات الهيلبرتية الحقيقية والعقدية. نفرض بهدف تثبيت الأفكار، أن الفضاء H عقدي.

نورد في البداية بعض الخاصيات للأشعة والقيم الذاتية للمؤثرات القرينة لنفسها في H، وهي تماثل نفس الخاصيات التي تتمتع بها المؤثرات القرينة لنفسها في فضاء بعده منته.

I. كل القيم الذاتية لمؤثر قرين لنفسه A في H هي قيم حقيقية.

لرؤية ذلك نفرض أن $Ax = \lambda x$ وَ $\|x\| \neq 0$، عندئذ:

$$\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

ومنه يأتي: $\lambda = \bar{\lambda}$.

II. إن القيم الذاتية لمؤثر قرين نفسه في H الموافقة لقيم ذاتية مختلفة قيم متعامدة.

ذلك أنه إذا كان $Ax = \lambda x$ وَ $Ay = \mu y$ وَ $\lambda \neq \mu$ فإن:

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$

ومنه: $(x, y) = 0$.

نثبت الآن النظرية الأساسية التالية :

نظرية 5 (هيلبرت–شميت Hilbert-Schmidt) .

من أجل كل مؤثر خطي متراص قرين لنفسه A في فضاء لهيلبرت H ، توجد جملة متعامدة ومتجانسة $\{\varphi_n\}$ من الأشعة الذاتية الموافقة للقيم الذاتية غير المنعدمة $\{\lambda_n\}$ بحيث يمكن كتابة كل عنصر $\xi \in H$ على الشكل الوحيد التالي :

$$\xi = \sum_k c_k \varphi_k + \xi'$$

حيث $\xi' \in \operatorname{Ker} A$ ، أي $A\xi' = 0$ ؛ بالإضافة إلى ذلك :

$$A \xi = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k$$

وإذا كانت الجملة $\{\varphi_n\}$ غير منتهية فإن :

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

للبرهان على هذه النظرية نحتاج إلى التوطئتين التاليتين .

توطئة 2. إذا تقاربت المتتالية $\{\varphi_n\}$ بضعف نحو ξ وكان المؤثر الخطي A متراصاً فإن :

$$Q(\xi_n) = (A\xi_n, \xi_n) \to (A\xi, \xi) = Q(\xi)$$

البرهان . من أجل كل n لدينا :

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \leq |(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| + |(A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)|$$

لكن :

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| \leq \|\xi_n\| \cdot \| A(\xi_n - \xi)\|$$

وَ :

$$|(A\xi_n, \xi) - (A\xi, \xi)| = |(\xi, A(\xi_n - \xi))|$$

$$\leq \|\xi\| \cdot \| A(\xi_n - \xi)\|$$

وبما أن الأعداد $\|\xi_n\|$ تشكل مجموعة محدودة وَ : $\|A(\xi_n - \xi)\| \to 0$ نستنتج أن :

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \to 0$$

وهو المطلوب.

توطئة 3. إذا بلغت التابعية :

$$|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$$

(حيث A مؤثر خطي قرين لنفسه ومحدود) قيمتها العظمى على كرة الوحدة عند النقطة ξ_0، فإن :

$$(\xi_0, \eta) = 0$$

يستلزم : $(A\xi_0, \eta) = (\xi_0, A\eta) = 0$.

البرهان. من الواضح أن $\|\xi_0\| = 1$. نضع :

$$\xi = \frac{\xi_0 + a\eta}{\sqrt{1 + |a|^2 \|\eta\|^2}}$$

حيث a عدد عقدي كيفي. ومنه يأتي أن $\|\xi\| = 1$. من جهة أخرى لدينا :

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + |a|^2\|\eta\|^2} \left[Q(\xi_0) + \bar{a}(A\xi_0, \eta) + a\overline{(A\xi_0, \eta)} + |a|^2 Q(\eta)\right]$$

يمكن إختيار العدد a بحيث تكون طويلته صغيرة صغراً كيفياً وبحيث يكون $\bar{a}(A\xi_0, \eta)$ عدداً حقيقياً. حينئذ نجد : $\overline{(A\xi_0, \eta)}$ ولدينا :

$$\dot{Q}(\xi) = Q(\xi_0) + 2\bar{a}(A\xi_0, \eta) + 0(|a|^2)$$

إذا كان $(A\xi_0, \eta) \neq 0$. يوجد a بحيث :

$$|Q(\xi)| > |Q(\xi_0)|$$

وهذا يناقض فرض التوطئة.

نستنتج مباشرة من التوطئة 3 أنه إذا بلغ $|Q(\xi)|$ قيمته العظمى عند $\xi = \xi_0$ فإن ξ_0 شعاع ذاتي للمؤثر A.

برهان النظرية 5. ننشىء العناصر φ_k بالتدرج وذلك باعتبار بالترتيب التناقصي للقيم المطلقة للقيم الذاتية الموافقة لها:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots$$

لإنشاء العنصر φ_1، نعتبر العبارة $|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$ ونبرهن على أنها تبلغ على كرة الوحدة قيمتها العظمى. لتكن $\xi_1, \xi_2, \ldots$ متتالية بحيث $\|\xi_n\| = 1$ وَ:

$$|(A\xi, \xi_n)| \to S \quad , \quad n \to \infty$$

حيث:

$$S = \sup_{\|\xi\| \leq 1} |(A\xi, \xi)|$$

نفرض أن $S > 0$. بما أن كرة الوحدة متراصة بضعف في H، فإننا نستطيع استخراج متتالية جزئية متقاربة بضعف نحو عنصر η من المتتالية $\{\xi_n\}$. بالإضافة إلى ذلك، لدينا: $\|\eta\| \leq 1$، وحسب التوطئة 2 لدينا:

$$|(A\eta, \eta)| = S$$

نأخذ العنصر φ_1 مساوياً لِـ η. من الواضح أن $\|\eta\|$ تساوي 1 بالضبط. (ذلك أننا إذا فرضنا $\|\eta\| < 1$ وأخذنا: $\eta_1 = \frac{\eta}{\|\eta\|}$ نجد: $\|\eta_1\| = 1$ وَ $|(A\eta_1, \eta_1)| > S$، وهذا يناقض تعريف S.) بالإضافة إلى ذلك:

$$A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$$

ومنه:

$$|\lambda_1| = \frac{|(A\varphi_1, \varphi_1)|}{(\varphi_1, \varphi_1)} = |(A\varphi_1, \varphi_1)| = S$$

نفرض الآن بأن الأشعة الذاتية :

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$$

الموافقة للقيم الذاتية :

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$$

قد تم إنشاؤها . نرمز بِـ : $M(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ للفضاء الجزئي المولد عن الأشعة $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. ونعتبر التابعية :

$$|(A(\xi, \xi)|$$

المعرفة على مجموعة العناصر المنتمية إلى المجموعة :

$$M_n^{\perp} = H \ominus M(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$$

(أي العناصر المتعامدة على $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$) المحققة للشرط $\|\xi\| \leq 1$. إن المجموعة $M_n^{\perp}$ فضاء جزئي لامتغير بالنسبة لِـ A (لأن الفضاء : $M(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ لامتغير والمؤثر A قرين نفسه) . إذا طبقنا على $M_n^{\perp}$ الاستدلالات الواردة أعلاه ، نصل إلى القول أنه يوجد في $M_n^{\perp}$ شعاع ذاتي للمؤثر A (نرمز له بِـ φ_{n+1}) .

هناك احتمالان : 1) يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث $(A\xi, \xi) = 0$ في الفضاء الجزئي $M_{n_0}^{\perp}$ ؛ 2) $(A\xi, \xi) \equiv 0$ على $M_n^{\perp}$ مهما كان n .

يحوّل المؤثر A ، في الحالة الأولى ، الفضاء الجزئي $M_{n_0}^{\perp}$ إلى $\{0\}$ ، ومنه يتضح أن الفضاء الجزئي $M_{n_0}^{\perp}$ يتألف ، بأكمله ، من أشعة ذاتية توافق $\lambda = 0$. تصبح عندئذ جملة الأشعة الذاتية المشيدة $\{\varphi_n\}$ مؤلفة من عدد منته من العناصر .

أما في الحالة الثانية فنحصل ، بالإعتماد على التوطئة 3 ، على متتالية غير منتهية من الأشعة الذاتية $\{\varphi_n\}$ يوافق كل واحد منها قيمة ذاتية $\lambda_n \neq 0$. لنثبت أن $\lambda_n \to 0$. إن المتتالية $\{\varphi_n\}$ (بصفتها متتالية متعامدة ومتجانسة)

متقاربة بضعف نحو 0؛ ولهذا فإن متتالية العناصر $A\,\varphi_n = \lambda_n\,\varphi_n$ متقاربة نحو 0، بالنظيم، ومنه $|\lambda_n| = \|A\,\varphi_n\| \to 0$.

لتكن:

$$M^\perp = H \ominus M(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...) = \bigcap_n M_n^\perp \neq 0$$

إذا كان $\xi \in M^\perp$ وَ $\xi \neq 0$ فإن: $(A\xi, \xi) \leq \lambda_n \|\xi\|^2$ وذلك من أجل كل n، أي:

$$(A\xi, \xi) = 0$$

بفضل التوطئة 3 (باعتبار $\max|(A\xi, \xi)| = 0$) وبتطبيقها على $M^\perp$ نحصل على $A\xi = 0$، وهذا يعني أن المؤثر A يحوّل $M^\perp$ إلى $\{0\}$.

من إنشاء الجملة $\{\varphi_n\}$ يتضح بأن كل شعاع يمكن أن نكتبه على الشكل:

$$\xi = \sum c_k\,\varphi_k + \xi'$$

حيث $A\xi' = 0$، ومنه ينتج أن:

$$A\xi = \sum \lambda_k\, c_k\, \varphi_k$$

وهو المطلوب.

تلعب هذه النظرية دوراً هاماً في نظرية المعادلات التكاملية التي سنتناولها في الفصل التاسع.

ملاحظة. تعني النظرية السابقة أننا نستطيع، من أجل كل مؤثر قرين لنفسه ومتراص A في H، إيجاد أساس متعامد للفضاء H، يتألف من الأشعة الذاتية لهذا المؤثر. ذلك أننا نحصل على مثل هذا الأساس بإتمام جملة الأشعة $\{\varphi_n\}$ المنشأة في برهان النظرية بأساس متعامد كيفي للفضاء الجزئي $M^\perp$ الذي يحوله المؤثر A إلى $\{0\}$. بعبارة أخرى فإن النتيجة المحصل عليها تماثل النظرية الخاصة بتبسيط مصفوفة مؤثر قرين نفسه في فضاء إقليدي بعده منته، وردّه إلى شكل قطري ضمن أساس متعامد.

إن ذلك التبسيط غير ممكن عموماً إذا تعلق الأمر بمؤثرات، في فضـاء ذي n بعداً، غير قرينة لنفسها. لدينا بهذا الخصوص النظرية التالية :

كل تطبيق خطي في فضـاء بعده n يقبل على الأقل شعاعاً ذاتياً. من اليسير التأكد من عدم صحة هذه النتيجة، عموماً، من أجل المؤثرات المتراصة في فضـاء هيلبرتي. لرؤية ذلك، نعتبر مؤثراً A معرفاً في l_2 بالدستور :

$$Ax = A(x_1 , x_2, ..., x_n, ...) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_{n-1}}{n-1}, ...\right) \tag{8}$$

إن هذا المؤثر متراص (تأكد من ذلك!) لـكنه لايملك أية قيمة ذاتية (برهن على ذلك!).

تمرين. عين طيف المؤثر (8).

الفصل الخامس

القياس، التوابع القابلة للقياس، التكامل.

إن مفهوم القياس $\mu(A)$ لمجموعة A تعميم طبيعي للمفاهيم التالية:

1) الطول $l(\Delta)$ لقطعة مستقيمة Δ.

2) المساحة $S(F)$ لشكل مستوٍ F.

3) الحجم $V(G)$ لجسم G.

4) التزايد $\varphi(b)-\varphi(a)$ لتابع غير متناقص $\varphi(t)$ على مجال نصف مفتوح $[a, b)$.

5) تكامل تابع غير سالب، مأخوذ على ساحة من المستقيم العددي، أو من المستوى أو من الفضاء، الخ.

برز هذا المفهوم في نظرية التوابع لمتغير واحد ثم عمّ وشمل بصفة طبيعية نظرية الاحتمالات ونظرية الجمل الديناميكية والتحليل التابعي والعديد من فروع الرياضيات الأخرى.

نعرض في 1 § من هذا الفصل نظرية القياس في مجموعات المستوى انطلاقاً من مفهوم ساحة مستطيل. أما النظرية العامة للقياس فسنتناولها في 2 § وَ 3 §. باستطاعة القارئ أن يدرك بسهولة أن استدلالات 1 § ذات طابع عام ونجدها تتكرر في النظرية المجردة وذلك بعد إجراء تغييرات طفيفة.

§ 1. قياس مجموعات المستوى

1. قياس المجموعات الأولية.

نعتبر جماعة عناصرها $\mathfrak{G}$ مجموعات من المستوى (x, y)، كل واحدة منها معرفة بمتراجحة من الشكل:

$$a \leq x \leq b$$
$$a < x \leq b$$
$$a \leq x < b$$
$$a < x < b$$

ومتراجحة من الشكل:

$$c \leq y \leq d$$
$$c < y \leq d$$
$$c \leq y < d$$
$$c < y < d$$

حيث d, c, b, a أعداد كيفية. تسمى المجموعات التي تنتمي إلى هذه الجماعة مستطيلات. يمثل مستطيل مغلق معرف بالمتراجحتين:

$$a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d$$

اما مستطيلا (مع حافته) بالمفهوم المعتاد في حالة $a < b$ وَ $c < d$، وإما قطعة مستقيمة (إذا كان $a = b$ وَ $c < d$ أو $a < b$ وَ $c = d$)، وإما نقطة (إذا كان $a = b$ وَ $c = d$)، واما مجموعة خالية إذا كان $a > d$ أو $c > d$).
يمثل مستطيل مفتوح، حسب العلاقات الموجودة بين الأعداد a ، b ، c ، d مستطيلا بدون حافة، أو مجموعة خالية. نسمي كل مستطيل من الأنواع الباقية مستطيلاً نصف مفتوح، ويمكن أن يكون مستطيلاً بالمفهوم المعتاد بدون ضلع أو ضلعين أو ثلاثة أضلاع، كما يمكن أن يكون مجالاً مفتوحاً أو نصف مفتوح، أخيراً قد يكون هذا المستطيل مجموعة خالية.

نرمز بـ$\mathfrak{G}$ لمجموعة كل مستطيلات المستوى

نعرف قياس كل مستطيل طبقاً للمفهوم للمساحة. وعلى وجه التحديد لدينا:

أ) قياس المجموعة الخالية يساوي 0 .

ب) قياس مستطيل غير خال (سواء كان مفتوحاً أو مغلقاً أو نصف مفتوح) ومعرف بواسطة الأعداد a ، b ، c ، d ، هو تعريفاً :

$$(b - a)(d - c)$$

وهكذا يصبح كل مستطيل من $\mathfrak{G}$ ملحقاً بعدد $m(P)$ ، وهو قياسه ، يحقق الشرطين :

1) يأخذ القياس $m(P)$ قيماً حقيقية غير سالبة .

2) القياس $m(P)$ جمعي ، أي أنه إذا كان $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ وَ $P_i \cap P_j = \Phi$ من أجل $i \neq j$ فإن :

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

السؤال المطروح الآن هو كيف نعمم مفهوم القياس $m(P)$ المعرف من أجل المستطيلات ، ليشمل مجموعات أخرى مع الاحتفاظ بالخاصيتين (1) وَ (2)؟

نبدأ بتعميم هذا المفهوم إلى المجموعات الأولية . نقول عن مجموعة نقاط من المستوى إنها أولية إذا استطعنا تمثيلها على شكل اتحاد منته من المستطيلات غير المتقاطعة مثنى مثنى .

نحتاج في المستقبل إلى النظرية التالية .

نظرية 1. إن إتحاد وتقاطع وفرق وكذا الفرق التناظري لمجموعتين أوليتين هي كلها مجموعات أولية .

وهكذا وطبقاً للمصطلح المدخل في § 5 ، الفصل 1 ، تشكل المجموعات الأولية حلقة .

البرهان . من الواضح أن تقاطع مستطيلين مستطيل . إذن ، إذا كانت :

$$B = \bigcup_j Q_j \quad \text{وَ} \quad A = \bigcup_k P_k$$

مجموعتين أوليتين فإن تقاطعهما :

$$A \cap B = \bigcup_{k,j} (P_k \cap Q_j)$$

مجموعة أولية أيضاً .

من السهل أن نتأكد من أن الفرق بين مستطيلين مجموعة أولية . وبالتالي إذا طرحنا من مستطيل كيفي مجموعة أولية فإننا نحصل على مجموعة أولية (كتقاطع مجموعات أولية) . لتكن الآن A و B مجموعتين أوليتين ؛ يوجد ، بطبيعة الحال ، مستطيل P يحوي كل واحدة منهما . مما سبق ينتج إذن أن المجموعة :

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

أولية . ومنه يأتي ، اعتماداً على العلاقتين :

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B)$$
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

أن الفرق والفرق التناظري لمجموعتين أوليتين مجموعتان أوليتان . وهو المطلوب .

نعرّف الآن القياس $m'(A)$ لمجموعة أولية بالطريقة التالية : إذا كان :

$$A = \bigcup_k P_k$$

حيث P_k مستطيلات غير متقاطعة مثنى مثنى ، فإن :

$$m'(A) = \sum_k m(P_k)$$

لنثبت أن $m'(A)$ لايتعلق بطريقة كتابة A على شكل اتحاد مستطيلات .

نفرض أن :

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j$$

حيث P_k وَ Q_j مستطيلات وَ : $P_i \cap P_k = \Phi$: وَ $Q_i \cap Q_k = \Phi$ من أجل $i \neq k$. لما كان تقاطع مستطيلين هو أيضاً مستطيلاً ، ولما كان القياس جمعياً (من أجل المستطيلات) فإن :

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{kj} m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j)$$

بصفة خاصة نجد أن القياس m' هو القياس m الأول إذا كان A مستطيلاً .

من السهل أن نرى بأن قياس المجموعات الأولية المعرف بهذه الطريقة ، غير سالب وجمعي .

نثبت الآن خاصية هامة يتمتع بها قياس مجموعة أولية .

نظرية 2. إذا كانت A مجموعة أولية وَ $\{A_n\}$ جماعة منتهية أو قابلة للعد من المجموعات الأولية بحيث :

$$A \subset \bigcup_n A_n$$

فإن :

$$m'(A) \leq \sum_n m'(A_n) \qquad (1)$$

البرهان . من أجل كل $\varepsilon > 0$، وكل مجموعة أولية معطاة A ، توجد مجموعة أولية مغلقة $\bar{A}$ محتواة في A وتحقق الشرط :

$$m'(\bar{A}) \geq m'(A) - \varepsilon/2$$

(يكفي تعويض كل مستطيل من الـ k مستطيلاً P_i التي تكوّن A بمستطيل مغلق يقع داخل المستطيل P_i المعتبر ، ومساحته أكبر من $\left(m(P_i) - \frac{\varepsilon}{2k}\right)$.

من جهة أخرى ، من أجل كل A_n ، يمكن إيجاد مجموعة أولية مفتوحة $\tilde{A}_n$ تحوي A_n وتحقق الشرط :

$$m(\tilde{A}_n) \leq m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

من الواضح أن :

$$\bar{A} \subset \bigcup_n \tilde{A}_n$$

يمكن استخراج من $\{\tilde{A}_n\}$ (حسب توطئة هاين-بوريل) جماعة منتهية : $\tilde{A}_{n_1}, ..., \tilde{A}_{n_s}$ تغطي $\bar{A}$. ومنه :

$$m'(\bar{A}) \leq \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{ni})$$

(ولولاه لكان $\bar{A}$ مغطى بجماعة منتهية من المستطيلات ومساحته الكلية أصغر من $m'(\bar{A})$ ، وهذا مستحيل) . وبالتالي :

$$m'(A) \leq m'(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n} m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{n} m'(A_n) + \sum_{n} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n} m'(A_n) + \varepsilon$$

ومنه نحصل على (1) لأن $\varepsilon > 0$ كيفي .

تسمى خاصية القياس m' المثبتة ضمن النظرية 2 (وهي القائلة أن قياس مجموعة أصغر من مجموع قياسات المجموعات التي تغطيها ، سواء كان عدد المجموعات الأخيرة منتهياً أو قابلاً للعد) تسمى الجمعية الجزئية . وهي تستلزم خاصية ثانية تسمى الجمعية القابلة للعد أو σ - الجمعية التي تمثل فيما يلي :

نفرض أن المجموعة الأولية A تكتب على شكل اتحاد قابل للعد من المجموعات الأولية غير المتقاطعة A_n $(n = 1, 2, ...)$:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

عندئذ :

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

(أي أن قياس اتحاد قابل للعد من المجموعات غير المتقاطعة يساوي مجموع قياسات هذه المجموعات) .

ذلك أن خاصية الجمع تعطي من أجل كل N :

$$m'(A) \geq m'(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n)$$

بالانتقال إلى النهاية $(N \to \infty)$ نحصل على :

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

نلاحظ ، بفضل النظرية 2 أن المتراجحة السابقة تصدق أيضاً في الاتجاه الثاني . وبذلك تكون الجمعية القابلة للعد للقياس m' قد أثبتت .

ملاحظة. قد يفكر القارئ في الحصول على الجمعية القابلة للعد للقياس على المستوى ، بصفة آلية ، من جمعية هذا القياس بواسطة الانتقال إلى النهاية . والواقع أن ذلك خطأ (لأن برهان النظرية 2 الذي يستخدم توطئة هاين-بوريل ، يعتمد أساساً على الصلة الموجودة بين الخاصيات المترية والطوبولوجية لمجموعات المستوى) . سنرى خلال 2§ ، لدي دراسة القياس على مجموعات مجردة كيفية أن جمعية القياس لا تستلزم عموماً جمعيتها العدودية .

2. قياس لوبيغ على المستوى .

نلقى في الهندسة والتحليل التقليدي مجموعات أخرى ليست بمجموعات أولية . ولذا يبدو طبيعياً أن نحاول تعميم مفهوم القياس ، مع الاحتفاظ بخواصه الأساسية ، إلى مجموعات أخرى لاتكتب على شكل اتحادات منتهية لمستطيلات أضلاعها موازية لمحوري الاحداثيات .

كان هـ. لوبيغ قد قدم في بداية هذا القرن حلاً شبه كامل لهذه المسألة. يتطلب عرض نظرية قياس لوبيغ اعتبار اتحادات غير منتهية من المستطيلات إلى جانب الاتحادات المنتهية. وكيلا نصطدم منذ البداية بمجموعات ذات «قياسات غير منتهية» نقتصر بادئ ذي بدء على المجموعات المحتواة بأكملها في المربع $E = \{0 \leq x \leq 1 \; ; \; 0 \leq y \leq 1\}$.

نعرف على مجموعة هذه المجموعات تابعاً $\mu^*(A)$ بالطريقة التالية:

تعريف 1. نسمي قياساً خارجياً لمجموعة A العدد:

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup P_k} \sum_k m(P_k)$$

حيث يشمل الحد الأدنى كل تغطيات المجموعة A بواسطة جماعات منتهية أو قابلة للعد من المستطيلات.

ملاحظات. 1. إذا اعتبرنا في تعريف القياس الخارجي تغطيات مؤلفة في آن واحد من مستطيلات ومن مجموعات أولية كيفية (عددها منته أو قابل للعد) نحصل بطبيعة الحال، على نفس القيمة لِـ$\mu^*(A)$ لأن كل مجموعة أولية اتحاد منته من المستطيلات.

2. إذا كانت A مجموعة أولية فإن $\mu^*(A) = m'(A)$. ذلك لأننا إذا فرضنا بأن $P_1, \dots P_n$ مستطيلات تكوّن A فإن التعريف يعطي:

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i)$$

لما كانت المستطيلات P_i تغطي A، فإن $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = m'(A)$. لكن إذا كانت $\{Q_j\}$ جماعة منتهية أو قابلة للعد كيفية من المستطيلات المغطية لِـA نستنتج من النظرية 2 أن لدينا:

$m'(A) \leq \sum_j m(Q_j)$؛ وبالتالي $\mu^* = m'(A)$.

نظرية 3. إذا كان:

$$A \subset \bigcup_n A_n$$

حيث $\{A_n\}$ جماعة منتهية أو قابلة للعد من المجموعات فإن:

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n) \qquad (2)$$

بصفة خاصة إذا كان $A \subset B$ فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

البرهان. من تعريف القياس الخارجي ينتج من أجل كل A_n وجود جماعة منتهية أو قابلة للعد من المستطيلات $\{P_{nk}\}$ بحيث $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ وَ:

$$\sum_k m(P_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

حيث $\varepsilon > 0$ كيفي. حينئذ:

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$$

وَ:

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

ومنه تأتي نتيجة النظرية لأن ε كيفي.

نلاحظ أن النظرية 2 حالة خاصة من النظرية 3 لأن القياسين μ^* وَ m' متطابقان من أجل المجموعات الأولية.

تعريف 2. نقول عن مجموعة A أنها قابلة للقياس (بمفهوم لوبيغ)، إذا استطعنا، من أجل كل $\varepsilon > 0$، إيجاد مجموعة أولية B بحيث:

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon \qquad (3)$$

يسمى التابع μ^*، المعتبر من أجل المجموعات القابلة للقياس لا غير، قياس لوبينغ. ونرمز له بِـ μ.

ملاحظة. إن لتعريف مفهوم قابلية القياس السابق معنى حدسي بسيط. فهو يعني أن مجموعة تكون قابلة للقياس إذا استطعنا إيجاد مجموعات أولية تقترب من هذه النظرية «اقتراباً لامتناهياً في الدقة».

وهكذا عرفنا جماعة $\mathcal{M}_E$ مؤلفة من مجموعات تسمى المجموعات القابلة للقياس، وعرفنا على هذه الجماعة تابعاً μ يسمى قياس لوبيغ.

هدفنا الحالي هو إثبات النتيجتين التاليتين:

1. إن جماعة المجموعات القابلة للقياس $\mathcal{M}_E$ مغلقة بالنسبة للاتحادات والتقاطعات المنتهية أو القابلة للعد (أي أنها تمثل σ - جبراً، راجع التعريف في الفقرة 4، § 5، الفصل 1).

2. إن التابع μ σ - جمعي على $\mathcal{M}_E$.

تمثل النظريات الموالية مراحل في البرهان على النتيجتين السابقتين:

نظرية 4. إن متمم مجموعة قابلة للقياس مجموعة تقبل القياس وهي ناتجة من المساواة:

$$(E \setminus A) \Delta (E \setminus B) = A \Delta B$$

التي نحصل عليها بسهولة.

نظرية 5. إن اتحاد أو تقاطع عدد منته من المجموعات القابلة للقياس مجموعة قابلة للقياس.

البرهان. يكفي بطبيعة الحال إثبات ذلك من أجل مجموعتين. لتكن A_1 وَ A_2 مجموعتين قابلتين للقياس. يعني ذلك أن: من أجل كل $\varepsilon > 0$ توجد مجموعتان B_1 وَ B_2 بحيث:

$$\begin{cases} \mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon/2 \\ \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon/2 \end{cases}$$

بما أن :

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

فإن :

$$\mu^*[(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)] \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$$

لما كانت $B_1 \cup B_2$ مجموعة أولية، نستنتج إذن بأن $A_1 \cup A_2$ قابلة للقياس.

أما قابلية القياس لتقاطع مجموعتين قابلتين للقياس فتأتي من النظرية 4 ومن العلاقة :

$$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)] \tag{4}$$

نتيجة. إن الفرق والفرق التناظري لمجموعتين قابلتين للقياس هما مجموعتان قابلتان للقياس.

ينتج ذلك من النظريتين 4 وَ 5 ومن العلاقتين :

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (E \setminus A_2)$$
$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$$

نظرية 6. إذا كانت $A_1, ..., A_n$ مجموعات قابلة للقياس وغير متقاطعة مثنى مثنى فإن :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \tag{5}$$

للبرهان على هذه النظرية نحتاج إلى التوطئة التالية :

توطئة. من أجل كل مجموعتين A وَ B، لدينا :

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$$

برهان التوطئة. لما كان :

$$A \subset B \cup (A \Delta B)$$

ينتج من النظرية 3 أن :

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B)$$

إذا كان : $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$ فإن نتيجة التوطئة تأتي من المتراجحة السـ ـ .
أما في الحالة التي يكون فيها $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ فإن التوطئة تنتج من المتراجحة :

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B)$$

التي يمكن البرهان عليها بسهولة .

البرهان على النظرية 6. يكفي ، كما هو الحال في النظرية 5 ، أن نعتبر حالة مجموعتين . نختار $\varepsilon > 0$ كيفياً ومجموعتين أوليتين B_1 وَ B_2 بحيث :

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon \tag{6}$$

$$\mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon \tag{7}$$

نضع $A = A_1 \cup A_2$ وَ $B = B_1 \cup B_2$. إن المجموعة A تقبل القياس حسب النظرية 5 . بما أن المجموعتين A_1 وَ A_2 غير متقاطعتين فإن :

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

وبالتالي :

$$m'(B_1 \cap B_2) \leq 2\varepsilon \tag{8}$$

بالاعتماد على التوطئة والمتراجحتين (6) و (7) ينتج :

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| < \varepsilon \tag{9}$$

وَ :

$$|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon \tag{10}$$

إن المجموعات الأولية جمعية ، مثل القياس ، ولذا ينتج من (8) ، (9) ، (10) :

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon$$

وإذا لاحظنا أن :

$$A \Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

نحصل على :

$$\mu^*(A) \geq m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq m'(B) - 2\varepsilon \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon$$

بما أننا نستطيع اختيار $\varepsilon > 0$ صغيراً بكفاية فإن :

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

ثم إن المتراجحة السابقة في الاتجاه الثاني صحيحة دوماً (حسب النظرية 3). نحصل أخيراً على :

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

نلاحظ أن المجموعات A, A_2, A_1 قابلة للقياس، ولذا يمكن استبدال μ^* بـ μ. انتهى البرهان.

ينتج من هذه النظرية أن لدينا المساواة التالية من أجل كل مجموعة قابلة للقياس A :

$$\mu(E \backslash A) = 1 - \mu(A)$$

نظرية 7. إن اتحاد وتقاطع جماعة قابلة للعد من المجموعات القابلة للقياس مجموعتان قابلتان للقياس.

البرهان. لتكن :

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

جماعة قابلة للعد من المجموعات القابلة للقياس، ولتكن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
نضع : $A'_n = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. من الواضح أن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ والمجموعات A'_n غير متقاطعة مثنى مثنى. من النظرية 5 ونتيجتها يتبين أن كل المجموعات

A'_n تقبل القياس. من النظرية 6 وتعريف القياس الخارجي ينتج أن لدينا العلاقة التالية من أجل كل n:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leq \mu^*(A)$$

ومنه يأتي أن السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n)$$

متقاربة، وبالتالي، من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد N بحيث:

$$\sum_{n>N} \mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

بما أن المجموعة $C = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ تقبل القياس (بصفتها اتحادا منتهياً لمجموعات قابلة للقياس) توجد مجموعة أولية B بحيث:

$$\mu^*(C \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

ثم إن:

$$A \Delta B \subset (C \Delta B) \cup \left(\bigcup_{n>N} A'_n\right)$$

ولذا ينتج من (11) وَ (12) أن:

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

أي أن المجموعة A تقبل القياس.

لما كانت متممات المجموعات القابلة للقياس مجموعات تقبل القياس فإن نتيجة النظرية الخاصة بالتقاطع تأتي من المساواة:

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

تعتبر النظرية 7 تعزيزاً للنظرية 5 . أما النظرية الموالية فتعزز النظرية 6 .

نظرية 8. إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية مجموعات قابلة للقياس وغير متقاطعة مثنى مثنى وَ $A = \bigcup_n A_n$ ، فإن :

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$$

البرهان. من النظرية 6 يأتي، من أجل كل N :

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu(A)$$

بالانتقال إلى النهاية $N \to \infty$ نحصل على :

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{13}$$

من جهة أخرى، وحسب النظرية 3 :

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{14}$$

نستنتج من (13) وَ (14) القضية المطروحة.

سميت خاصية القياس المثبتة في النظرية 8، الجمعية القابلة للعد أو σ - الجمعية ، وهي تستلزم الخاصية التالية للقياس المسماة خاصية الاستمرار .

نظرية 9. إذا كانت $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ متتالية متناقصة من المجموعات القابلة للقياس وَ $A = \bigcap_n A_n$ ، فإن :

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

البرهان. يكفي أن نعتبر الحالة التي يكون فيها $A = \Phi$ ، لأن الحالة العامة تُستَنْتَج من الحالة السابقة بتعويض A_n بِـ $A_n \backslash A$.

لدينا :

$$A_1 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_3) \cup \ldots$$

وَ :

$$A_n = (A_n \backslash A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \backslash A_{n+2}) \cup \ldots$$

إن حدود هذه الإتحادات غير متقاطعة مثنى مثنى، نستنتج من الجمعية القابلة للعد أن :

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k \backslash A_{k+1}\right) \tag{15}$$

وَ :

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu\left(A_k \backslash A_{k+1}\right) \tag{16}$$

لما كانت السلسلة (15) متقاربة فإن باقيها (16) يؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى ∞ . وهكذا :

$$\mu(A_n) \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

وهو المطلوب .

نتيجة . إذا كانت $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ متتالية متزايدة من المجموعات القابلة للقياس وَ $A = \bigcup_n A_n$ فإن :

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

للبرهان على هذه النتيجة يكفي أن ننتقل من المجموعات A_n إلى متمماتها واستعمال النظرية 9 .

نشير أيضاً إلى القضية البديهية والهامة في نفس الوقت :

إذا كانت A مجموعة، قياسها الخارجي منعدم فإنها تقبل القياس . يكفي أن نضع $B = \Phi$ وعندئذ :

$$\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A \Delta \Phi) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon$$

وهكذا عممنا مفهوم القياس من المجموعات الأولية إلى جماعة من المجموعات $\mathcal{M}_E$ مغلقة بالنسبة للإتحادات والتقاطعات القابلة للعد، أي أن $\mathcal{M}_E$ تتمتع ببنية σ – الجبر. إن القياس المشيّد هنا σ – جمعي على هذه الجماعة. تسمح النظريات السابقة باعطاء الوصف التالي لجماعة المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ.

يمكن كتابة كل مجموعة مفتوحة تنتمي إلى E على شكل اتحاد منته أو قابل للعد من المستطيلات المفتوحة، أي من المجموعات القابلة للقياس؛ وبالتالي ينتج من النظرية 7 أن كل المجموعات المفتوحة قابلة للقياس. أما المجموعات المغلقة فهي متممة لمجموعات مفتوحة، وعليه فهي أيضاً قابلة للقياس. بالاعتماد على النظرية 7، نلاحظ أن كل المجموعات التي نحصل عليها بواسطة اتحادات أو تقاطعات منتهية أو قابلة للعد، لمجموعات مفتوحة أو مغلقة، مجموعات تقبل القياس. لكنه بالإمكان أن نثبت بأن هناك مجموعات أخرى تقبل القياس.

3. تكملات وتعميات.

اعتبرنا سابقاً المجموعات المحتواة في مربع الوحدة $E = \{0 \leq xy \leq 1\}$ لا غير. إلاّ أن هذا القيد ليس ضرورياً ويمكن رفعه بسهولة وذلك بالطريقة التالية مثلاً. نمثل المستوى بأكمله بواسطة إتحاد المربعات نصف المفتوحة:

$$E_{nm} = \{n < x \leq n+1 \ , \ m < y \leq m+1\}$$

(حيث n وَ m عددان صحيحان)؛ نقول عن مجموعة نقاط A من المستوى إنها تقبل القياس، إذا كان تقاطعها $A_{nm} = A \cap E_{nm}$ مع كل مربع E_{nm} قابلاً للقياس. أما قياس A فهو تعريفاً:

$$\mu(A) = \sum_{n,m} \mu\left(A_{nm}\right)$$

تكون السلسلة السابقة إما متقاربة نحو عدد منته وإما متباعدة نحو: $+\infty$ ومنه نرى أنه بالإمكان أن يأخذ القياس μ قيما غير منتهية. تمتد كل الخواص التي يتمتع بها القياس والمجموعات القابلة للقياس، المثبتة أعلاه، لتشمل بصورة بديهية، الحالة الراهنة. علينا فقط أن نشير إلى أن اتحاداً قابلاً للعد من المجموعات القابلة للقياس وذات قياس منته، يمكن أن يكون له قياس غير منته. نرمز لجماعة كل المجموعات القابلة للقياس في المستوى بـ: $\mathcal{U}$.

عرضنا في هذا البند كيفية إنشاء قياس لوبيغ بالنسبة لمجموعات المستوى. يمكننا بطريقة مماثلة إنشاء قياس لوبيغ على المستقيم وفي الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة، وبصفة عامة، في فضاء إقليدي ذي بعد كيفي n. وطريقة الإنشاء في جميع هذه الحالات هي نفسها: ننطلق من القياس المعرف في البداية على جماعة مجموعات بسيطة (المستطيلات في المستوى، والمجالات المفتوحة (a, b) والمغلقة $[a, b]$ ونصف المفتوحة $(a, b]$، $[a, b)$ في المستقيم، الخ.) ثم نعرف القياس من أجل الإتحادات المنتهية لمثل هذه المجموعات، وأخيراً نعممها لتشمل مجموعات أخرى تسمى المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ.

نلاحظ أن تعريف قابلية القياس يُعَمَّم، بدون أي تغيير، إلى مجموعات أي فضاء مهما كان بعده.

عند إدخال مفهوم قياس لوبيغ، كنا انطلقنا من المفهوم المعتاد للمساحة. يعتمد الانشاء المماثل في حالة بعد واحد على مفهوم طول مجال (مفتوح أو مغلق أو نصف مفتوح). إلاّ أننا نستطيع في هذه الحالة إدخال مفهوم القياس بطريقة أخرى أعم من الطريقة السابقة.

ليكن $F(t)$ تابعاً غير متناقص ومستمر على اليسار في المستقيم العددي.

نضع:

$$m(a, b) = F(b) - F(a + 0)$$

$$m[a, b] = F(b + 0) - F(a)$$

$$m(a, b] = F(b + 0) - F(a + 0)$$

$$m[a, b) = F(b) - F(a)$$

من السهل أن نرى بأن تابع المجال m المعرف بهذه الطريقة غير سالب وجمعي إنطلاقاً من هذا التابع، وبواسطة استدلالات مماثلة لتلك التي استخدمناها ضمن هذا البند، نستطيع إنشاء قياس $\mu_F(A)$ بحيث تكون الجماعة $\mathcal{U}_F$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس بمفهوم القياس $\mu_F(A)$، مغلقة بالنسبة للإتحادات والتقاطعات القابلة للعد، وبحيث يكون القياس μ_F ذاته σ – جميعاً. تتعلق الجماعة $\mathcal{U}_F$، عموماً، باختيار التابع F.

إلا أن مهما كان هذا الاختيار فإن المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة، وبالتالي، اتحاداتها وتقاطعاتها القابلة للعد تقبل كلها القياس.

يسمى كل قياس مشيّد بواسطة مثل هذا التابع F، قياس لوبيغ–ستيلجاس (Lebesgue-Stieltjes). بصفة خاصة فإن التابع $F(t) = t$ يوافق قياس لوبيغ المعتاد على المستقم.

إذا أخذ القياس μ_F القيمة 0 من أجل كل مجموعة قياسها بمفهوم لوبيغ μ منعدم، نقول عن القياس μ_F إنه مستمر مطلقاً (بالنسبة لِـμ). إذا كان القياس μ_F مركّزاً بأكمله في مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط (يحدث ذلك أحيانا في الحالة التي تكون فيها مجموعة قيم F منتهية أو قابلة للعد) نقول أنه غير متصل. نقول عن القياس μ_F إنه شاذ إذا كان منعدما من أجل كل مجموعة مكونة من عنصر واحد ووجدت مجموعة قياسها بمفهوم لوبيغ منعدم ومتممها له قياس μ_F منعدم.

نستطيع أن نثبت بأن كل قياس μ_F يساوي مجموع ثلاثة قياسات، أحدها مستمر مطلقاً وثانيها غير متصل وثالثها شاذ. سنعود إلى الكلام من جديد عن قياس لوبيغ–ستيلجاس ضمن الفصل الموالي.

وجود المجموعات غير القابلة للقياس. كنا رأينا بأن المجموعات القابلة للقياس حسب لوبيغ جد عامة. من الطبيعي إذن أن نتساءل عن وجود مجموعات غير قابلة للقياس. لنثبت وجود مثل هذه المجموعات. إن أبسط طريقة للحصول عليها هي إنشاؤها على دائرة مزودة بقياس لوبيغ الخطي.

لتكن C دائرة طول محيطها 1 وليكن α عدداً غير ناطق كيفي. نضع في نفس الصف كل نقاط الدائرة C التي يمكن أن تتطابق عند إدارة C بزاوية

هذه الصفوف يحوي مجموعة قابلة للعد من النقاط. نختار نقطة في كل صف من هذه الصفوف ونكوّن بها مجموعة نرمز لها بـ Φ_0. إن Φ_0 مجموعة غير قابلة للقياس. نرمز بـ Φ_n للمجموعة التي نحصل عليها بإدارة Φ_0 بزاوية $n\alpha\pi$. من الواضح أن كل المجموعات Φ_n غير متقاطعة مثنى مثنى، وأن إتحادها يساوي الدائرة C بأكملها. لو كانت المجموعة Φ_0 قابلة للقياس لكان الأمر كذلك بالنسبة لكل المجموعات Φ_n التي حصلنا عليها بواسطة دوران لِـ Φ_0.
وبما أن:

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \quad , \; \Phi_n \cap \Phi_m = \Phi \quad , \; n \neq m$$

فإن σ – جمعية القياس تعطي:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(\Phi_n) \tag{17}$$

لكن المجموعات التي نحصل عليها بواسطة دوران لمجموعة معينة، لها نفس القياسات، لذا إذا فرضنا بأن Φ_0 تقبل القياس فيجب أن يكون:

$$\mu(\Phi_n) = \mu(\Phi_0)$$

وهذا يعني أن المساواة (17) مستحيلة لأن مجموع السلسلة الواردة في (17) منعدم في حالة $\mu(\Phi_0) = 0$ وهو غير منته إذا كان $\mu(\Phi_0) > 0$. وهكذا يتبين أن المجموعة Φ_0 (وبالتالي كل المجموعات Φ_n) لا تقبل القياس.

§ 2. المفهوم العام للقياس. تمديد قياس نصف حلقة إلى حلقة. الجمعية و σ - الجمعية[1].

1. تعريف القياس.

كنا أنشأنا قياس مجموعات المستوى انطلاقاً من قياس (مساحة) مستطيل ثم مددناه إلى مجموعات أخرى. لكن الذي استخدمناه في ذلك الإنشاء لم تكن مساحة المستطيل بعبارتها الصريحة بل اعتمدنا على خاصياتها العامة لاغير. وعلى وجه التحديد فقد اعتمدنا لدى تمديد القياس من المستطيلات إلى المجموعات الأولية على الخاصية القائلة إن المساحة تابع مجموعة غير سالب وجمعي، وأن مستطيلات المستوى تشكل نصف حلقة. لإنشاء قياس لوبيغ على المستوى استخدمنا بالإضافة إلى ذلك، الجمعية القابلة للعد.

يتبين مما قلناه آنفاً أنه بالإمكان التعبير عن إنشاء § 1 من أجل مجموعات المستوى، بشكل مجرد وعام جداً. وبذلك يتسع ميدان تطبيقها اتساعاً كبيراً. هذا هو الموضوع الذي سنتناوله ضمن البندين المواليين.

نبدأ بإدخال التعريف الأساسي التالي:

تعريف 1. يسمى تابع مجموعة $\mu(A)$ قياساً، إذا كانت:

1) ساحة التعريف $\mathfrak{S}_\mu$ للتابع $\mu(A)$ نصف حلقة مجموعات،

2) قيم التابع $\mu(A)$ حقيقية وغير سالبة.

3) التابع $\mu(A)$ جمعياً، أي أن لدينا المساواة:

---

(1) نستخدم في هذا البند وفي المستقبل مفاهيم ونتائج § 5 الفصل 1 بشكل مكثف.

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

من أجل كل تحليل لمجموعة $A \in \mathcal{G}_\mu$ إلى اتحاد منته.

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

من المجموعات (غير المتقاطعة مثنى مثنى) $A_k \in \mathcal{G}_\mu$.

ملاحظة. من التحليل $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ يأتي $\mu(\varnothing) = 2\mu(\varnothing)$، ومنه $\mu(\varnothing) = 0$.

2. تمديد قياس نصف حلقة إلى الحلقة المولدة عنها.

لدى إنشاء قياس مجموعات المستوى بدأنا بتعميم القياس من المستطيلات إلى المجموعات الأولية، أي إلى الإتحادات المنتهية من المستطيلات غير المتقاطعة مثنى مثنى. نعتبر الآن إنشاء مماثلاً ومجرداً. نقدم أولاً التعريف التالي:

تعريف 2. يسمى القياس μ امتداداً للقياس m إذا كان $\mathcal{G}_m \subset \mathcal{G}_\mu$ وكان:

$$\mu(A) = m(A)$$

من أجل كل $A \in \mathcal{G}_m$.

هدفنا في هذه الفقرة هو البرهان على النظرية التالية:

نظرية 1. من أجل كل قياس $m(A)$ معطى على نصف حلقة $\mathcal{G}_m$، يوجد امتداد وحيد $m'(A)$ ساحة تعريفه هي الحلقة $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ (أي الحلقة الأصغرية المولدة عن $\mathcal{G}_m$).

البرهان. من أجل كل مجموعة $A \in \mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$، يوجد تحليل من الشكل:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \qquad (B_k \in \mathcal{G}_m, B_k \cap B_l = \varnothing, k \neq l) \tag{1}$$

(راجع النظرية 3.§5 ، الفصل 1) . نضع تعريفاً :

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) \tag{2}$$

نرى بسهولة أن الـكمية $m'(A)$ ، المعرفة بواسطة المسـاواة (2) ، لا تتعلق باختيار التحليل (1) . لرؤية ذلك نعتبر تحليلين :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j \ , \ B_i \in \mathcal{G}_m \ , \ C_j \in \mathcal{G}_m$$

بما أن كل التقاطعات $B_i \cap C_j$ تنتمي إلى $\mathcal{G}_m$ بفضل جمعية القياس m ، فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{r} m(C_j)$$

وهو المطلوب .

من الواضح أن التابع $m'(A)$ ، المعرف بالمسـاواة (2) غير سـالب وجمعي . وبذلك يتم البرهان على وجود امتداد m' للقياس m ، إلى الحلقة $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$.

لإثبات وحدانية هذا الامتداد ، نلاحظ حسب تعريف الامتداد أنه إذا كان $A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ ، حيث B_k مجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى من $\mathcal{G}_m$ ، فإن :

$$\tilde{m}\ (A) = \sum_{k} \tilde{m}\ (B_k) = \sum_{k} m(B_k) = m'(A)$$

وهـذا من أجل كل إمتداد $\tilde{m}$ للقياس m إلى الحلقـة $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ ، أي أن القياس $\tilde{m}$ والقياس m' المعرف بِـ(2) متطابقان .

أنتهى البرهان .

الواقع أننا كررنا هنا ، بلغة مجردة ، الـكيفية التي استخدمناها في 1§ لتمديد القياس من المستطيلات إلى المجموعات الأولية . من جهة أخرى ، فإن الحلقة الأصغرية المولدة عن نصف حلقة المستطيلات تتألف ، بالضبط ، من المجموعات الأولية .

من جمعية وعدم سلبية القياس نستنتج الخاصيات شبه البديهية (والهامة في نفس الوقت) التالية :

نظرية 2. ليكن m قياساً معرفاً على حلقة كيفية $\mathcal{R}_m$ وَ : $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات تنتمي إلى $\mathcal{R}_m$. عندئذ :

I. إذا كان $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ وَ $A_i \cap A_j = \varnothing$ ، فإن :

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A)$$

II. إذا كان $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset A$ فإن :

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geq m(A)$$

بصفة خاصة ، إذا كان $A' \supset A$ ، $\mathcal{R} \ni A'$ ، فإن $m(A) \leq m(A')$.

ذلك أنه إذا كانت المجموعات $A_1, \dots, A_n$ غير متقاطعة ومحتواة في A ، نجد بفضل جمعية القياس أن :

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) + m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

لما كان $0 \leq m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ فإن الخاصية I محققة . من جهة أخرى ، مهما كان A_1 وَ A_2 في $\mathcal{R}_m$ فإن :

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2) \leq m(A_1) + m(A_2)$$

ثم يأتي بالتدريج :

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

أخيراً، ودائماً بفضل جمعية القياس، نستنتج من $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ أن:

$$m(A) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) - m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus A\right) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

ومنه تأتي الخاصية II بفضل المتراجحة السابقة.

أثبتنا الخاصيتين I وَ II من أجل قياس معرف على حلقة مجموعات. لكن إذا كان قياس معطى على نصف حلقة ثم مددناه إلى حلقة فإن قياس المجموعات المنتمية إلى نصف الحلقة الأولى لاتتغير. ولذا تبقى الخاصيتان I وَ II صالحتين أيضاً من أجل القياسات المعرفة على نصف حلقة.

3. σ - الجمعية.

نضطر في بعض مسائل التحليل إلى اعتبار اتحادات غير منتهية إلى جانب الاتحادات القابلة للعد من المجموعات. ولذا من الطبيعي أن نستبدل شرط الجمعية الذي فرضناه على القياس (راجع التعريف 1) بشرط أقوى وهو شرط σ - الجمعية.

تعريف 3. نقول عن القياس m إنه جمعي عدودياً أو σ - جمعي إذا تحققت المساواة:

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

مهما كانت المجموعات $A_1, A_2 ..., A_n, ...$ المنتمية إلى ساحة تعريف القياس m والمحققة للشروط:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ , \ A_i \cap A_j = \emptyset \ , \ i \neq j$$

إن قياس لوبيغ على المستوى المشيّد في § 1 σ -جمعي (النظرية 8). نستطيع إنشاء مثال لقياس σ -جمعي ذي طبيعة أخرى وذلك بالطريقة التالية. لتكن مجموعة قابلة للعد كيفية:

$$X = \{x_1, x_2, ...\}$$

وأعداداً $P_n \geq 0$ بحيث :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$$

نعتبر أن المجموعات الجزئية من المجموعة X كلها مجموعات قابلة للقياس وذلك بوضع، من أجل كل $A \subset X$:

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} P_n$$

من السهل أن نتأكد من أن $m(A)$ قياس σ - جمعي، وبالإضافة إلى ذلك : $m(X) = 1$. يَبرز هذا المثال بصفة طبيعية في العديد من المسائل الخاصة بنظرية الاحتمالات.

لنورد مثالاً لقياس جمعي ليس بِـ σ - جمعي. لتكن X مجموعة كل الأعداد الناطقة في قطعة المستقيم $[0, 1]$. نفرض أن $\mathcal{G}_m$ مؤلف من تقاطعات X مع كل المجالات المفتوحة (a, b) والمغلقة $[a, b]$ ونصف المفتوحة $(a, b]$ وَ $[a, b)$ للقطعة $[0, 1]$. من السهل أن نرى بأن $\mathcal{G}_m$ نصف حلقة. من أجل كل مجموعة A_{ab} منتمية إلى $\mathcal{G}_m$، نضع :

$$m(A_{ab}) = b - a$$

إن هذا القياس جمعي لكنه غير σ - جمعي لأن $m(X) = 1$ وَ X اتحاد قابل للعد من النقاط كل واحدة منها لها قياس منعدم.

نفرض أن القياسات المعتبرة هنا وفي الفقرة الموالية، σ - جمعية.

نظرية 3. إذا كان القياس m، المعرف على نصف الحلقة $\mathcal{G}_m$، σ - جمعياً فإن القياس μ المحصل عليه بتمديده إلى الحلقة $R(\mathcal{G}_m)$ σ - جمعي أيضاً.

البرهان. لتكن:

$$A \in \mathcal{R}(\mathcal{G}_m) \quad , \quad B_n \in \mathcal{R}(\mathcal{G}_m) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$B_s \cap B_r = \varnothing \quad , \quad s \neq r$$

وَ:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

توجد عندئذ مجموعات A_j وَ B_{ni} من $\mathcal{G}_m$ بحيث:

$$A = \bigcup_j A_j \quad , \quad B_n = \bigcup_i B_{ni} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

مع العلم أن المجموعات الواردة في الطرفين الثانيين من العلاقتين السابقتين غير متقاطعة مثنى مثنى والإتحادات منتهية (النظرية 3، § 5، الفصل 1).

نضع $C_{nij} = B_{ni} \cap A_j$. من السهل أن نرى بأن المجموعات C_{nij} غير متقاطعة مثنى مثنى وبأن:

$$A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_i C_{nij}$$

$$B_{ni} = \bigcup_j C_{nij}$$

إذن، ولما كان القياس m على $\mathcal{G}_m$ σ - جمعية فإن:

$$m(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i m(C_{nij}) \tag{3}$$

$$m(B_{ni}) = \sum_j m(C_{nij}) \tag{4}$$

من تعريف القياس μ على $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ يأتي:

$$\mu(A) = \sum_j m(A_j) \tag{5}$$

$$\mu(B_n) = \sum_i m(B_{ni}) \tag{6}$$

من العلاقات (3) – (6) ينتج :

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

(أن المجاميع بالنسبة للدليلين i وَ j منتهية هنا، والسلاسل بالنسبة لِـ n متقاربة) .

لنثبت الآن الخواص الأساسية التالية للقياسات σ – الجمعية (التي تمثل تعميما إلى حالة اتحاد قابل للعد من المجموعات للخواص الواردة في النظرية 2) . بما أن الجمعية القابلة للعد لقياس تبقى قائمة، كما أثبتنا، عندما يمتد هذا القياس من نصف حلقة إلى الحلقة الموافقة لها، يمكن أن نفرض منذ البداية أن القياس معطى على حلقة $\mathcal{R}$.

نظرية 4. ليكن m قياساً σ – جميعاً، وَ A وَ $A_1 ..., A_n, ...$ مجموعات تنتمي إلى الحلقة $\mathcal{R}$. عندئذ :

I_σ . إذا كان $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ وَ $A_i \cap A_j = \varnothing$ من أجل $i \neq j$، لدينا :

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A)$$

II_σ . (الجمعية الجزئية القابلة للعد) . إذا كان : $A \subset \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ لدينا :

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_k) \geq m(A)$$

البرهان . إذا كانت كل المجموعات A_k غير متقاطعة مثنى مثنى ومحتواة في A ، لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A)$$

مهما كان n وهذا بفضل الخاصية I (النظرية 2) .

ننتقل هنا إلى النهاية ($n \to \infty$)، فنحصل على الخاصية الأولى من النظرية .

نبرهن الآن على الخاصية الثانية . بما أن $\mathcal{R}$ حلقة فإن المجموعات :

$$B_n = (A_n \cap B_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

تنتمي إلى $\mathcal{R}$. وبما أن :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad , \quad B_n \subset A_n$$

والمجموعات B_n غير متقاطعة مثنى مثنى فإن :

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

ملاحظة . نلاحظ أن الخاصية I_σ الواردة في النظرية السابقة لاتعتمد على الجمعية القابلة للعد للقياس المعتبر ؛ ولذا فهي تقوم أيضاً من أجل قياسات جمعية كيفية . أما الخاصية II_σ فهي تستخدم أساساً الجمعية القابلة للعد للقياس . فقد رأينا في المثال الوارد أعلاه حول قياس جمعي وغير σ – جمعي أن المجموعة X لها قياس كلي يساوي 1 ومغطاة بجماعة قابلة للعد من مجموعات مؤلفة من عنصر واحد قياس كل واحدة منها منعدم . بالإضافة إلى ذلك ، من اليسير أن نتأكد من أن الخاصية II_σ تكافىء ، في الواقع ، الجمعية القابلة للعد . لرؤية ذلك نعتبر قياساً كيفياً μ معرفاً على نصف حلقة $\mathcal{G}$. لتكن $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ مجموعات من Z بحيث $A = \bigcup_k A_k$ ، حيث A_k

مجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى. حينئذ وبفضل الخاصية I_α (الصادقة، كما رأينا، من أجل كل قياس) لدينا:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$$

إذا تمتع μ بالخاصية II_σ فإن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \mu(A)$$

(ذلك لأن المجموعات A_k تشكل تغطية لِـ A)، وبالتالي:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$$

يكون التأكد من الجمعية الجزئية القابلة للعد لقياس (الخاصية II_σ) أكثر سهولة، في معظم الأحيان، من البرهان مباشرة على جمعيته القابلة للعد.

§ 3. تمديد قياس حسب لوبيغ

1. التمديد حسب لوبيغ لقياس معرف على نصف حلقة ذات وحدة.

إذا كان m قياساً على نصف حلقة $\mathcal{G}_m$ يتمتع فقط بخاصية الجمعية (ولا يتمتع بخاصية σ - الجمعية) فإن تمديده إلى الحلقة $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ يكاد يكون وحيداً أي أن إمكانية توسيع هذا القياس من نصف الحلقة $\mathcal{G}_m$ إلى جماعة مجموعات أوسع من $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ أمر عسير. أما إذا كان القياس المعتبر σ - جمعياً، فإننا نستطيع توسيعها من $\mathcal{G}_m$ إلى جماعة مجموعات أوسع بكثير من الحلقة $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$، يمكن

اعتبارها إلى حد ما أعظمية. نستطيع القيام بذلك بالطريقة المسماة «كيفية التمديد حسب لوبيغ». نعتبر في البداية التمديد حسب لوبيغ لقياس معطى على نصف حلقة بوحدة. سندرس الحالة العامة في الفقرة الموالية.

ليكن m قياساً σ - جمعياً معطى على نصف حلقة مجموعات $\mathcal{G}_m$ وحدتها E. نعرف على الجماعة $\mathfrak{U}$ المؤلفة من كل أجزاء المجموعة E تابعاً $\mu^*(A)$، يسمى قياساً خارجياً لِـ A، بالطريقة التالية.

تعريف 1. القياس الخارجي للمجموعة $A \subset E$ هو العدد:

$$\mu^*(A) = \text{Inf} \sum_n m(B_n) \qquad (1)$$

حيث يشمل الحد الأدنى كل تغطيات المجموعة A بواسطة جماعات منتهية أو قابلة للعد من المجموعات $B_n \in \mathcal{G}_m$.

حيث يشمل الحد الأدنى كل تغطيات المجموعة A بواسطة جماعات منتهية أو قابلة للعد من المجموعات $B_n \in \mathcal{G}_m$.

تلعب الخاصية التالية التي يتمتع بها القياس الخارجي دوراً أساسياً في كل مراحل الإنشاء الذي سنقوم به بعد حين.

نظرية 1. (الجمعية الجزئية القابلة للعد). إذا كانت:

$$A \subset \bigcup_n A_n$$

حيث $\{A_n\}$ جماعة منتهية أو قابلة للعد من المجموعات فإن:

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$$

إن البرهان على هذه القضية هو بالضبط برهان النظرية 3، § 1.

تعريف 2. نقول عن مجموعة A إنها قابلة للقياس (بمفهوم لوبيغ) إذا تمكنا من أجل كل $\varepsilon > 0$، من إيجاد مجموعة $B \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}_m)$ بحيث:

$$\mu^*(A \, \Delta \, B) < \varepsilon$$

يسمى التابع μ^*، المعتبر على المجموعات القابلة للقياس، قياس لوبيغ (أو، قياساً، باختصار) ونرمز له بـ μ.

من الواضح أن كل مجموعات $\mathfrak{G}_m$ وَ $\mathcal{R}(\mathfrak{G}_m)$ قابلة للقياس. زيادة على ذلك، إذا كان $A \in \mathfrak{G}_m$ فإن:

$$\mu(A) = m(A)$$

نثبت هذه المساواة بالضبط كما هو وارد بخصوص مجموعات المستوى. من المساواة:

$$A_1 \Delta A_2 = (E \setminus A_1) \Delta (E \setminus A_2)$$

يأتي أنه إذا كانت المجموعة A قابلة للقياس فإن الأمر كذلك بالنسبة لمتمم A.

نبرهن الآن على الخاصيات الأساسية للمجموعات القابلة للقياس والخاصيات الأساسية لقياس لوبيغ الملحق بهذه المجموعات.

نظرية 2. إن المجموعة $\mathcal{M}$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس تشكل حلقة.

البرهان. بما أن لدينا دوماً:

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$$

وَ:

$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)]$$

يكفي أن نبرهن على أنه إذا كان $A_1 \in \mathcal{M}$ وَ $A_2 \in \mathcal{M}$ فإن:

$$A = A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{M}$$

نفرض أن A_1 وَ A_2 قابلان للقياس؛ يوجد عندئذ $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m) \ni B_1$ وَ $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m) \ni B_2$ بحيث :

$$\mu^*(A_1 \,\Delta\, B_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu^*(A_2 \,\Delta\, B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

نضع : $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m) \ni B = B_1 \setminus B_2$ ونستعمل العلاقة :

$$(A_1 \setminus A_2) \,\Delta\, (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \,\Delta\, B_1) \cup (A_2 \,\Delta\, B_2)$$

فنحصل على :

$$\mu^*(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$$

بما أن $\varepsilon > 0$ صغير بالشكل الذي نريده، نستنتج أن المجموعة A تقبل القياس .

ملاحظة . من الواضح أن E هي وحدة الحلقة $\mathcal{M}$ وعليه فهي جبر مجموعات .

نظرية 3. إن التابع $\mu(A)$ المعرف على الجماعة $\mathcal{M}$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس تابع جمعي .

إن البرهان على هذه النظرية هو بالضبط برهان النظرية 6، 1 § .

نظرية 4. إن التابع $\mu(A)$ المعرف على الجماعة $\mathcal{M}$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس تابع σ - جمعي .

البرهان . لتكن $A, A_1, A_2, \ldots$ عناصر من $\mathcal{M}$ وَ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ , \ i \neq j$$:وَ

من النظرية 1، يأتي:

$$\mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n) \tag{2}$$

ثم من النظرية 3 لدينا:

$$\mu(A) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

وهذا من أجل كل N. ومنه:

$$\mu(A) \geq \sum_n \mu(A_n) \tag{3}$$

من المتراجحتين (2) وَ (3) نحصل على النتيجة المطلوبة.

باعتبار قياس لوبيغ على المستوى أثبتنا في §1 أن الاتحاد والتقاطع لجماعة مجموعات قابلة للقياس مجموعتان قابلتان للقياس سواء كانت هذه الجماعة منتهية أو قابلة للعد. نشير إلى أن هذه النتيجة تبقى قائمة في الحالة العامة، أي أن لدينا النظرية التالية:

نظرية 5. إن الجماعة $\mathcal{M}$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ تمثل σ - جبراً وحدته E.

البرهان. لما كان:

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

وكان متمم مجموعة قابلة للقياس قابلاً للقياس، يكفي أن نبرهن على أنه

إذا كانت المجموعات ... ,$A_1, A_2, ..., A_n$ تنتمي إلى $\mathcal{M}$، فإن الأمر كذلك فيما يخص المجموعة $A = \bigcup_n A_n$.

إن البرهان الخاص بهذه القضية والوارد ضمن النظرية 7 من 1§ من أجل مجموعات المستوى يشمل الحالة العامة بدون أي تغيير.

وكما هو الحال بالنسبة لقياس لوبيغ على المستوى، فإن الجمعية القابلة للعد لقياس تستلزم استمرار هذا القياس. بعبارة أخرى، إذا كان μ قياساً σ - جميعاً معرفاً على σ - جبر وَ $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ متتالية متناقصة من المجموعات القابلة للقياس، وكان:

$$A = \bigcap_n A_n$$

فإن:

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

ثم إذا كانت: $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ متتالية متزايدة من المجموعات القابلة للقياس وَ:

$$A = \bigcup_n A_n$$

فإن:

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

إن البرهان الخاص بهذه القضية والوارد في 1§ من أجل القياس في المستوى (النظرية 9) يشمل الحالة العامة بدون أي تغيير.

وهكذا أثبتنا أن الجماعة $\mathcal{M}$ σ - جبر وأن التابع $\mu(A)$ المعرف على $\mathcal{M}$ يتمتع بكل خاصيات قياس σ - جمعي. وهو ما يبرر التعريف التالي:

تعريف 3. نسمي امتداداً حسب لوبيغ $\mu = L(m)$ لقياس m كل تابع $\mu(A)$ معرف على الجماعة $\mathcal{M}$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس والمطابقة للقياس الخارجي $\mu^*(A)$ على $\mathcal{M}$.

2. تمديد قياس معطى على نصف حلقة بدون وحدة.

إذا كانت نصف الحلقة المعرف عليها القياس الأول m بدون وحدة، فإنه تطرأ على إنشاء إمتداد لوبيغ الوارد في الفقرة السابقة بعض التغييرات الطفيفة. نحتفظ بالتعريف 1 للقياس الخارجي μ^* لكن هذا الأخير يعرف فقط على الجماعة S_{μ^*} المؤلفة من المجموعات A التي تقبل كل واحدة منها تغطية $\cup B_n$ بمجموعات من $\mathcal{G}_m$، بحيث يكون المجموع $\sum_n m(B_n)$ ذا قيمة منتهية. أما تعريف قابلية القياس فنحتفظ به دون أي تغيير.

تبقى النظريات من (2) إلى (4) والتعريف 3 قائمة. لم نستعمل فرض وجود الوحدة إلّا في برهان النظرية 2. للبرهان على هذه النظرية في الحالة العامة يجب البرهان على أنه إذا كان $A_1 \in \mathcal{M}$ وَ $A_2 \in \mathcal{M}$ فإن $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$ وهذا دون فرض وجود وحدة. نلاحظ أن ذلك يأتي من الاحتواء:

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

إذا لم تكن لِـ $\mathcal{G}_m$ وحدة فإن النظرية 5 تستبدل بالنظرية التالية:

نظرية 6. من أجل كل قياس m، فإن الجماعة $\mathcal{M}$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ σ - حلقة؛ أما قابلية القياس للمجموعة $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ من أجل A_n قابلة للقياس، فتتوفر إذا وفقط إذا كانت القياسات:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

محدودة من الأعلى بثابت مستقل عن N.

نترك البرهان على هذه القضية للقارىء.

ملاحظة. بما أن الأمر يتعلق الآن بقياسات ذات قيم منتهية، فإن ضرورة الشرط الأخير بديهية.

من النظرية 6 ينتج:

نتيجة. إن الجماعة $\mathcal{M}_A$ المؤلفة من كل المجموعات $B \in \mathcal{M}$ التي تمثل مجموعات جزئية من مجموعة ثابتة $A \in \mathcal{M}$، σ - جبر.

نرى، مثلا، أن جماعة كل المجموعات الجزئية (من قطعة مستقيمة كيفية $[a, b]$) القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ (بمفهوم لوبيغ المعتاد على المستقيم)، σ - جبر مجموعات.
نشير أخيراً إلى خاصية أخرى لقياسات لوبيغ.

تعريف 4. نقول عن قياس μ أنه تام إذا نتج عن المساواة $\mu(A) = 0$ وعن الاحتواء $A' \subset A$ أن A' يقبل القياس.

من الواضح حينئذ أن $\mu'(A') = 0$. نبرهن بدون بصعوبة أن الامتداد حسب لوبيغ لكل قياس هو قياس تام. ذلك أنه إذا كان $A' \subset A$ وَ: $\mu(A) = 0$ فإن لدينا: $\mu^*(A') = 0$؛ إلّا أن كل مجموعة C تحقق $\mu^*(C) = 0$ هي حتماً قابلة للقياس لأن $\varnothing \subset \mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ وَ:

$$\mu^*(C \Delta \varnothing) = \mu^*(C) = 0$$

إن كل قياس σ - جمعي على σ - جبر، يمكن تمديده إلى أن يصبح امتداداً تاماً وذلك بفرض أنه منعدم من أجل كل مجموعة جزئية من مجموعة ذات قياس منعدم.

ملاحظة إضافية. 1. إن الفرض القائل بأن القياس الأول m معرف على نصف حلقة (وليس على جماعة كيفية من المجموعات) فرض هام لوحدانية امتداد القياس: نعتبر في مربع الوحدة مجموعة المستطيلات الشاقولية والأفقية، أي المستطيلات ذات طول أو عرض يساوي 1 (الرسم 18) ونلحق بكل منها قياساً مساوياً لمساحتها.

نستطيع تمديد هذا القياس إلى الجبر (وبالتالي إلى σ – الجبر) المولد عن هذه المستطيلات، بعدة كيفيات (عيّن اثنين منها على الأقل).

2. لنشر إلى الرابطة الموجودة بين كيفية التمديد لقياس حسب لوبيغ وكيفية تتميم فضاء متري. من أجل ذلك نلاحظ أننا نستطيع أخذ $m'(A \Delta B)$ كمسافة لعنصرين A وَ B من الحلقة $\mathcal{R}(\mathfrak{C}_m)$. وهذا ما يجعل $\mathcal{R}(\mathfrak{C}_m)$ فضاء مترياً (غير تام عموماً) تتمته مؤلفة من كل المجموعات القابلة للقياس (في هذه الحالة، إذا كان $\mu(A \Delta B) = 0$ فإن المجموعتين A وَ B لا فرق بينهما من الناحية المترية).

تمارين. 1. ليكن m قياساً معطى على نصف حلقة (بوحدة) $\mathfrak{C}_m$ مؤلفة من مجموعات في X، وليكن μ^* القياس الخارجي الملحق بِـ m. برهن على أن مجموعة A تكون قابلة للقياس (بمفهوم لوبيغ) إذا وفقط إذا تمتعت بالخاصية التالية (التي تسمى قابلية القياس بمفهوم كاراتيودوري): من أجل كل مجموعة جزئية $Z \subset X$، لدينا المساواة:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

2. ليكن m قياساً σ – جمعياً معطى على حلقة $\mathcal{R}$ وحدتها X، وليكن $m(X) = 1$. من أجل كل $A \subset X$، ندخل إلى جانب القياس الخارجي μ^*، القياس الداخلي μ_* وذلك بوضع:

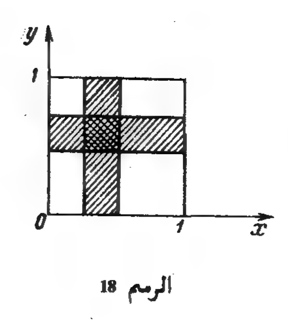
$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A)$$

من الواضح أن لدينا دوماً: $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. برهن على أن:

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) \qquad (*)$$

إذا وفقط إذا كانت المجموعة A قابلة للقياس (بمفهوم التعريف 2).

إذا كان القياس معطى على حلقة ذات وحدة، نأخذ عادة المساواة (*) بمثابة تعريف قابلية القياس لمجموعة.



الرسم 18

3. توسيع مفهوم قابلية القياس في حالة قياس σ – منته.

إذا كان القياس الأول m معطى في الفضاء X على نصف حلقة بدون وحدة فإن تعريف قابلية القياس لمجموعة، الذي أدخلناه سابقاً، يصبح ضيقاً جداً. مثلاً إذا كان X هو المستوى، فإن المجموعات مثل المستوى بأكمله، والشريط، وخارج الدائرة، ليست مجموعات قابلة للقياس طبقاً لهذا التعريف. وبالتالي ندرك أنه من الطبيعي اللجوء إلى توسيع مفهوم قابلية القياس وذلك بقبول قيم غير منتهية للقياس لكي تقبل جماعة المجموعات القابلة للقياس، كما هو الحال عندما يكون القياس الأول معطى على نصف حلقة ذي وحدة، بنية الـ σ – جبر (بدل بنية الـ δ – حلقة).

نقتصر الآن على الحالة الأكثر أهمية وهي حالة ما يسمى بالقياس σ – المنتهي، على الرغم من أن الإنشاء الموافق له يمكن أن يتم أيضاً في الحالة العامة.

ليكن m قياساً σ – جمعياً معطى على نصف حلقة $\mathfrak{C}_m$ من أجزاء المجموعة X. نقول عن هذا القياس إنه σ – منته إذا تمكنا من تمثيل X بأكمله على شكل اتحاد قابل للعد من مجموعات في $\mathfrak{C}_m$ (وليس على شكل اتحاد منته من مجموعات في $\mathfrak{C}_m$). هناك مثال لقياس σ – منته وهو المعطى بالمساحة المعرفة على مجموعة مستطيلات المستوى. كما يمكن الحصول على مثال بسيط لقياس غير σ – منته بالطريقة التالية: ليكن $f(x)$ تابعاً معطى على القطعة المستقيمة $[0, 1]$. من أجل كل مجموعة جزئية منتهية: $A = \{x_1, ..., x_n\}$ من

$[0, 1]$ نضع $\mu(A) = \sum f(x_i)$. إذا كانت مجموعة النقاط x التي تحقق $f(x) \neq 0$ غير قابلة للعد، فإن هذا القياس على $[0, 1]$ ليس σ - منتهياً.

ليكن إذن m قياساً σ - جمعياً وَ σ - منتهياً في X، معرفاً على نصف حلقة $\mathcal{G}_m$. ليكن $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$، $B_i \in \mathcal{G}_m$. بالانتقال من نصف الحلقة $\mathcal{G}_m$ إلى الحلقة $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ وباستبدال B_k بِـ: $B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$، يمكن اعتبار X مساوياً لاتحاد قابل للعد من المجموعات القابلة للقياس مثنى مثنى، نرمز لها كما سبق بِـ $B_1, B_2, \ldots$. إذا طبقنا على m كيفية التمديد حسب لوبيغ، التي قدمناها أعلاه، نحصل على قياس μ معرف على σ - الحلقة $\mathcal{M}$. ليكن $B \in \mathcal{M}$. نرمز بِـ $\mathcal{M}_B$ لجماعة كل المجموعات المنتمية لِـ $\mathcal{M}$ المحتواة في B:

$$\mathcal{M}_B = \{C : C \in \mathcal{M} \ , \ C \subset B\}$$

حينئذ تكون $\mathcal{M}_B$ σ - جبراً وحدته B (راجع نتيجة النظرية 6).

نعتبر الآن الجماعة $\mathcal{U}$ المؤلفة من المجموعات A التي تحقق:

$$A \cap B_i \in \mathcal{M}_{B_i}$$

وذلك مهما كان B_i. بعبارة أخرى، فإن $A \in \mathcal{U}$ يعني أن A يكتب على الشكل:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ , \ \forall A_i \in \mathcal{M}_{B_i} \tag{4}$$

إن الجماعة $\mathcal{U}$ σ - جبر (تأكد من ذلك!) نسميه المجموع المباشر لِـ σ - الجبور $\mathcal{M}_{B_i}$. نقول عن المجموعات (4) التي تشكل الِـ σ - جبر $\mathcal{U}$ أنها قابلة للقياس ونعرف القياس $\tilde{\mu}$ لكل من هاته المجموعات بالطريقة التالية: إذا كان:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ , \ A_i \in \mathcal{M}_{B_i}$$

فإن :

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

لما كان قياس كل مجموعة غير سالب ، فإن سلسلة الطرف الثاني من المساواة السابقة متقاربة نحو عدد غير سالب أو نحو $\infty +$.

نظرية 7. نحتفظ بالافتراضات الواردة أعلاه ، عندئذ تنتج القضايا التالية :

1) إن الـ σ - جبر $\mathcal{U}$ والقياس $\tilde{\mu}$ لا يتعلقان باختيار جماعة المجموعات غير المتقاطعة $\mathcal{M} \ni B_i$ التي تحقق الشرط $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = X$ ؛

2) إن القياس $\tilde{\mu}$ σ - جمعي على $\mathcal{U}$؛

3) إن جماعة الجماعات $\mathcal{U} \ni A$ التي من أجلها تتحقق : $\tilde{\mu}(A) < \infty$ هي الـ δ - حلقة $\mathcal{M}$ ، وعلى هذه الـ δ - حلقة لدينا $\mu = \tilde{\mu}$.

البرهان. 1) نلاحظ أولا بأن A يكون منتمياً إلى $\mathcal{M}$ إذا وفقط إذا كان $\mathcal{M} \ni A \cap C$ من أجل كل $\mathcal{M} \ni C$. من الواضح أن هذا الشرط كاف ، لأنه يعني بصفة خاصة أن $\mathcal{M} \ni A \cap B_i$ $(i = 1, 2, ...)$ ؛ لنثبت أنه ضروري . ليكن $\mathcal{U} \ni A$ وَ $\mathcal{M} \ni C$. نضع : $C_i = C \cap B_i$ ، عندئذ :

$$A \cap C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i)$$

بما أن لدينا :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} (A \cap C_i)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right) \leq \mu(C)$$

من أجل كل N ؛ يتضح بفضل النظرية 6 أن المجموعة $A \cap C$ قابلة للقياس .

لتكن $\{B_i\}$ وَ $\{B_j^*\}$ جماعتين من المجموعات غير المتقاطعة من $\mathcal{M}$ بحيث $\bigcup B_i = \bigcup B_j^* = X$. إذا كان $\mathcal{U} \ni A$ فإن لدينا :

$$\sum_i \mu(A \cap B_i) = \sum_{i,j} \mu(A \cap B_i \cap B_j^*) = \sum_j \mu(A \cap B_j^*)$$

وذلك لأن القياس μ لكل مجموعة من $\mathcal{M}$ غير سالب. تثبت هذه المساواة أننا نحصل دوماً على نفس النتيجة سواء عرفنا $\tilde{\mu}(A)$ بواسطة الجماعة $\{B_i\}$ أو بالجماعة $\{B_j^*\}$.

2) لتكن ... ,... ,$A^{(1)}, A^{(2)}$ مجموعات من $\mathcal{U}$، بحيث $A^{(k)} \cap A^{(l)} = \varnothing$ من أجل $k \neq l$ وَ $A = \bigcup_k A^{(k)}$. بما أن μ قياس σ - جمعي على $\mathcal{M}$، فإن:

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap B_i) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \mu(A^{(k)} \cap B_i) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A^{(k)} \cap B_i\right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}\left(A^{(k)}\right)$$

وهو ما يثبت أن القياس $\tilde{\mu}$ σ - جمعي.

أخيراً، فإن القضية (3) نتيجة مباشرة من النظرية 6.

ملاحظة. نلاحظ أن توسيع مفهوم قابلية القياس الوارد أعلاه (القابل لقيم غير منتهية للقياس) يمكن أن ننجزه أيضاً بدون الفرض القائل أن القياس σ - منته، ويتم ذلك، مثلا، كما يلي.

ليكن X فضاء كيفياً وَ $\mathcal{M}$ δ - حلقة كيفية مؤلفة من مجموعات جزئية في X.

نقول عن مجموعة $A \subset X$ إنها قابلة للقياس بالنسبة لِـ$\mathcal{M}$ إذا كان: $A \cap B \in \mathcal{M}$ من أجل كل $B \in \mathcal{M}$. نتأكد بسهولة من أن الجماعة U المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لِـ$\mathcal{M}$ σ - جبر وحدته X؛ إذا كانت الجماعة $\mathcal{M}$، زيادة على ذلك σ - جبراً (بنفس الوحدة X) فإن $U = \mathcal{M}$.

نعتبر الآن في X قياساً σ - جمعياً كيفياً μ، ونفرض حسب ما ورد في الفقرة 2 أنه مدد إلى δ - حلقة $\mathcal{M}$. لتكن U جماعة مجموعات X القابلة للقياس بالنسبة لِـ $\mathcal{M}$. نقول عن مجموعة $A \in U$ إنها مجموعة منعدمة إذا كان $\mu(A \cap B) = 0$ من أجل كل $B \in \mathcal{M}$. نعرف الآن القياس $\tilde{\mu}$ على U (الذي يمكنه أخذ قيم غير منتهية عموماً) بالطريقة التالية: إذا تمكنا من أجل كل A في U، من إيجاد $B \in \mathcal{M}$ بحيث تكون $A \Delta B$ مجموعة منعدمة. نضع:

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(B)$$

ثم نضع، من أجل العناصر الأخرى A في U:

$$\tilde{\mu}(A) = \infty$$

نتأكد بسهولة من أن القياس $\tilde{\mu}$ σ - جمعي ومن أنه يطابق μ على δ - الحلقة $\mathcal{M} \subset U$.

4. تمديد قياس حسب جوردان.

كنا اعتبرنا في §2 من هذا الفصل قياسات تحقق فقط شرط الجمعية، وأثبتنا أن مثل هذه القياسات تمتد من نصف الحلقة $\mathfrak{S}_m$ إلى الحلقة الأصغرية $\mathcal{R}(\mathfrak{S}_m)$ المولدة عن نصف الحلقة تلك. إلّا أنه بالإمكان تمديد مثل ذلك القياس إلى حلقة أوسع من $\mathcal{R}(\mathfrak{S}_m)$. يسمى الإنشاء الموافق لذلك تمديد القياس حسب جوردان[1]. أما الفكرة التي يعتمد عليها هذا الإنشاء، والتي استعملها في بعض الحالات الخاصة منذ زمن بعيد رياضيو اليونان العتيق، فتنحصر في الاقتراب من المجموعة A التي نرغب في «قياسها» بواسطة مجموعتين A' وَ A''، مزودتين بقياسين، من الداخل ومن الخارج أي بحيث:

$$A' \subset A \subset A''$$

ليكن m قياساً معطى على حلقة كيفية $\mathcal{R}$.

(1) كميل جوردان (Camille Jordan) رياضي فرنسي (1838-1922).

تعريف 5. نقول عن مجموعة A إنها قابلة للقياس بمفهوم جوردان، إذا استطعنا، من أجل كل $\varepsilon > 0$، إيجاد مجموعتين A' وَ A'' في الحلقة $\mathcal{R}$ تحققان الشرطين:

$$A' \subset A \subset A''$$

$$m(A'' \setminus A') < \varepsilon$$

لدينا القضية التالية.

نظرية 8. إن الجماعة $\mathcal{R}^*$، المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس بمفهوم جوردان، حلقة.

لتكن $\mathcal{U}$ جماعة مجموعات A، كل مجموعة منها محتواة في مجموعة B من $\mathcal{R}$. من أجل كل $A \in \mathcal{R}$، نضع تعريفاً:

$$\bar{\mu}(A) = \operatorname*{Inf}_{B \supset A} m(B)$$

$$\underline{\mu}(A) = \sup_{B \supset A} m(B)$$

يسمى التابعان $\bar{\mu}(A)$ وَ $\underline{\mu}(A)$ على التوالي قياس جوردان «الخارجي» وقياس جوردان «الداخلي» للمجموعة A.

من الواضح أن لدينا دوماً:

$$\underline{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(A)$$

نظرية 9. يُطابق الحلقة $\mathcal{R}^*$ جماعة المجموعات $A \in \mathcal{U}$ التي من أجلها تتحقق المساواة: $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)$

أما بخصوص مجموعات $\mathcal{U}$ فلدينا النظريات التالية:

نظرية 10. إذا كان $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$، فإن $\bar{\mu}(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \bar{\mu}(A_k)$.

نظرية 11. إذا كان $A \supset A_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ وَ $A_i \cap A_j = \varnothing$، فإن:

$$\underline{\mu}(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(A_k)$$

نعرف الآن التابع μ على الساحة:

$$\mathcal{G}_\mu = \mathcal{R}^*$$

بالعلاقة:

$$\mu(A) = \underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$$

من النظرية 10 وَ 11 ومن كون:

$$\mu(A) = \underline{\mu}(A) = m(A)$$

من أجل كل $A \in \mathcal{R}$، تأتي النظرية التالية:

نظرية 12. إن التابع $\mu(A)$ قياس وامتداد للقياس m.

ينطبق الإنشاء الوارد أعلاه على كل قياس m معرف على حلقة. بصفة خاصة يمكن تطبيقه على مجموعات المستوى. نأخذ في الحالة الأخيرة الحلقة الأولى مساوية لجماعة المجموعات الأولية (أي الاتحادات المنتهية للمستطيلات). تتعلق حلقة المجموعات الأولية باختيار جملة الاحداثيات على المستوى (نأخذ المستطيلات التي لها أضلاع موازية لمحوري الاحداثيات). إذا انتقلنا إلى قياس جوردان على المستوى، فإن التعلق باختيار جملة الاحداثيات يزول: بالإنطلاق من جملة إحداثيات كيفية $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}\}$ مرتبطة بالجملة الأولى $\{x_1, x_2\}$ بواسطة تحويل متعامد:

$$\overline{x_1} = \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot x_2 + a_1$$

$$\overline{x_1} = -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + a_2$$

نحصل دوماً على نفس القياس لجوردان. وهذا ناتج من النظرية العامة التالية:

نظرية 13. لكي يتطابق امتدادا جوردان $\mu_1 = j(m_1)$ وَ $\mu_2 = j(m_2)$ للقياسين m_1 وَ m_2 المعرفين على الحلقتين $\mathcal{R}_1$ وَ $\mathcal{R}_2$ على التوالي، يلزم ويكفي أن تتحقق الشروط التالية:

$$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{G}_{\mu_1} \text{ وَ } m_1(A) = \mu_2(A) \text{ على } \mathcal{R}_1$$

$$\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{G}_2 \text{ وَ } m_2(A) = \mu_1(A) \text{ على } \mathcal{R}_2$$

إذا كان القياس الأول m معرفاً على نصف حلقة $\mathcal{G}_m$ بدل حلقة، فمن الطبيعي أن نسمي امتداداً حسب جوردان لِـ m القياس:

$$j(m) = j\big(r(m)\big)$$

المحصل عليه بتمديد m إلى الحلقة $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ أولا، وبأخذ امتداده حسب جوردان ثانياً.

5. وحدانية امتداد قياس.

إذا كانت مجموعة A قابلة للقياس بمفهوم جوردان بالنسبة للقياس μ، أي إذا انتمت إلى $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*(\mathcal{G}_m)$ فإن قيمة $\tilde{\mu}(A)$ تساوي القيمة $J(A)$ للإمتداد حسب جوردان $J = j(m)$، وذلك من أجل كل قياس $\tilde{\mu}$ يمثل امتداداً لِـ m ومعرف على $\mathcal{R}^*$. يمكن البرهان على عدم وحدانية امتداد القياس m خارج الجماعة $\mathcal{R}^*$ المؤلفة من المجموعات القابلة للقياس بمفهوم جوردان. وعلى وجه التحديد نقول عن A إنها مجموعة وحدانية للقياس m، إذا تحقق:

1) وجود قياس يمدد m ومعرف من أجل المجموعة A؛

2) من أجل كل قياسين μ_1 وَ μ_2 من هذا النوع، لدينا:

$$\mu_1(A) = \mu_2(A)$$

بوسعنا أن ننص على النتيجة التالية :

تُطَابق جماعة مجموعات وحدانية القياس m جماعة المجموعات القابلة للقياس بمفهوم جوردان بالنسبة للقياس m ، أي الحلقة $\mathcal{R}^*$.

إلاَّ أننا إذا اقتصرنا على القياسات σ - الجمعية وعلى امتداداتها (σ - الجمعية) ، نجد أن جماعة مجموعات الوحدانية أوسع ، عموماً ، من جماعة المجموعات القابلة للقياس .

وبما أن القياسات σ - الجمعية تلعب دوراً أهم من غيرها فإننا ندخل التعريف التالي :

تعريف 6. نقول عن مجموعة A إنها مجموعة σ - الوحدانية للقياس σ - الجمعي m ، إذا تحقق :

1) وجود إمتداد σ - جمعي λ للقياس m معرف من أجل A (أي بحيث $A \in \mathcal{G}_\lambda$) .

2) من أجل كل امتدادين σ - جمعيين λ_1 وَ λ_2 من هذا النوع ، لدينا :

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A)$$

إذا كانت A مجموعة σ - وحدانية للقياس σ - الجمعي μ ، توجد حسب تعريفنا ، قيمة وحيدة ممكنة $\lambda(A)$ للإمتداد σ -الجمعي للقياس μ ، المعرف من أجل A .

من اليسير أن ندرك بأن كل مجموعة قابلة للقياس حسب جوردان تقبل القياس أيضاً حسب لوبيغ (لكن العكس غير صحيح ! أعط مثالاً لذلك) وبأن قيمتي قياسي جوردان ولوبيغ من أجل هذه المجموعة ، قيمتان متساويتان .

نستنتج من ذلك مباشرة أن الامتداد حسب جوردان لقياس σ - جمعي هو أيضاً σ - جمعي .

كل مجموعة A قابلة للقياس حسب لوبيغ مجموعة σ - وحدانية من أجل القياس الأول m . ذلك أن من أجل كل $\varepsilon > 0$ نستطيع أن نلحق بكل مجموعة A مجموعة $R \ni B$ بحيث $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. من أجل كل امتداد λ للقياس m ، معرف من أجل A ، لدينا :

$$\lambda(B) = m'(B)$$

لأن الإمتداد m' للقياس m إلى $R = R(\mathfrak{G}_m)$ وحيد. من جهة أخرى :

$$\lambda(a \Delta B) \leq \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

وبالتالي :

$$|\lambda(A) - m'(B)| < \varepsilon$$

وهكذا يتضح أن :

$$|\lambda_1(A) - \lambda_2(A)| < 2\varepsilon$$

من أجل كل امتدادين σ - جمعيين λ_1 وَ λ_2 للقياس m .
ومنه يأتي :

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A)$$

وذلك لأن $\varepsilon > 0$ كيفي في المتراجحة السابقة.

يمكن أن نبرهن على أن جماعة المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ يستنفد جماعة المجموعات σ - الوحدانية للقياس الأول m بأكملها.

ليكن m قياساً σ - جمعياً كيفياً ساحة تعريفه $\mathfrak{G}$، ولتكن $\mathcal{M} = L(\mathfrak{G})$ ساحة تعريف امتداده حسب لوبيغ. من السهل أن نرى بأن :

$$L(\mathfrak{G}_1) = L(\mathfrak{G})$$

وذلك مهما كانت نصف الحلقة $\mathfrak{G}_1$ المحققة للشرط :

$$\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathcal{M}$$

§4. التوابع القابلة للقياس

1. تعريف وخاصيات أساسية للتوابع القابلة للقياس.

لتكن X وَ Y مجموعتين كيفيتين، ولتكن $\mathfrak{S}_X$ وَ $\mathfrak{S}_Y$ جماعتين من أجزاء X وَ Y على التوالي. نقول عن التابع المجرد $y = f(x)$ المعرف على X والآخذ قيمه في Y، أنه $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$ - قابل للقياس إذا كان $A \in \mathfrak{S}_Y$ يستلزم $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$.

إذا أخذنا مثلاً X وَ Y مساويين للمستقيم العددي (أي إذا اعتبرنا توابع حقيقية لمتغير واحد) وأخذنا $\mathfrak{S}_X$ وَ $\mathfrak{S}_Y$ مساويين لجماعة كل المجموعات الجزئية المفتوحة (أو المغلقة) في R^1، فإن مفهوم قابلية القياس الذي عرفناه آنفاً يصبح مطابقاً لمفهوم الاستمرار. إذا أخذنا $\mathfrak{S}_X$ وَ $\mathfrak{S}_Y$ مساويين لجماعة المجموعات البوريلية، نحصل على التوابع المسماة التوابع التابعة للقياس بمفهوم بوريل (Borel) أو الـB - قابلة للقياس.

سنهتم في المستقبل بمفهوم القياس من وجهة نظر نظرية المكاملة. وبهذا الصدد، نلاحظ أن مفهوم القياس المتعلق بالتوابع العددية المعرفة على مجموعة X ذات قياس σ - جمعي μ، مفهوم بالغ الأهمية. نأخذ $\mathfrak{S}_X$ في هذه الحالة يساوي الجماعة $\mathfrak{S}_\mu$ لكل المجموعات في X القابلة للقياس بالنسبة لِـ μ، ونأخذ $\mathfrak{S}_Y$ مساوياً لجماعة الـB - مجموعات (أي المجموعات البوريلية) على المستقيم. بما أننا نستطيع تمديد كل قياس σ - جمعي إلى σ - جبر، فمن الطبيعي أن نفرض منذ البداية بأن $\mathfrak{S}_\mu$ σ - جبر. وهكذا نعود في حالة التوابع العددية إلى تعريف قابلية القياس بالطريقة التالية.

تعريف 1. لتكن X مجموعة معطى عليها قياس σ - جمعي μ معرف على σ - جبر $\mathfrak{S}_\mu$. نقول عن تابع حقيقي $f(x)$ على X إنه μ - قابل للقياس، إذا كان، من أجل كل مجموعة بوريلية A من المستقيم العددي، لدينا:

$$f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu$$

بطريقة مماثلة، نقول عن تابع عقدي $\varphi(x)$ معرف على X أنه μ - قابل للقياس، عندما يكون $\varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{G}_\mu$ من أجل كل مجموعة بوريلية من المستوى العقدي. من السهل التأكد من أن ذلك يكافىء القول أن الجزء الحقيقي للتابع φ μ - قابل للقياس، وكذا الأمر بالنسبة لجزئها التخيلي.

نقول عن تابع معطى على المستقيم إنه بوريلي (أو B - قابل للقياس) إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة بوريلية، مجموعة بوريلية.

نظرية 1. لتكن X ، Y ، Z مجموعات كيفية، ولتكن $\mathfrak{G}_X$ ، $\mathfrak{G}_Y$ ، $\mathfrak{G}_Z$ جماعات أجزاء من X ، Y ، Z على التوالى. إذا كان التابع $y = f(x)$ المعرف على X $(\mathfrak{G}_X, \mathfrak{G}_Y)$ - قابلاً للقياس والتابع $z = g(y)$ المعرف على Y $(\mathfrak{G}_Y, \mathfrak{G}_Z)$ - قابلا للقياس، فإن التابع:

$$z = \varphi(x) = g(f(x))$$

$(\mathfrak{G}_X, \mathfrak{G}_Z)$ - قابل للقياس.

باختصار فإن تركيب تابعين قابلين للقياس تابع قابل للقياس.

البرهان. إذا كان $A \in \mathfrak{G}_Z$ فإن $g^{-1}(A) = B \in \mathfrak{G}_Y$ لأن التابع g $(\mathfrak{G}_Y, \mathfrak{G}_Z)$ - قابل للقياس. من جهة أخرى فإن التابع f الـ $(\mathfrak{G}_X, \mathfrak{G}_Y)$ - قابل للقياس يستلزم أن $f^{-1}(B) \in \mathfrak{G}_X$ ، أي أن $f^{-1}(g^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{G}_X$ ومنه يأتي أن التابع φ $(\mathfrak{G}_X, \mathfrak{G}_Z)$ - قابل للقياس.

نتيجة. كل تابع بوريلي لتابع عددي μ - قابل للقياس، تابع μ - قابل للقياس. بصفة خاصة، فإن كل تابع مستمر لتابع μ - قابل للقياس تابع μ - قابل للقياس.

سنكتب في المستقبل إذا لم نخش التباساً «قابلاً للقياس» بدل «μ - قابلاً للقياس».

نظرية 2. لكي يكون تابع حقيقي $f(x)$ قابلاً للقياس، يلزم ويكفي من أجل كل عدد حقيقي c أن تكون المجموعة $\{x : f(x) < c\}$ قابلة للقياس.

البرهان. من الواضح أن الشرط ضروري لأن نصف المستقيم $(-\infty, c)$ مجموعة بوريلية. حتى نثبت أن الشرط كاف نلاحظ في البداية بأن الـ σ – جبر المولد عن الجماعة Σ المؤلفة من كافة أنصاف المستقيمات $(-\infty, c)$ تطابق الـ σ – جبر المؤلف من المجموعات البوريلية على المستقيم. ومنه ينتج، حسب الفقرة 5، 5§، الفصل I، أن الصورة العكسية لكل مجموعة بوريلية، تنتمي إلى σ – الجبر المولد عن الصور العكسية لأنصاف المستقيمات المنتمية إلى Σ، أي أنها قابلة للقياس.

يُعتبر هذا الشرط في أغلب الأحيان بمثابة تعريف لقابلية القياس، أي أننا نقول عن تابع $f(x)$ إنه يقبل القياس، إذا كانت كل المجموعات من الشكل $\{x : f(x) < c\}$ قابلة للقياس.

2. عمليات على التوابع القابلة للقياس.

لنثبت أن جماعة التوابع القابلة للقياس، المعرفة على مجموعة كيفية، مغلقة بالنسبة للعمليات الحسابية.

نظرية 3. إن الفرق والجمع والجداء لتابعين قابلين للقياس توابع تقبل القياس. إذا كان مقام كسر تابعين قابلين للقياس غير منعدم فإن هذا الكسر يقبل القياس.

البرهان. نثبت هذه النظرية في عدة مراحل.

1) إذا كان التابع f يقبل القياس فمن الواضح أن kf وَ $a + f$ يقبلان القياس مهما كان الثابتان k وَ a.

2) إذا كان التابعان f وَ g يقبلان القياس، فإن المجموعة:

$$\{x : f(x) > g(x)\}$$

تقبل أيضاً القياس، ذلك أن:

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}\right)$$

حيث r_k يتجول في مجموعة الأعداد الناطقة المرقمة وفق أي ترتيب. ومنه ينتج أن المجموعة:

$$\{x : f(x) > a - g(x)\} = \{x : f(x) + g(x) > a\}$$

تقبل القياس. وهذا يعني أن مجموع تابعين قابلين للقياس تابع يقبل القياس.

3) من (1) وَ (2) نستنتج أن الفرق $f - g$ يقبل القياس أيضاً.

4) إن جداء تابعين يقبلان القياس تابع يقبل القياس. لرؤية ذلك نستخدم المتطابقة:

$$fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$$

نلاحظ أن الطرف الثاني تابع يقبل القياس. وهذا ناتج من المراحل الثلاث السابقة ومن نتيجة النظرية 1، التي يتبين من خلالها أن مربع تابع قابل للقياس تابع يقبل القياس.

5) إذا كان التابع $f(x)$ قابلا للقياس وَ $f(x) \neq 0$، فإن التابع $\frac{1}{f(x)}$ يقبل أيضاً القياس. ذلك أنه إذا كان $c > 0$ فإن:

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : f(x) > \frac{1}{c}\right\} \cup \left\{x : f(x) < 0\right\}$$

وإذا كان $c < 0$، فإن:

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : 0 > f(x) > \frac{1}{c}\right\}$$

وإذا كان $c = 0$، فإن:

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : f(x) < 0\right\}$$

نلاحظ أننا نحصل في جميع هذه الحالات على طرف ثان قابل للقياس (بصفته مجموعة).

من المرحلتين (4) وَ (5) ينتج أن الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع يقبل القياس (شريطة أن يكون $g(x) \neq 0$).

وهكذا أثبتنا أننا نحصل على توابع قابلة للقياس عند تطبيق العمليات الحسابية على توابع قابلة للقياس.

نبرهن الآن على أن مجموعة التوابع القابلة للقياس مغلقة ليس فقط بالنسبة للعمليات الحسابية بل بالنسبة للإنتقال إلى النهاية أيضاً.

نظرية 4. إن نهاية متتالية توابع قابلة للقياس ومتقاربة من أجل كل $x \in X$، تابع يقبل القياس.

البرهان. لتكن $f_n(x) \to f(x)$؛ عندئذ:

$$\left\{x : f(x) < c\right\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \qquad (1)$$

ذلك أنه إذا كان $c > f(x)$، يوجد k بحيث: $f(x) < c - \frac{2}{k}$؛ من العدد المختار k يمكن إيجاد قيمة لِـ n كبيرة بكفاية بحيث تكون المتراجحة:

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

محققة من أجل كل قيم $n \leq m$، وهذا يعني أن x ينتمي إلى الطرف الثاني من المساواة (1).

بخصوص القضية العكسية، نلاحظ أنه إذا انتمى x إلى الطرف الثاني من (1)، فإنه يوجد k بحيث:

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

وهـذا من أجل الأعـداد m الـكبيرة بكفاية . ومنه يأتي $f(x) < c$ ، أي أن x ينتمي إلى الطرف الأول (الأيسر) من (1) .

إذا كانت التوابع $f_n(x)$ قابلة للقياس ، فإن المجموعات :

$$\left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

تقبل أيضاً القياس . بما أن جماعة المجموعات القابلة للقياس σ - جبر فإن المسـاواة (1) تبين أن المجموعة :

$$\{x : f(x) < c\}$$

قابلة أيضاً للقياس ، وهو ما يثبت قابلية القياس لِـ $f(x)$.

ملاحظة . مما سبق ، نرى أن قابلية قياس تابع لا تفرض وجودا مسبقاً لقياس على الفضـاءات المعتبرة . يجب فقط تعيين جماعات المجموعات التي ستعتبر فيما بعد مجموعات قابلة للقياس . والواقع هو أننا نستعمل مفهوم قابلية القياس ، عموماً ، من أجل توابع على فضـاء X مزود بقياس معين ، معرف على σ - جبر مؤلف من مجموعات جزئية من X . تلك هي الحالة التي سنعتبرها أسفله .

كنا أشرنا إلى أن كل قياس σ - جمعي معرف على σ - جبر $\mathfrak{S}$ مؤلف من أجزاء لمجموعة X ، يمكن اعتباره تاماً وهذا دون المس بعمومية المسـألة ؛ أي أننا نستطيع أن نفرض بأنه إذا كانت A مجموعة قابلة للقياس ، وقياسها منعدم ، فإن كل مجموعة جزئية $A \supset A'$ تقبل القياس (وبطبيعة الحال : $\mu(A') = 0$) . إن هذا الشرط لتمام القياس سنفرض صحته دوماً في المستقبل .

3. التكافؤ.

من الممكن في معظم الأحيان، لـدى دراسة التوابع القابلة للقياس، أن نهمل قيم هذه التوابع على مجموعة ذات قياس منعدم. وهو ما يؤدي بنا إلى تقديم التعريف التالي:

تعريف 2. نقول عن تابعين f وَ g معرفين على نفس المجموعة E القابلة للقياس، أنهما متكافئان (ونرمز لذلك بِـ: $f \sim g$) إذا كان:

$$\mu\left(\{x : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$$

نتبنى المصطلح التالي: نقول عن خاصية ما إنها محققة أينما كان تقريباً في E، إذا كانت محققة أينما كان في E ماعدا في مجموعة نقاط قياسها منعدم. وهكذا نرى أن تابعين متكافئين هما تابعان متطابقان أينما كان تقريباً.

نظرية 2. إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً على مجموعة قابلة للقياس E ومكافئا على E لتابع قابل للقياس $g(x)$ فإن $f(x)$ يقبل القياس أيضاً.

البرهان. من تعريف التكافؤ ينتج أن المجموعتين:

$$\{x : g(x) < a\} \text{ وَ } \{x : f(x) < a\}$$

لا تختلفان فيما بينهما إلّا بمجموعة قياسها منعدم؛ وبالتالي (مع العلم أننا فرضنا القياس تاماً) إذا كانت المجموعة الثانية قابلة للقياس، فإن الأولى أيضاً تقبل القياس.

ملاحظة. نلاحظ أن الدور الذي يلعبه مفهوم تكافؤ التوابع في التحليل التقليدي؛ ليس ذا أهمية، لأنه يعتبر أساساً توابع مستمرة لمتغير واحد أو لعدة متغيرات والتكافؤ بالنسبة لهذه التوابع هو التطابق. بعبارة أدق، إذا كان f وَ g تابعين مستمرين على قطعة مستقيمة E ومتكافئين (بالنسبة لقياس لوبيغ) فإنهما متطابقان. ذلك لأنه إذا كان $f(x_0) \neq g(x_0)$ عند نقطة x_0،

فإن استمرار f وَ g يؤدي إلى وجود جوار للنقطة x_0 بحيث تتحقق داخله العلاقة $f(x) = g(x)$. وبما أن قياس هذا الجوار موجب فإنه لا يمكن أن يكون تابعان مستمران متكافئين إلّا إذا كانا متطابقين.

أما تكافؤ توابع كيفية قابلة للقياس، فإنه لايؤدي عموماً إلى تطابق هذه التوابع. مثال ذلك التابع المساوي لِـ 1 عند النقاط الناطقة والمساوي لِـ 0 عند النقاط غير الناطقة في المستقيم العددي، فهو تابع يكافىء التابع المنعدم.

4. التقارب أينما كان تقريباً.

بما أننا لانهتم في العديد من الحالات بسلوك تابع قابل للقياس على مجموعة قياسها منعدم، فمن الطبيعي أن ندخل التعميم التالي للمفهوم المعتاد للتقارب النقطي.

تعريف 3. نقول عن متتالية توابع $\{f_n(x)\}$ معرفة على فضاء مقيس X أنها متقاربة أينما كان تقريباً نحو تابع $f(x)$، إذا كان:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad (2)$$

من أجل كل $x \in X$ تقريباً (أي إذا كانت مجموعة العناصر x التي لا تتحقق من أجلها المساواة (2) مجموعة ذات قياس منعدم).

مثال. إن متتالية التوابع $f_n(x) = (-x)^n$ المعرفة على المجال $[0, 1]$ متقاربة من أجل $n \to \infty$ نحو $f(x) = 0$ أينما كان تقريباً (لأنها متقاربة نحو $f(x) = 0$ عند كل نقطة ماعدا في $x = 1$).

تعتبر النظرية الموالية تعميماً للنظرية 4.

نظرية ′4. إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع قابلة للقياس، متقاربة نحو تابع $f(x)$ أينما كان تقريباً على X ، فإن التابع $f(x)$ يقبل القياس.

البرهان. لتكن A مجموعة العناصر x التي تتحقق من أجلها المساواة:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

لدينا فرضا $\mu(X \setminus A) = 0$. إن التابع $f(x)$ يقبل القياس على A ، ثم إن كل تابع يقبل القياس حتما على أية مجموعة قياسها منعدم ولذا ينتج أن $f(x)$ يقبل القياس أيضاً على $X \setminus A$ ؛ وبالتالي فإن التابع $f(x)$ يقبل القياس على X .

تمرين. لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع قابلة للقياس، أينما كان تقريباً نحو تابع $f(x)$. اثبت أن هذه المتتالية تتقارب أينما كان تقريبا نحو $g(x)$ إذا وفقط إذا كان التابع $g(x)$ يكافئ التابع $f(x)$.

5. نظرية ايغوروف (Egorov). اثبت د. ايغوروف سنة 1911 النظرية الهامة التالية التي تبرز العلاقة الموجودة بين مفهومي التقارب أينما كان تقريبا والتقارب المنتظم.

نظرية 6. لتكن E مجموعة قياسها منته وَ $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع قابلة للقياس، متقاربة أينما كان تقريباً على E نحو تابع $f(x)$. عندئذ من أجل كل $0 < \delta$ توجد مجموعة قابلة للقياس $E_\delta \subset E$. بحيث:

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$

2) تتقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ نحو $f(x)$ بانتظام على المجموعة E_δ .

البرهان. يتبين من النظرية ′4 أن التابع $f(x)$ يقبل القياس. نضع:

$$E_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

من أجل m وَ n مثبتان، يمثل E_n^m مجموعة العناصر x بحيث:

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

وذلك من أجل كل$i \geq n$. ليكن :

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$$

يتضح من تعريف E_n^m أن :

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \dots \subset E_n^m \subset \dots$$

من أجل m مثبت .

بما أن كل قياس σ – جمعي مستمر ، فإننا نستطيع ، من أجل كل m وكل $\delta > 0$ ، إيجاد $n_0(m)$ بحيث :

$$\mu\left(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}\right) < \frac{\delta}{2^m}$$

نضع :

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}$$

ونثبت أن المجموعة E_δ المشيدة بهذه الطريقة تحقق شروط النظرية . نبرهن في البداية أن المتتالية $\{f_i(x)\}$ متقاربة بانتظام نحو $f(x)$ على E_δ . ذلك ما ينتج مباشرة من كوْن :

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

مهما كان m في حالة $i > n_0(m)$ وَ $x \in E_\delta$.

لنقيم الآن قياس المجموعة $E \setminus E_\delta$. نلاحظ بهذا الخصوص أن :

$\mu(E \setminus E^m) = 0$ من أجل كل m . ذلك أنه إذا كان $x_0 \in E \setminus E^m$ فإنه توجد قيم لِـ i كبيرة بالقدر الذي نريد ، بحيث :

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geq \frac{1}{m}$$

أي أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ لاتتقارب نحو $f(x)$ عند النقطة x_0 . وبما أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة أينما كان تقريباً نحو $f(x)$ فرضـا ، يجب أن يتحقق لدينا :

$$\mu(E \backslash E^m) = 0$$

ومنه يأتي :

$$\mu\left(E \backslash E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(E^m \backslash E^m_{n_0(m)}\right) < \frac{\delta}{2^m}$$

وبالتالي :

$$\mu(E \backslash E_\delta) = \mu\left(E \backslash \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \backslash E^m_{n_0(m)})\right) \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E \backslash E^m_{n_0(m)}\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$$

انتهى برهان النظرية .

6. التقارب بالقياس .

تعريف 4. نقول عن متتالية توابع قابلة للقياس $\{f_n(x)\}$ إنها متقاربة بالقياس نحو تابع $f(x)$ ، إذا كان :

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$$

وهذا من أجل كل $\sigma > 0$.

توضح النظريتان التاليتان العلاقة بين مفهوم التقارب أينما كان تقريباً والتقارب بالقياس . نفرض هنا أيضاً بأن القياس منته .

نظرية 7. إذا تقاربت متتالية توابع قابلة للقياس $\{f_n(x)\}$ أينما كان تقريباً نحو تابع $f(x)$ فإنها تتقارب نحو نفس التابع $f(x)$ بالقياس .

البرهان . من النظرية 4' ينتج أن التابع $f(x)$ يقبل القياس . لتكن A مجموعة (ذات قياس منعدم) العناصر x التي لاتتقارب فيها المتتالية $\{f_n(x)\}$ نحو $f(x)$. نضع :

$$E_k(\sigma) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \sigma\}$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma)$$

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma)$$

من الواضح أن هذه المجموعات تقبل القياس . بما أن :

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset ...$$

فإن استمرار القياس يؤدي إلى :

$$\mu\left(R_n(\sigma)\right) \to \mu(M) \; , \; n \to \infty$$

لنثبت أن :

$$M \subset A \tag{3}$$

إذا كان $x_0 \not\ni A$ ، أي إذا كان :

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

فمن أجل $\sigma > 0$ معطى يوجد n بحيث :

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma \quad , \; k \geq n$$

أي أن $x_0 \not\ni R_n(\sigma)$ وبالتالي $x_0 \not\ni M$.

بما أن $\mu(A) = 0$ فإن (3) تستلزم $\mu(M) = 0$ وبالتالي :

$$\mu\left(R_n(\sigma)\right) \to 0 \quad , \; n \to \infty$$

ثم إن $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$ ، وبذلك يتم البرهان على النظرية .

يمكن أن نتأكد بسهولة من تقارب متتالية توابع بالقياس لايستلزم عموماً التقارب أينما كان تقريباً لهذه المتتالية . لرؤية ذلك، نعرف من أجل كل عدد طبيعي k على $(0, 1]$ التوابع :

$$f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$$

بالطريقة التالية :

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & , \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k} \\ 0 & , x \in \left(0, \frac{i-1}{k}\right] \cup \left(\frac{i}{k}, 1\right] \end{cases}$$

بترقيم هذه التوابع الواحد تلو الآخر، نحصل على متتالية متقاربة بالقياس نحو 0 (كما نرى ذلك بسهولة) لـكنها لاتتقارب في أية نقطة من $(0\ 1]$ ، (أثبت ذلك !) .

تمرين . لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع قابلة للقياس، متقاربة بالقياس نحو تابع $f(x)$. أثبت أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب بالقياس نحو $g(x)$ إذا وفقط إذا كان التابع $g(x)$ يكافىء $f(x)$.

على الرغم من أن المثال السـابق يبين بأن القضية العكسية لقضية النظرية السـابقة غير صحيحة عموماً، إلاّ أن لدينا النظرية التالية .

نظرية 8. لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع قابلة للقياس، متقاربة بالقياس نحو $f(x)$. عندئذ نستخرج من هذه المتتالية، متتالية جزئية $\{f_{n_k}(x)\}$ متقاربة نحو $f(x)$ أينما كان تقريباً .

البرهان . لتكن $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ متتالية أعداد موجبة بحيث :

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$$

ولتكن $\eta_1, \eta_2, \ldots$ متتالية أعداد موجبة بحيث تكون السلسلة :

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots$$

متقاربة . لننشىء متتالية دليلات :

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

بالطريقة التالية : نختار n_1 كما يلي :

$$\mu\{x : |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\} < \eta_1$$

(العدد n_1 المعرف بهذه الطريقة موجود بالتأكيد) ؛ نختار بعد ذلك $n_1 < n_2$ بحيث :

$$\mu\{x : |f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\} < \eta_2$$

بصفة عامة نختار $n_{k-1} < n_k$ بحيث :

$$\mu\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\} < \eta_k$$

لنثبت أن المتتالية المشيدة بهذه الطريقة متقاربة نحو $f(x)$ أينما كان تقريباً . لرؤية ذلك نعتبر :

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$$

$$Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$$

بما أن :

$$R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$$

فإن $\mu(R_i) \to \mu(Q)$ بفضل استمرار القياس .

من جهة أخرى ، يتضح أن $\mu(R_i) < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$ ، ومنه : $\mu(R_i) \to 0$ لما

$i \to \infty$ ، أي $\mu(Q) = 0$. يبقى أن نتأكد بأن من أجل كل نقاط المجموعة $E \setminus Q$ لدينا التقارب :

$$f_{n_k}(x) \to f(x)$$

ليكن $x_0 \in E \setminus Q$. يوجد عندئذ i_0 بحيث $x_0 \notin R_{i_0}$. وهذا يعني ، من أجل كل $k \geq i_0$ أن لدينا :

$$x_0 \notin \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$$

أي :

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$$

ثم إن $\varepsilon_k \to 0$ فرضا ، ولذا :

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$$

وهو المطلوب .

7. نظرية لوزين (Lusin). الخاصية (C).

إن تعريف قابلية القياس لتابع ، الوارد في بداية هذا البند خاص بالتوابع المعرفة على مجموعات كيفية ، وهو تعريف غير مرتبط بأي شكل من الأشكال بمفهوم استمرار تابع . بهذا الصدد لدينا النظرية الهامة التالية الخاصة بالتوابع المعرفة على قطعة مستقيمة ، وهي النتيجة التي توصل إليها ن . ن . لوزين سنة 1913 .

نظرية 9. لكي يكون تابع $f(x)$ معرف على القطعة $[a, b]$ قابلاً للقياس يلزم ويكفي ، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، أن يوجد تابع $\varphi(x)$ مستمر على $[a, b]$ بحيث :

$$\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$$

بعبارة أخرى، يمكن أن نرد تابعاً قابلاً للقياس إلى تابع مستمر على $[a, b]$ وذلك بتغييره بشكل مناسب على مجموعة قياسها صغير صغراً كيفياً. عندما نستطيع رد تابع معرف على قطعة مستقيمة إلى تابع مستمر بواسطة هذا «التحريف الصغير» نقول عن التابع المعتبر أنه يتمتع بالخاصية (C) (هذا المصطلح هو الذي استعمله ن. ن. لوزين). تثبت نظرية لوزين أن الخاصية (C) يمكن اعتبارها أساساً لتعريف قابلية القياس بالنسبة للتوابع ذات متغير عددي. نستطيع الحصول على برهان نظرية لوزين باستعمال نظرية ايغوروف (المطلوب القيام بهذا البرهان!).

5§ تكامل لوبيغ

إن مفهوم تكامل ريمان المعروف في التحليل الأولي لا يقبل الاستعمال إلّا من أجل التوابع المستمرة أو من أجل التوابع التي لها نقاط تقطع «قليلة». أما إذا تعلق الأمر بتوابع قابلة للقياس ومتقطعة عند كل نقطة من ساحات تعريفها (أو معرفة على مجموعات مجردة غير مزودة بمفهوم الاستمرار) فإن الإنشاء الريماني (نسبة إلى ريمان) يصبح غير قابل للاستعمال. يُوجد بالنسبة لمثل هذه التوابع مفهوم آخر للتكامل أكثر كمال ومرونة، وهو يرجع إلى لوبيغ.

تتمثل الفكرة الرئيسية لإنشاء تكامل لوبيغ في كوْن النقاط x تجمّع لاحسب مقربتها من بعضها البعض على المحور x، كما هو الحال في تكامل ريمان، بل تجمّع حسب مقربة قيم التابع عند هذه النقاط، من بعضها البعض، وهو ما يسمح مباشرة بتوسيع مفهوم التكامل ليشمل صنفاً كبيراً جداً من التوابع.

بالإضافة إلى ذلك نلاحظ أن تكامل لوبيغ يعرف بنفس الطريقة من أجل توابع معطاة على فضاءات مقيسة كيفية، أما تكامل ريمان فهو معرف أولا من أجل توابع ذات متغير واحد ثم يوسع بعد ذلك إلى التوابع المتعددة

المتغيرات بواسطة تعديلات لابد منها. ثم إن تكامل ريمان يفقد معناه إذا تعلق الأمر بتوابع معرفة على فضاءات مقيسة ومجردة.

نعتبر من الآن فصاعداً قياساً μ σ – جمعياً وتاماً معرفاً على σ – جبر مؤلف من مجموعات، وحدته X. نعتبر هذا دوماً، إلّا إذا ورد نص صريح ينفي ذلك. نفرض أن كل المجموعات $A \subset X$ تقبل القياس وكل التوابع $f(x)$ معرفة من أجل $x \in X$ وتقبل القياس.

من المستحسن تعريف تكامل لوبيغ أولاً من أجل التوابع، المسماة بسيطة؛ ثم نعرفه من أجل توابع عامة جداً. نتناول في الفقرات (2)، (3)، (4) إنشاء تكامل لوبيغ في الحالة التي يكون فيها قياس الفضاء بأكمله منتهياً. أما حالة القياس غير المنتهي فندرسها ضمن الفقرة 5 من هذا البند.

1. التوابع البسيطة.

تعريف 1. نقول عن تابع $f(x)$ معرف على فضاء مقيس X إنه تابع بسيط إذا كان قابلاً للقياس ومجموعة قيمه منتهية أو غير منتهية وقابلة للعد.

تتميز بنية التوابع البسيطة بالخاصية التالية.

نظرية 1. يكون تابع $f(x)$ مجموعة قيمه منتهية أو غير منتهية قابلة للعد:

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

قابلاً للقياس إذا وفقط إذا كانت كل المجموعات:

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}$$

قابلة للقياس.

البرهان. من الواضح أن الشرط لازم، لأن كل مجموعة A_n صورة عكسية

لمجموعة ذات عنصر واحد $\{y_n\}$ ، ونحن نعلم أن كل مجموعة ذات عنصر واحد مجموعة بوريلية . ثم إن الشرط كاف لأن فرض النظرية يبين بأن الصورة العكسية $f^{-1}(B)$ لكل مجموعة بوريلية اتحاد $\bigcup_{y_n \in B} A_n$ ، على الأكثر قابل للعد من المجموعات القابلة للقياس A_n ، وبالتالي فإن $f^{-1}(B)$ مجموعة قابلة للقياس .

يعتمد استعمال التوابع البسيطة في إنشاء تكامل لوبيغ على النظرية التالية :

نظرية 2. لكي يكون تابع $f(x)$ قابلاً للقياس ، يلزم ويكفي أن يكون مساوياً لنهاية متتالية متقاربة بانتظام لتوابع بسيطة .

البرهان . إن الشرط كاف حسب النظرية 4 الواردة في البند السابق . للبرهان على لزومه نعتبر تابعاً قابلاً للقياس كيفياً $f(x)$ ونضع $f_n(x) = \frac{m}{n}$ في حالة $\frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n}$ (حيث m أعداد صحيحة و n أعداد صحيحة موجبة) . من الواضح أن التوابع $f_n(x)$ بسيطة ؛ ثم إن $\{f_n(x)\}$ تتقارب بانتظام نحو $f(x)$ لأن :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} .$$

2. تكامل لوبيغ من أجل التوابع البسيطة

ندخل في البداية مفهوم تكامل لوبيغ من أجل التوابع البسيطة المعرفة أعلاه ، أي التوابع القابلة للقياس ذات قيم مجموعاتها منتهية أو قابلة للعد .

ليكن f تابعاً بسيطاً يأخذ القيم :

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

حيث : $y_i \neq y_j$ من أجل $i \neq j$. ولتكن A مجموعة جزئية قابلة للقياس كيفية من X .

من الطبيعي أن نعرف تكامل التابع f على المجموعة A بالمساواة:

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n) \tag{1}$$

حيث: $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$

شريطة أن تكون سلسلة الطرف الثاني من (1) متقاربة. وهكذا نصل إلى التعريف التالي (حيث نفرض السلسلة متقاربة مطلقاً وذلك لأسباب يدركها القارئ).

تعريف 2. نقول عن تابع بسيط f إنه قابل للمكاملة أو قابل للجمع على المجموعة A (بالنسبة للقياس μ) إذا كانت السلسلة (1) متقاربة مطلقاً. إذا كان التابع f قابلاً للمكاملة، فإن مجموع السلسلة (1) يسمى تكامل f على المجموعة A.

نفرض في هذا التعريف أن الأعداد y_n مختلفة. نلاحظ أنه يمكن تمثيل قيمة التكامل لتابع بسيط كمجموع جداءات من الشكل $c_k \mu(B_k)$ بدون أن نفرض بأن الأعداد c_k متخالفة. ويتم ذلك بفضل التوطئة التالية.

توطئة. ليكن $A = \bigcup\limits_k B_k$ وَ $B_i \cap B_j = \Phi$ من أجل $i \neq j$، وليكن f تابعاً يأخذ على كل مجموعة من المجموعات B_k قيمة وحيدة c_k؛ عندئذ:

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k) \tag{2}$$

مع العلم أن التابع f يكون قابلاً للمكاملة إذا وفقط إذا كانت السلسلة (2) متقاربة مطلقاً.

البرهان. من السهل أن نرى بأن كل مجموعة:

$$A_n = \{x : x \in A \ , \ f(x) = y_n\}$$

تساوي إتحاد المجموعات B_k التي تتحقق من أجلها $c_k = y_n$. ولذا :

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k)$$

بما أن القياس غير سالب ، نستخلص :

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k)$$

وهذا يعني أن السلسلتين : $\sum_n y_n \mu(A_n)$ وَ $\sum_n c_k \mu(B_n)$ متقاربتان مطلقاً أو متباعدتان في نفس الوقت . انتهى برهان التوطئة .

نقدم الآن بعض خواص تكامل لوبيغ للتوابع البسيطة .

أ) إذا كان f وَ g تابعين بسيطين قابلين للمكاملة على A ، فإن مجموعهما $f + g$ تابع يقبل المكاملة ولدينا :

$$\int_A [f(x) + g(x)] \, d\mu = \int_A f(x) \, d\mu + \int_A g(x) \, d\mu$$

لرؤية ذلك نفرض أن :

$$f(x) = f_i \quad , \; \forall x \in F_i \subset A$$

وَ :

$$g(x) = g_j \quad , \; \forall x \in G_j \subset A$$

بحيث أن :

$$J_1 = \int_A f(x) \, d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i) \tag{3}$$

$$J_2 = \int_A g(x) \, d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j) \tag{4}$$

بالاعتماد على التوطئة السابقة يأتي :

$$J = \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu (F_i \cap G_j) \quad (5)$$

إلّا أن :

$$\mu (F_i) = \sum_j \mu (F_i \cap G_j)$$

$$\mu (G_j) = \sum_i \mu (F_i \cap G_j)$$

وبالتالي فإن التقارب المطلق للسلسلتين (3) وَ (4) يؤدي إلى التقارب المطلق للسلسلة (5)؛ زيادة على ذلك :

$$J = J_1 + J_2$$

ب) إذا كان تابع بسيط f قابلاً للمكاملة على A وَ k ثابتاً كيفياً، فإن التابع kf يقبل أيضاً المكاملة على A ، ولدينا :

$$\int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$$

(التأكد من هذه الخاصية بسيط) .

جـ) إن كل تابع بسيط f محدود على مجموعة A ، يقبل المكاملة على A ؛ وإذا كان : $|f(x)| \le M$ على A ، فإن :

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \le M \mu (A)$$

(التأكد من هذه الخاصية بسيط) .

3. التعريف العام لتكامل لوبيغ على مجموعة قياسها منته.

تعريف 3. نقول عن تابع f إنه يقبل المكاملة (الجمع) على مجموعة A، إذا وجدت متتالية $\{f_n\}$ من التوابع البسيطة القابلة للمكاملة على A، والمتقاربة بانتظام نحو f. تسمى النهاية:

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x)\, d\mu \tag{6}$$

تكامل التابع f على المجموعة A، ونرمز له بِـ:

$$\int_A f(x)\, d\mu$$

نلاحظ أن التعريف السابق يصبح ذا معنى إذا تحققت الشروط التالية:

1) إذا وجدت النهاية (6) مهما كانت متتالية التوابع البسيطة القابلة للمكاملة على A والمتقاربة بانتظام.

2) من أجل تابع f معطى، يجب ألّا تتعلق هذه النهاية باختيار المتتالية $\{f_n\}$.

3) يجب أن يتطابق التعريف السابق للمكاملة والتكامل مع التعريف المعطى في الفقرة 2، عندما نعتبر توابع بسيطة.

إن كل هذه الشروط متوفرة.

للبرهان على الشرط الأول، يكفي أن نلاحظ بالاعتماد على الخاصيات (أ)، (ب)، (جـ)، لتكامل التوابع البسيطة، بأن لدينا:

$$\left| \int_A f_n(x)\, d\mu - \int_A f_m(x)\, d\mu \right| \leq \mu(A) \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \tag{7}$$

للبرهان على الشرط الثاني، يجب اعتبار متتاليتين $\{f_n\}$ وَ $\{f_n^*\}$ متقاربتين نحو f. إذا أخذت النهاية (6) قيمتين مختلفتين من أجل هاتين المتتاليتين، فإن النهاية تصبح غير موجودة من أجل اتحاد هاتين المتتاليتين وهو ما

يناقض الشرط الأول . أخيراً للبرهان على الشرط الثالث يكفي اعتبار المتتالية المحصل عليها بوضع $f_n = f$ من أجل كل n .

ملاحظة . نرى في إنشاء تكامل لوبيغ أننا نستطيع التمييز بشكل واضح بين مرحلتين : الأولى منهما هي تعريف التكامل في حد ذاته (بصفته مجموعاً لسلسلة) من أجل صنف توابع (التوابع البسيطة القابلة للمكاملة) بسيط جداً وواسع جداً في نفس الوقت ، أما ثانية هاتين المرحلتين فهي توسيع هذا التعريف إلى صنف توابع أوسع بكثير من الصنف السابق ، ويتم ذلك بفضل انتقال إلى النهاية . والواقع أننا نجد هاتين المرحلتين ، أي التعريف الإنشائي المضيق ثم الانتقال إلى النهاية في كل انشاءات التكاملات .

نقدم الآن الخواص الأساسية لتكامل لوبيغ . من التعريف نستنتج مباشرة أن :

.I
$$\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A) \tag{8}$$

II. إذا كان f تابعاً يقبل المكاملة وَ k ثابتاً كيفياً ، فإن التابع kf يقبل أيضاً المكاملة ولدينا :

$$\int_A kf(x)\, d\mu = k\int_A f(x)\, d\mu \tag{9}$$

نحصل على هذه الخاصية بالإنتقال إلى النهاية في الخاصية (ب) لتكامل التوابع البسيطة .

III. الجمعية : إذا كان f وَ g تابعين قابلين للمكاملة ، فإن التابع $f+g$ يقبل أيضاً المكاملة ولدينا :

$$\int_A [f(x) + g(x)]\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu + \int_A g(x)\, d\mu \tag{10}$$

نحصل على برهان هذه الخاصية بالإنتقال إلى النهاية في الخاصية (أ) لتكامل التوابع البسيطة .

IV. كل تابع f محدود على مجموعة A ، يقبل المكاملة على A .

نحصل على برهان هذه الخاصية بالإنتقال إلى النهاية في الخاصية (ج) لتكامل التوابع البسيطة، وذلك باستخدام النظرية 2.

V. الرتابة: إذا كان $0 \leq f(x)$، فإن:

$$\int_A f(x)\, d\mu \geq 0 \tag{11}$$

(شريطة وجود التكامل)

فيما يخص التوابع البسيطة نلاحظ أن هذه الخاصية تنتج مباشرة من التعريف. أما في الحالة العامة فيمكن البرهان عليها بملاحظة أنه إذا كان التابع f قابلاً للقياس وغير سالب، توجد متتالية توابع بسيطة غير سالبة، متقاربة نحو f (راجع النظرية 2).

نستنتج من الخاصية الأخيرة أن الشرط $f(x) \geq g(x)$ يؤدي إلى:

$$\int_A f(x)\, d\mu \geq \int_A g(x)\, d\mu \tag{12}$$

وبالتالي، إذا كان: $m \leq f(x) \leq M$ من أجل كل $x \in A$ (أو كلها تقريباً) فإن:

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x)\, d\mu \leq M\mu(A) \tag{13}$$

VI. إذا كان $\mu(A) = 0$، فإن $\int_A f(x)\, d\mu = 0$

VI'. إذا كان $f(x) = g(x)$ أينما كان تقريباً فإن:

$$\int_A f(x)\, d\mu = \int_A g(x)\, d\mu$$

مع العلم أن هذين التكاملين من طبيعة واحدة.

نستنتج هاتين الخاصيتين مباشرة من تعريف تكامل لوبيغ.

VII. إذا كان التابع φ قابلاً للمكاملة على A ، وكان $|f(x)| \leq \varphi(x)$ أينما كان تقريباً ، فإن التابع f يقبل المكاملة أيضاً على A .

ذلك أنه إذا كان f وَ φ تابعين بسيطين وحذفنا من A مجموعة ذات قياس منعدم فإننا نحصل على مجموعة A' يمكن كتابتها على شكل اتحاد منته أو قابل للعد لمجموعات يكون التابعان f وَ φ على كل واحدة منها ثابتين : $f(x) = a_n$ ، $\varphi(x) = b_n$ ، حيث $|a_n| \leq b_n$. لما كان التابع φ قابلاً للمكاملة فإننا نستطيع كتابة :

$$\sum_n |a_n| \mu(A_n) \leq \sum_n b_n \mu(A_n) = \int_{A'} \varphi(x) d\mu = \int_A \varphi(x) d\mu$$

وبالتالي فإن التابع f يقبل أيضاً المكاملة ولدينا :

$$\left|\int_A f(x) d\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x) d\mu\right| = \left|\sum_n a_n \mu(A_n)\right| \leq \sum_n |a_n| \mu(A_n) =$$

$$= \int_{A'} |f(x)| d\mu \leq \int_A \varphi(x) d\mu$$

نبرهن على هذه الخاصية في الحالة العامة بالإنتقال إلى النهاية وباستخدام النظرية 2 .

VIII. إن التكاملين :

$$I_1 = \int_A f(x) d\mu \quad , \quad I_2 = \int_A |f(x)| d\mu \tag{14}$$

من طبيعة واحدة .

ذلك أن الخاصية VII تبين أن وجود التكامل I_2 يستلزم وجود I_1 . في حالة التوابع البسيطة تأتي القضية العكسية للقضية السابقة من تعريف التكامل ؛ أما في الحالة العامة فنبرهن عليها بالإنتقال إلى النهاية وباستخدام النظرية 2 ؛ نستعمل أيضاً في الحالة الأخيرة المتراجحة :

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

4. σ - الجمعية والإستمرار المطلق لتكامل لوبيغ.

قدمنا في الفقرة السابقة خاصيات تكامل لوبيغ على مجموعة ثابتة. ونقدم الآن بعض خواص تكامل لوبيغ باعتبار العبارة:

$$F(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

كتابع مجموعة معرف على جماعة مجموعات قابلة للقياس. نثبت في البداية الخاصية التالية:

نظرية 3. إذا كان $A = \bigcup_n A_n$، حيث: $A_i \cap A_j = \varnothing$ من أجل $i \neq j$، فإن:

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu \qquad (15)$$

إن وجود تكامل الطرف الأيسر يستلزم وجود التكاملات والتقارب المطلق للسلسلة الواردة في الطرف الأيمن.

البرهان. لنتأكد في البداية من نتيجة النظرية من أجل تابع بسيط f يأخذ القيم:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

لتكن:

$$B_k = \{x : x \in A, f(x) = y_k\}$$

$$B_{nk} = \{x : x \in A_n, f(x) = y_k\}$$

عندئذ:

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k y_k\, \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) = \qquad (16)$$

$$= \sum_n \sum_k y_k\, \mu(B_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu$$

بما أن السلسلة $\sum y_k \mu(B_k)$ متقاربة مطلقاً حسب قابلية f للمكاملة على A ، وبما أن قياس كل مجموعة غير سالب ، فإن السلاسل الأخرى الواردة في (16) متقاربة مطلقاً.

إذا كان f تابعاً كيفياً فإن قابليته للمكاملة على A يستلزم ، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، وجود تابع بسيط g قابل للمكاملة على A يحقق الشرط :

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad (17)$$

لدينا من أجل g :

$$\int_A g(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x)\, d\mu \qquad (18)$$

حيث g قابل للمكاملة على كل مجموعة من المجموعات A_n ، والسلسلة (18) متقاربة مطلقاً. ينتج مما جاء آنفاً ومن المتراجحة (17) أن التابع f يقبل أيضاً المكاملة على كل مجموعة من المجموعات A_n ، وأن :

$$\sum_n \left| \int_{A_n} f(x)\, d\mu - \int_{A_n} g(x)\, d\mu \right| \leq \sum_n \varepsilon\mu(A_n) = \varepsilon\mu(A)$$

$$\left| \int_A f(x)\, d\mu - \int_A g(x)\, d\mu \right| \leq \varepsilon\mu(A)$$

بمراعاة (18) ينتج أن السلسلة : $\sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu$ متقاربة مطلقاً، وأن :

$$\left| \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu - \int_A f(x)\, d\mu \right| \leq 2\,\varepsilon\mu(A)$$

بما أن $\varepsilon > 0$ صغير صغراً كيفياً، نحصل على :

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu$$

نتيجة. إذا كان التابع f قابلاً للمكاملة على A ، فإنه يقبل المكاملة على كل مجموعة قابلة للقياس $A' \subset A$.

كنا أثبتنا أنه إذا كان التابع f يقبل المكاملة على المجموعة A فإن الفرض $A = \bigcup_n A_n$ وَ $A_i \cap A_j = \varnothing$ من أجل $j \neq i$ يستلزم أن f يقبل المكاملة على كل A_n والتكامل على A يساوي مجموع التكاملات على المجموعات A_n .
تقبل هذه النتيجة قضية عكسية وهي:

نظرية 4. إذا كان $A = \bigcup_n A_n$ وَ $A_i \cap A_j = \varnothing$ من أجل $j \neq i$ ، وكانت السلسلة:

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)| \, d\mu \tag{19}$$

متقاربة، فإن التابع f يقبل المكاملة على A وَ:

$$\int_A f(x) \, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) \, d\mu$$

البرهان. الشيء الجديد هنا بالنسبة للنظرية السابقة هو أن تقارب السلسلة (19) يستلزم قابلية المكاملة لـِ f على A .

نبرهن على النظرية أولاً في حالة تابع بسيط f يأخذ القيم f_i . نضع:

$$B_i = \{x : x \in A \ , \ f(x) = f_i\}$$

$$A_{ni} = A_n \cap B_i$$

حينئذ:

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i$$

$$\int_{A_n} |f(x)| \, d\mu = \sum_i |f_i| \, \mu(A_{ni})$$

إن تقارب السلسلة (19) يستلزم تقارب السلسلتين:

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \mu(B_i)$$

ثم إن تقارب سلسلة الطرف الأيمن يستلزم وجود التكامل :

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_i f_i \cdot \mu(B_i)$$

أما في الحالة العامة فنقترب من التابع f بواسطة تابع بسيط $\tilde{f}$ بحيث :

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon \tag{20}$$

حينئذ :

$$\int_{A_n} |\tilde{f}(x)|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon\, \mu(A_n)$$

ولما كانت السلسلة :

$$\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$$

متقاربة ، فإن تقارب السلسلة (19) يؤدي إلى تقارب السلسلة :

$$\sum_n \int_{A_n} |\tilde{f}(x)|\, d\mu$$

وهذا يعني ، حسب ما أثبتناه آنفاً ، أن التابع البسيط $\tilde{f}$ يقبل المكاملة على A . لكن المتراجحة (20) تبين ، عندئذ ، أن التابع الأول f يقبل أيضاً المكاملة على A. انتهى برهان النظرية .

متراجحة تشيبيتشاف (Tchebychev) . إذا كان $\varphi(x) \geq 0$ على A وَ $c > 0$ فإن :

$$\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x)\, d\mu \tag{21}$$

لرؤية ذلك نعتبر :

$$A' = \{x : x \in A \ , \ \varphi(x) \geq c\}$$

حينئذ :

$$\int_A \varphi(x)\,d\mu = \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu + \int_{A\setminus A'} \varphi(x)\,d\mu \geq \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu \geq c\,\mu(A')$$

نتيجة . إذا كان :

$$\int_A |f(x)|\,d\mu = 0$$

فإن $f(x) = 0$ أينما كان تقريباً .

لرؤية ذلك نلاحظ أن متراجحة تشيبيتشاف تعطي :

$$\mu\{x : x \in A \ , \ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\} \leq n \int_A |f(x)|\,d\mu = 0$$

من أجل كل n . وبالتالي :

$$\mu\left\{x : x \in A, f(x) \neq 0\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x : x \in A \ , \ |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = 0$$

أثبتنا في الفقرة السابقة أن تكامل لوبيغ لكل تابع f على مجموعة ذات قياس منعدم، يساوي الصفر .

يمكن اعتبار القضية السابقة كحالة قصوى من النظرية الهامة التالية .

نظرية 5. (الاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ) . إذا كان $f(x)$ تابعاً قابلاً للجمع على المجموعة A ، نستطيع من أجل كل $\varepsilon > 0$ إيجاد $\delta > 0$ بحيث :

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon$$

من أجل كل مجموعة قابلة للقياس $e \subset A$ بحيث : $\mu(e) < \delta$.

البرهان. نلاحظ بادىء ذي بدء أن النظرية بديهية في الحالة التي يكون فيها التابع f محدوداً. ليكن إذن f تابعاً كيفياً، قابلاً للجمع على A. نضع:

$$A_n = \{x : x \in A \ , \ n \leq |f(x)| < n + 1\}$$

وَ:

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n \ , \ C_N = A \setminus B_N$$

وبالتالي ينتج من النظرية 3 أن:

$$\int_A |f(x)| \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| \, d\mu$$

نختار N بحيث يكون:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f(x)| \, d\mu = \int_{C_N} |f(x)| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

وليكن:

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$$

إذ كان الآن: $\mu(e) < \delta$ فإن:

$$\left|\int_e f(x) \, d\mu\right| \leq \int_e |f(x)| \, d\mu = \int_{e \cap B_N} f(x)| \, d\mu + \int_{e \cap C_N} |f(x)| \, d\mu$$

إن التكامل الأول الوارد في الطرف الأيمن من هذه المتراجحة أصغر من $\frac{\varepsilon}{2}$ أو يساويه (الخاصية V)؛ أما فيما يخص التكامل الثاني فهو لايتجاوز التكامل المأخوذ على المجموعة C_N بأكملها، وبالتالي، فهو أصغر من $\frac{\varepsilon}{2}$ أو يساويه. إذن:

$$\int_e |f(x)| \, d\mu < \varepsilon$$

تؤدي خاصيات التكامل كتابع لمجموعة، وهي الخاصيات المثبتة أعلاه، إلى النتيجة التالية.

ليكن f تابعاً غير سالب قابلاً للجمع على الفضاء X بالنسبة للقياس μ. عندئذ يكون التابع

$$F(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

معرفاً من أجل كل مجموعة قابلة للقياس $A \subset X$، وغير سالب و σ - جمعياً أي أنه يحقق الشرط: إذا كان $A = \bigcup_n A_n$ وَ $A_i \cap A_j = \varnothing$ من أجل $i \neq j$، فإن $F(A) = \sum_n F(A_n)$.

بعبارة أخرى، فإن تكامل تابع غير سالب، باعتباره تابع مجموعة، يتمتع بكل خاصيات قياس σ - جمعي.

إن هذا القياس معرف على σ - الجبر المعرف عليه القياس الأول μ، أما العلاقة التي تربط هذين القياسين فهي أن المساواة: $\mu(A) = 0$ تستلزم المساواة $F(A) = 0$.

5. الانتقال إلى النهاية تحت رمز تكامل لوبيغ.

كثيراً ما تطرح مسألة الانتقال إلى النهاية تحت رمز المجموع، أو مسألة المكاملة حداً حداً لسلسلة متقاربة (وهي مسألة ترد إلى المسألة الأولى).

نثبت في التحليل التقليدي أن هناك شرطاً كافياً يجعل هذا الانتقال ممكناً، وهو أن يكون تقارب المتتالية (أو السلسلة) المعتبرة منتظماً.

نبرهن هنا على بعض النظريات الخاصة بالانتقال إلى النهاية تحت رمز تكامل لوبيغ وهي تعتبر تعميمات بعيدة المدى بالنسبة للنظريات الموافقة لها في التحليل التقليدي.

نظرية 6. (لوبيغ). لتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع على A، متقاربة نحو f إذا كانت لدينا المتراجحة التالية من أجل كل n:

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

حيث φ تابع يقبل المكاملة على A ، فإن النهاية f تابع يقبل المكاملة على A وَ :

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \to \int_A f(x)\, d\mu$$

البرهان . نستنتج من فرض النظرية بسهولة أن $|f(x)| \leq \varphi(x)$. وقد لاحظنا في الفقرة 3 (الخاصية VII) أن التابع f يقبل عندئذ المكاملة على A . ليكن $\varepsilon > 0$. من النظرية 5 ، يوجد $\delta > 0$ بحيث : $\mu(B) < \delta$ يستلزم :

$$\int_B \varphi(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \tag{22}$$

ثم من نظرية إيغوروف ، يمكن اختيار B بحيث تكون $\mu(B) < \delta$ والمتتالية متقاربة بانتظام نحو f على $C = A \setminus B$. يوجد إذن عدد N بحيث من أجل $N \leq n$ وَ $x \in C$ نستنتج :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}$$

حينئذ :

$$\int_A f(x)\, d\mu - \int_A f_n(x)\, d\mu =$$

$$= \int_C [f(x) - f_n(x)]\, d\mu + \int_B f(x)\, d\mu - \int_B f_n(x)\, d\mu$$

بما أن $|f(x)| \leq \varphi(x)$ وَ $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ ، يأتي بمراعاة (22) أن :

$$\left|\int_A f(x)\, d\mu - \int_A f_n(x)\, d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

انتهى البرهان .

نتيجة . إذا كان : ثابتاً $= M \geq |f_n(x)|$ وَ $f_n \to f$ فإن :

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu$$

ملاحظة. بما أن قيمة التكامل لاتتعلق بقيم التابع على مجموعة ذات قياس منعدم، يكفي أن يكون تقارب المتتالية $\{f_n\}$ في النظرية 6 تقارباً أينما كان تقريباً، وأن تتحقق كل متراجحة $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ أينما كان تقريباً.

نظرية 7. (ب لوفي B. Levi) لتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع قابلة للمكاملة على A بحيث:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots$$

وبحيث تكون مجموعة تكاملات هذه التوابع محدودة من الأعلى بثابت K أي:

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \leq K$$

عندئذ تقبل المتتالية $\{f_n\}$ أينما كان تقريباً على A نهاية (منتهية)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{23}$$

ويقبل التابع f المكاملة على A ولدينا:

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu$$

نلاحظ أنه يمكن تعريف التابع f على المجموعة (ذات القياس المنعدم) التي لاتوجد فيها النهاية (23) وذلك بطريقة كيفية، مثلاً، بوضع $f(x) = 0$ على هذه المجموعة.

البرهان. سنفرض أن $0 \leq f_1(x)$ لأنه يمكن رد الحالة العامة بسهولة إلى الحالة السابقة بالانتقال إلى التوابع:

$$\bar{f}_n = f_n - f_1$$

نعتبر المجموعة:

$$\Omega = \{x : x \in A \quad , \ f_n(x) \to \infty\}$$

من السهل أن نرى بأن: $\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$ حيث:

$$\Omega_n^{(r)} = \{x : x \in A \quad , \; f_n(x) > r\}$$

ثم من متراجحة تشيبيتشاف (21) يأتي:

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leq \frac{K}{r}$$

لما كان $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \ldots$ يمكن أن نكتب:

$$\mu(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}) \leq \frac{K}{r}$$

لدينا أيضاً الاحتواء التالي من أجل كل r:

$$\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$$

ولذا: $\mu(\Omega) \leq \frac{K}{r}$. بما أن r كيفي، يأتي:

$$\mu(\Omega) = 0$$

وهو ما يثبت أن المتتالية الرتيبة $\{f_n(x)\}$ تقبل أينما كان تقريباً على A نهاية منتهية $f(x)$.

نرمز بـA_r لمجموعة النقاط $x \in A$ التي تتحقق من أجلها:

$$r - 1 \leq f(x) < r = 1, 2, \ldots$$

ونضع $\varphi(x) = r$ على A_r.

عندما ننتهي من البرهان على قابلية المكاملة لـ$\varphi(x)$ على A تصبح نظريتنا نتيجة مباشرة من النظرية 6. نضع:

$$B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r$$

لما كانت التوابع f_n وَ f محدودة على B_s ولدينا دوماً $\varphi(x) \leq f(x) + 1$ ، نستطيع أن نكتب :

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, d\mu \leq \int_{B_s} f(x)\, d\mu + \mu(A) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)\, d\mu + \mu(A) \leq K + \mu(A)$$

من جهة أخرى :

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, d\mu = \sum_{r=1}^{s} r \cdot \mu(A_r)$$

بما أن هذه المجاميع محدودة نستنتج تقارب السلسلة :

$$\sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \mu(A_r) = \int_A \varphi(x)\, d\mu$$

وهكذا يتضح أن قابلية المكاملة للتابع φ على A قد أثبتت . نستطيع تعويض الشرط القائل بأن المتتالية $f_n(x)$ متزايدة في النظرية 7 بالشرط القائل أن هذه المتتالية متناقصة ، والسبب بديهي .

نتيجة . إذا كانت $0 \leq \psi_n(x)$ وَ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu < \infty$$

فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ متقاربة أينما كان تقريباً على A ، وَ :

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu$$

نظرية 8. (فاتو Fatou) إذا كانت متتالية توابع $\{f_n\}$ قابلة للقياس وموجبة ، متقاربة نحو f أينما كان تقريباً على A وَ :

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leq k$$

فإن التابع f يقبل المكاملة على A وَ :

$$\int_A f(x)\, d\mu \leq k$$

البرهان. نضع :

$$\cdot\ \varphi_n(x) = \operatorname*{Inf}_{k \geq n} f_k(x)$$

إن التوابع φ_n قابلة للقياس لأن :

$$\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geq n} \{x : f_k(x) < c\}$$

من جهة أخرى : $0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$ ، وبالتالي فإن التوابع φ_n تقبل المكاملة ولدينا :

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \leq \int_A f_n(x)\, d\mu \leq k$$

أخيراً :

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \dots$$

وَ :

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

أينما كان تقريباً . إذن بتطبيق النظرية السابقة على المتتالية $\{\varphi_n\}$ نحصل على النتيجة المنصوص عليها .

.6 تكامل لوبيغ على مجموعة ذات قياس غير منته .

كنا نفرض منذ البداية ، عند الحديث عن التكامل وخاصياته ، بأن التوابع المعتبرة معطاة على مجموعات ذات قياسات منتهية . ورغم ذلك فإننا

نضطر في الكثير من الأحيان إلى اعتبار توابع معطاة على مجموعة ذات قياس غير منته، قد تكون هذه المجموعة مثلاً مستقيماً مزوداً بقياس لوبيغ. ومنه يتضح أهمية توسيع مفهوم التكامل ليشمل هذه الحالة. سوف نقتصر على تناول أهم حالة وهي التي تكون فيها المجموعة المعتبرة X على شكل اتحاد قابل للعد مؤلف من مجموعات ذات قياسات منتهية:

$$X = \bigcup_n X_n \ , \ \mu(X_n) < \infty \tag{24}$$

إذا كانت المجموعة X، المزودة بالقياس μ، تكتب على شكل اتحاد قابل للعد من مجموعات قياساتها منتهية، فإن القياس μ على X يسمى قياساً σ - منتهياً (راجع الفقرة 3، 3§). إن قياس لوبيغ على المستقيم، مثلاً، وعلى المستوى وعلى فضاء ذي n بعداً، قياس σ - منته. نحصل على مثال لقياس لا يتمتع بخاصية القياس σ - المنتهي بتزويد كل نقطة من المستقيم العددي بالوزن 1، حينئذ نستطيع اعتبار كل المجموعات الجزئية لهذا المستقيم كقابلة للقياس: ذلك أن المجموعات المنتهية ذات قياسات منتهية، أما باقي المجموعات فهي ذات قياس غير منته.

تسمى كل متتالية متزايدة $\{X_n\}$ من المجموعات الجزئية القابلة للقياس X متتالية معمقة إذا حققت الشرط (24)، ندخل الآن التعريف التالي.

تعريف 4. نقول عن تابع قابل للقياس f، معرف على مجموعة X مزودة بقياس σ - منته μ، أنه يقبل الجمع على X إذا قبل الجمع على كل مجموعة جزئية قابلة للقياس $A \subset X$ قياسها منته، وكانت النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{An} f(x)\, d\mu \tag{25}$$

موجودة من أجل كل متتالية معمقة $\{X_n\}$، ولا تتعلق باختيار هذه المتتالية. تسمى هذه النهاية تكامل f على X، ونرمز لها بـ:

$$\int_X f(x)\, d\mu$$

من الواضح أن التعريف السابق من أجل كل تابع f، منعدم خارج مجموعة ذات قياس منته، يكافىء التعريف المعطى في الفقرة 3.

ملاحظة. نستطيع توسيع تعريف تكامل تابع بسيط، المعطى في الفقرة 2 بدون أي تعديل إلى الحالة التي يكون فيها القياس غير منته. من الواضح أنه يجب أن نفرض في هذه الحالة لكي يقبل تابع بسيط الجمع بأن هذا التابع يأخذ قيمه غير المنعدمة على مجموعة ذات قياس منته. إن تعريف قابلية الجمع المعطاة في الفقرة الثالثة ذو علاقة مباشرة بفرض انتهاء قياس المجموعة X. ذلك أنه إذا كان $\mu(X) = \infty$ فإن التقارب المنتظم لمتتالية توابع بسيطة قابلة للقياس $\{\varphi_n\}$ لا يستلزم عموماً تقارب متتالية تكاملاتها (اعط مثالاً!).

تمتد النتائج المقدمة ضمن الفقرتين 3 وَ 4 في حالة قياس منته، في خطوطها العريضة، إلى التكاملات على مجموعات ذات قياس غير منته.

إن الفرق الأساسي فيما يتعلق بهذه النتائج هو أنه إذا كان $\mu(X) = \infty$ فإن التوابع القابلة للقياس والمحدودة على X ليست دوماً قابلة للمكاملة. نلاحظ بصفة خاصة هنا أن كل ثابت غير منعدم تابع لا يقبل المكاملة على X.

يمكن للقارئ أن يتأكد من أن نظريات لوبيغ ولوفي وفاتو تبقى قائمة في حالة قياس غير منته.

7. مقارنة تكامل لوبيغ بتكامل ريمان.

نريد الآن دراسة أوجه الشبه بين تكامل لوبيغ وتكامل ريمان. نقتصر هنا على أبسط الحالات وهي تلك التي يكون فيها قياس لوبيغ معرفاً على المستقيم العددي.

نظرية 9. إذا كان تكامل ريمان:

$$I = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

موجوداً، فإن التابع f يقبل المكاملة على $[a, b]$ بمفهوم لوبيغ ولدينا :

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu = I$$

البرهان. نعتبر تجزئة لقطعة المستقيم $[a, b]$ إلى 2^n جزءاً بالنقاط :

$$z_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$$

ونعتبر مجاميع داربو (Darboux) الموافقة لهذه التجزئة :

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}$$

$$\omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{nk}$$

حيث M_{nk} وَ m_{nk} هما الحد الأعلى والحد الأدنى على التوالي للتابع f على القطعة :

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k$$

من تعريف تكامل ريمان يأتي :

$$I = \lim_{n \to \infty} \Omega_n = \lim_{n \to \infty} \omega_n$$

نضع :

$$\bar{f}_n(x) = M_{nk}, x_{k-1} \leq x < x_k$$

$$\underline{f}_n(x) = m_{nk}, x_{k-1} \leq x < x_k$$

يمكن أن نعرف التابعين $\bar{f}_n$ وَ $\underline{f}_n$ بطريقة كيفية عند النقطة $x = b$.
نتأكد بسهولة من أن :

$$\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x)\, d\mu = \Omega_n \quad , \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x)\, d\mu = \omega_n$$

لما كانت المتتالية $\{\bar{f}_n\}$ متناقصة والمتتالية $\{\underline{f}_n\}$ متزايدة، لدينا:

$$\bar{f}_n(x) \to f(x) \geq \bar{f}(x)$$

$$\underline{f}_n(x) \to \underline{f}_n(x) \leq f(x)$$

وذلك أينما كان تقريباً.

من نظرية ب لوفي يأتي:

$$\int_{[a,b]} \bar{f}(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = I = \lim_{n\to\infty} \omega_n = \int_{[a,b]} \underline{f}(x)\, dx$$

ومنه:

$$\int_{[a,b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)|\, d\mu = \int_{[a,b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\, d\mu = 0$$

ولذا:

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = 0$$

وذلك أينما كان تقريباً؛ أي:

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$$

وبالتالي:

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu = I$$

وهو المطلوب في النظرية.

من السهل أن نعطي أمثلة لتوابع محدودة على قطعة مستقيمة كيفية، قابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ وغير قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان (مثلاً، تابع ديركليت السالف الذكر، أي التابع على $[0, 1]$ الذي يأخذ القيمة 1 من أجل كل x ناطق والقيمة 0 من أجل كل x غير ناطق). ليس هناك توابع تقبل المكاملة بمفهوم ريمان من بين التوابع غير المحدودة، لكن هناك من بينها

توابع تقبل المكاملة بمفهوم لوبيغ. نلاحظ بصفة خاصة أن كل تابع $0 \leq f(x)$ بحيث يكون تكامله بمفهوم ريمان:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

موجوداً من أجل كل $\varepsilon > 0$ وبحيث يقبل نهاية منتهية I لما $\varepsilon \to 0$، هو تابع يقبل المكاملة على $[a, b]$ بمفهوم لوبيغ، ولدينا:

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

إن التكامل الموسع:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

في الحالة التي تكون فيها:

$$\lim \int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\, dx = \infty$$

غير موجود بمفهوم لوبيغ لأن قابلية المكاملة للتابع $f(x)$ تستلزم قابلية المكاملة للتابع $|f(x)|$ حسب الخاصية VIII من الفقرة 3. إن التكامل التالي مثلاً:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx$$

موجود كتكامل موسع (فهو نصف متقارب) لريمان لكنه غير موجود كتكامل للوبيغ.

إذا اعتبرنا تابعاً على كل المستقيم العددي (أو على نصف المستقيم) فإن تكامل ريمان لمثل هذا التابع لا يمكن أن يوجد إلّا باعتباره تكاملا موسعاً. هنا أيضاً نستطيع القول أنه إذا كان مثل هذا التكامل متقارباً مطلقاً فإن تكامل لوبيغ الموافق له موجود وله نفس القيمة؛ أما إذا كان هذا التكامل نصف متقارب فقط فإن التابع المعتبر لايقبل المكاملة بمفهوم لوبيغ، فالتابع:

$$\frac{\sin x}{x}$$

مثلاً لا يقبل المكاملة بمفهوم لوبيغ على المستقيم العددي لأن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$$

على الرغم من أن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

موجود، كما نعلم، ويساوي π.

§ 6. الجداءات المباشرة لجماعات المجموعات وللقياسات.

نظرية فوبيني (Fubini)

تلعب النظريات الخاصة برد تكامل مزدوج (أو تكامل مضاعف، عموماً) إلى تكاملات بسيطة دوراً هاماً في التحليل. فيما يخص نظرية التكاملات المضاعفة للوبيغ فإن النتيجة الأساسية هي نظرية فوبيني التي سنبرهن عليها في آخر هذا البند.

نبدأ أولا بتقديم بعض المفاهيم والنتائج الأولية والتي لها أهمية في حد ذاتها.

1. جداءات جماعات المجموعات.

تسمى المجموعة Z المؤلفة من الثنائيات المرتبة (x, y) حيث $X \ni x$ وَ $Y \ni y$، الجداء المباشر للمجموعتين X وَ Y ونرمز لها بِـ $X \ni Y$. بطريقة

مماثلة ، تسمى المجموعة Z المؤلفة من المتتاليات المنتهية المرتبة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ حيث $X_k \ni x_k$ الجداء المباشر للمجموعات $X_1, X_2 ..., X_n$ ونرمز لها بـ :

$$Z = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \boxtimes X_k$$

أما في الحالة الخاصة التي يكون فيها :

$$X_1 = X_2 = ... = X_n = X$$

فإن المجموعة Z هي القوة من الرتبة n للمجموعة X :

$$Z = X^n$$

وهكذا فإن الفضـاء الحسـابي الذي بعده n : $\mathbf{R}^n$ هو القوة من الرتبة n للمستقيم العددي $\mathbf{R}^1$. إن مكعب الوحدة I^n أي مجموعة عناصر $\mathbf{R}^n$ التي لها احداثيات تحقق الشروط :

$$0 \leq x_k \leq 1 \quad , \quad k = 1, 2, ..., n$$

هو القوة من الرتبة n لقطعة الوحدة $I^1 = [0, 1]$.

إذا كانت $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 ..., \mathcal{G}_n$ جماعات أجزاء من المجموعات : $X_1, X_2, ..., X_n$ فإن :

$$\mathcal{R} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times ... \times \mathcal{G}_n$$

ترمز إلى جماعة أجزاء المجموعة $X = \boxtimes X_k$ التي يمكن كتابتها على الشكل :

$$A = A_1 \times A_2 ... \times A_n$$

حيث $\mathcal{G}_k \ni A_k$.

إذا كان $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = ... = \mathcal{G}_n$ ، فإن $\mathcal{R}$ هو القوة من الرتبة n للجماعة $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{R} = \mathcal{G}^n$$

نلاحظ مثلاً أن جماعة متوازيات الوجوه في $\mathbf{R}^n$ هي القوة من الرتبة n لجماعة القطع المستقيمة في $\mathbf{R}^1$.

نظرية 1. إذا كانت $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, ..., \mathcal{G}_n$ أنصاف حلقات، فإن: $\mathcal{R} = \boxtimes \mathcal{G}_k$ نصف حلقة أيضاً.

البرهان. طبقاً لتعريف نصف حلقة، يجب أن نتأكد من أنه إذا كان A وَ B عنصرين من $\mathcal{R}$ فإن $\mathcal{R} \ni A \cap B$، زيادة على ذلك إذا كان $B \subset A$ فإن $A = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ حيث $C_1 = B$، $C_i \cap C_j = \emptyset$ من أجل $i \neq j$ وَ $\mathcal{R} \ni C_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. نقتصر على الحالة $n = 2$.

I. ليكن: $A \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ وَ $B \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$؛ هذا يعني أن:

$$A = A_1 \times A_2 \quad , \quad A_1 \in \mathcal{G}_1, A_2 \in \mathcal{G}_2$$

$$B = B_1 \times B_2 \quad , \quad B_1 \in \mathcal{G}_1, B_2 \in \mathcal{G}_2$$

فإن:

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

وبما أن:

$$A_1 \cap B_1 \in \mathcal{G}_1 \quad , \quad A_1 \cap B_2 \in \mathcal{G}_2$$

لدينا:

$$A \cap B \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$$

II. نفرض الآن بأن لدينا إضافة إلى ذلك:

$$B_1 \subset A_1, B_2 \subset A_2$$

لما كان $\mathcal{G}_1$ وَ $\mathcal{G}_2$ نصفي حلقتين، نستنتج التحليلين التاليين:

$$A_1 = B_1 \cup B_1^{(1)} \cup \dots \cup B_1^{(k)}$$

$$A_2 = B_2 \cup B_2^{(1)} \cup \dots \cup B_2^{(l)}$$

عندئذ :

$$A = A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cup \left(B_1 \times B_2^{(1)}\right) \cup \dots \cup \left(B_1 \times B_2^{(l)}\right) \cup$$

$$\cup \left(B_1^{(1)} \times B_2\right) \cup \left(B_1^{(1)} \times B_2^{(1)}\right) \cup \dots \cup \left(B_1^{(1)} \times B_2^{(l)}\right) \cup$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cup \left(B_1^{(k)} \times B_2\right) \cup \left(B_1^{(k)} \times B_2^{(1)}\right) \cup \dots \cup \left(B_1^{(k)} \times B_2^{(l)}\right)$$

إن الحد الأول من هذا التحليل هو $B_1 \times B_2 = B$ وكل الحدود تنتمي إلى الجماعة $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$. انتهى البرهان.

هذا، ولا يمكننا أن نستنتج - عموماً - من الفرض القائل أن الجماعات $\mathcal{G}_k$ حلقات (أو σ - جبور) أن الجداء $\underset{k}{\boxtimes} \mathcal{G}_k$ حلقة (σ - جبر، على التوالي).

2. جداءات القياسات.

لتكن : $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ أنصاف حلقات نعطي عليها القياسات :

$$\mu_1(A_1), \mu_2(A_2), \dots, \mu_n(A_n), A_k \in \mathcal{G}_k$$

قصد التبسيط، نفرض أن هذه القياسات منتهية على الرغم من أن الاستدلالات والنتائج الموالية تمتد بدون تغيير معتبر إلى حالة القياسات σ - المنتهية (راجع مثلا، [21]).

نعرف على نصف الحلقة :

$$\mathcal{R} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_n \qquad (1)$$

القياس :

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots \times \mu_n \tag{2}$$

بواسطة الدستور :

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) \dots \mu_n(A_n) \tag{3}$$

حيث :

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

يجب أن نبرهن أيضاً بأن $\mu(A)$ يساوي بالفعل قياساً، أي أن تابع المجموعة جمعي. نضع من أجل ذلك $n = 2$.

ليكن التحليل :

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^{(K)} \;,\; B^{(i)} \cap B^{(j)} = \varnothing \;,\; i \neq j$$

$$B^{(k)} = B_1^{(k)} \times B_2^{(k)}$$

من التوطئة 2، 5§، الفصل I، ينتج وجود التحليلين :

$$A_1 = \bigcup_m C_1^{(m)} \;,\; A_2 = \bigcup_n C_2^{(n)}$$

بحيث أن المجموعات $B_1^{(k)}$ اتحادات لبعض $C_1^{(m)}$ والمجموعات $B_2^{(k)}$ اتحادات لبعض $C_2^{(n)}$. من البديهي أن :

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) = \sum_n \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\,\mu_2(C_2^{(n)}) \tag{4}$$

$$\mu\left(B^{(k)}\right) = \mu_1(B_1^{(k)})\,\mu_2(B_2^{(k)}) = \sum_m \sum_n \mu_1(C_1^{(m)})\,\mu_2(C_2^{(n)}) \tag{5}$$

حيث يمتد المجموع في (5) إلى m وَ n بحيث $C_1^{(m)} \subset B_1^{(k)}$، $C_2^{(n)} \subset B_2^{(k)}$، ويحوي الطرف الأيمن في المساواة (4) مرة واحدة كل حد يظهر في الأطراف اليمنى من العلاقات (5). وبالتالي :

$$\mu(A) = \sum_k \mu(B_k)$$

وهو المطلوب .

وهكذا نرى بصفة خاصة أن جمعية القياسات الأولية على الفضاء الاقليدي ذي n بعداً ينتج من جمعية القياس الخطي على المستقيم .

يُسمى القياس (2) المعرف على نصف الحلقة (1) بواسطة الدستور (3) جداء القياسات : $\mu_1, ..., \mu_n$.

نظرية 2. إذا كانت القياسات : $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ σ – جمعية ، فإن قياس الجداء $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times ... \times \mu_n$ σ – جمعي أيضاً .

البرهان. نقتصر على الحالة التي يكون فيها $n = 2$. نرمز بِـ λ_1 لامتداد القياس μ_1 حسب لوبيغ .

ليكن $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ ، حيث تمثل المجموعات C ، C_n عناصر من الجماعة $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ ، أي :

$$C = A \times B \ , \ A \in \mathfrak{S}_1 \ , \ B \in \mathfrak{S}_2$$

$$C_n = A_n \times B_n \ , \ A_n \in \mathfrak{S}_1 \ , \ B_n \in \mathfrak{S}_2$$

نفرض أن المجموعات : $A, A_1, A_2, ...$ محتواة في الفضاء X . نضع من أجل كل $x \ni X$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \mu_2(B_n) & , x \in A_n \\ 0 & , x \notin A_n \end{cases}$$

من السهل أن نرى من أجل كل $x \ni A$ بأن :

$$\sum_n f_n(x) = \mu_2(B)$$

ولذا نستطيع أن نكتب بفضل نظرية لوفي (النظرية 7، § 5) :

$$\sum_n \int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \int_A \mu_2(B)\, d\lambda_1 = \lambda_1(A)\cdot\mu_2(B) = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B)$$

لكن :

$$\int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \mu_2\ (B_n)\,\mu_1(A_n) = \mu(C_n)$$

وبالتالي :

$$\sum_n \mu(C_n) = \mu(C)$$

إذا كانت القياسات : $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ σ – جمعية معطاة على التوالي، على σ – الجبور $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ فإن جداءها يصبح تعريفاً امتداد القياس $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$. نرمز له بِـ :

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$$

أو بِـ : $\otimes\, \mu_k$

بصفة خاصة، من أجل :

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$$

نحصل على القوة من الرتبة n للقياس.

$$\mu^n = \otimes\, \mu_k\ ,\ \mu_k = \mu$$

وهكذا نرى، مثلاً، بأن قياس لوبيغ الذي بعده n، هو القوة من الرتبة n لقياس لوبيغ الخطي μ.

نلاحظ أن قياس الجداء تام دوماً (حتى ولو كانت القياسات : $\mu_1, \ldots, \mu_n$ غير تامة).

3. التعبير عن قياس مجموعة من المستوى بدلالة تكامل القياس الخطي لمقاطعه. التعريف الهندسي لتكامل لوبيغ.

لتكن G ساحة من المستوى (x, y) محدودة بالعمودين $x = a$ وَ $x = b$ والمنحنيين $y = \varphi(x)$ وَ $y = \psi(x)$.

نعلم أن مساحة الساحة G تكتب بدلالة التكامل:

$$V(G) = \int_a^b \{\varphi(x) - \psi(x)\} \, dx$$

يمثل الفرق $\varphi(x_0) - \psi(x_0)$ طول مقطع الساحة G وفق الشاقول $x = x_0$.

إن السؤال المطروح هنا هو تعميم هذه الوسيلة (لحساب المساحات) إلى حالة جداء قياسين كيفيين:

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

نفرض فيما يلي أن القياسين μ_x وَ μ_y معرفان على σ-جبرين σ- جمعيين ويتمتعان بشرط التمام (إذا كان $B \subset A$ وَ $\mu(A) = 0$ فإن B يقبل القياس) الذي يتمتع به، كما أشرنا لذلك سابقاً، كل امتداد للوبيغ.

نضع:

$$A_x = \{y : (x, y) \in A\} \quad \text{،} \quad (x \text{ مثبت})$$

$$A_y = \{x : (x, y) \in A\} \quad \text{،} \quad (y \text{ مثبت})$$

إذا كان X وَ Y محورين عدديين (أي أن $X \times Y$ مستو) فإن A_{x_0} هو المسقط على المحور Y لمقطع المجموعة A وفق المستقيم $x = x_0$.

نظرية 3. إذا تحققت الشروط الوارد ذكرها أعلاه نحصل[1] على المساواة

---

(1) نلاحظ أن المكاملة على X تُردُّ إلى المكاملة على المجموعة $\bigcup_y A_y \subset X$ التي ينعدم خارجها التابع الذي يطلب مكاملته. بطريقة مماثلة لدينا: $\int_{\bigcup_x A_x} = \int_Y$.

التالية من أجل كل مجموعة A قابلة للقياس بالنسبة لِـ μ (نكتب : A μ – قابلة للقياس) :

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x)\, d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y)\, d\mu_y$$

البرهان . يكفي أن نبرهن على المساواة :

$$\mu(A) = \int_X \varphi_A(x)\, d\mu_x \ , \ \varphi_A(x) = \mu_y(A_x) \tag{6}$$

لأن الجزء الثاني من النظرية يماثل تماماً جزءها الأول . ينبغي الملاحظة أيضاً بأن النظرية تحوي مباشرةً النتيجة التالية : من أجل كل العناصر x تقريباً (بمفهوم القياس μ_x) فإن المجموعات A_x تقبل القياس من أجل القياس μ_y . وتضم أيضاً النتيجة : التابع $\varphi_A(x)$ يقبل القياس بالنسبة للقياس μ_x . ولولاه لفقد الدستور (6) معناه .

إن القياس μ هو الامتداد حسب لوبيغ للقياس .

$$m = \mu_x \times \mu_y$$

المعرف على الجماعة $\mathcal{G}_m$ المؤلفة من المجموعات ذات الشكل :

$$A = A_{y_0} \times A_{x_0}$$

نلاحظ بخصوص هذه المجموعات أن الدستور (6) بديهي لأن لدينا في هذه الحالة :

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_y(A_{x_0}) & , \ x \in A_{y_0} \\ 0 & , \ x \notin A_{y_0} \end{cases}$$

كما يُعمم الدستور (6) أيضاً بدون صعوبة إلى مجموعات $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ التي يمكن تمثيلها بواسطة اتحادات منتهية من مجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى من $\mathcal{G}_m$.

يعتمد البرهان على المساواة (6) في الحالة العامة على التوطئة التالية التي تعتبر في حد ذاتها نتيجة ذات أهمية بالنسبة لنظرية امتدادات لوبيغ .

توطئة. من أجل كل مجموعة μ - قابلة للقياس A، توجد مجموعة B من الشكل :

$$B = \bigcap_n B_n \quad , \quad B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

$$B_n = \bigcup_n B_{nk} \quad , \quad B_{n1} \subset B_{n2} \subset \dots \subset B_{nk} \subset \dots$$

حيث تنتمي المجموعات B_{nk} إلى $\mathcal{R}(\mathcal{G}_m)$ وَ $A \subset B$ وَ $\mu(A) = \mu(B)$.

البرهان. من تعريف قابلية القياس، من أجل كل n معطى نستطيع دكّ المجموعة A في مجموعة $C_n = \bigcup_r \Delta_{n,r}$ تساوي اتحاد مجموعات Δ_{nr} من $\mathcal{G}_m$ بحيث :

$$\mu(C_n) < \mu(A) + \frac{1}{n}$$

نضع $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$، نلاحظ أن المجموعات B_n تكتب على الشكل $B_n = \bigcup_s \delta_{ns}$ حيث : $\delta_{ns} \in \mathcal{G}_m$. أخيراً، بوضع $B_{nk} = \bigcup_{s=1}^{k} \delta_{ns}$ نحصل على جماعة مجموعات B_{nk} تتمتع بالخاصيات المطلوبة. انتهى برهان التوطئة.

تعمم المساواة (6) بسهولة من المجموعات $B_{nk} \in \mathcal{R}(\mathcal{G}_n)$ إلى المجموعات B_n وَ B بواسطة نظرية لوفي (النظرية 7، §5)، وذلك لأن :

$$\varphi_{B_n}(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_{B_{nk}}(x) \quad , \quad \varphi_{B_{n1}} \leq \varphi_{B_{n2}} \leq \dots$$

$$\varphi_B(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_{B_n}(x) \quad , \quad \varphi_{B_1} \geq \varphi_{B_2} \geq \dots .$$

نلاحظ أن هذه العلاقات محققة عند كل نقطة x وذلك بفضل استمرار القياس. إذا كان $\mu(A) = 0$ فإن : $\mu(B) = 0$ وَ :

$$\varphi_B(x) = \mu_y(B_x) = 0$$

أينما كان تقريباً.

لما كان $A_x \supset B_x$ من أجل كل x تقريباً، فإن المجموعة A_x تقبل القياس وَ:

$$\varphi_A(x) = \mu_y(A_x) = 0$$

$$\int \varphi_A(x)\, d\mu_x = 0 = \mu(A)$$

وبالتالي فإن الدستور (6) محقق من أجل كل مجموعة A ذات قياس منعدم. نضع في الحالة العامة A على الشكل $A = B \backslash C$، حيث:

$$\mu(C) = 0$$

وهذا بفضل المساواة (7).

لما كان الدستور (6) محقق من أجل المجموعتين B وَ C، فمن السهل أن نرى بأنه محقق أيضاً من أجل المجموعة A. بذلك ينتهي برهان النظرية 3.

ليكن الآن Y محوراً عددياً، وَ μ_y القياس الخطي للوبيغ وَA مجموعة نقاط (x, y) من الشكل:

$$\{(x, y) : x \in M \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{8}$$

حيث M مجموعة μ_x - قابلة للقياس كيفية وَ $f(x)$ تابع قابل للمكاملة موجب.

في هذه الحالة:

$$\mu_y(A_x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in M \\ 0 & , \quad x \notin M \end{cases}$$

وَ:

$$\mu(A) = \int_M f(x)\, d\mu_x$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية:

نظرية 4. إن تكامل لوبيغ لتابع قابل للجمع وموجب $f(x)$ يساوي القياس : $\mu = \mu_x \times \mu_y$ للمجموعة A ، المعرف بالعلاقة (8) .

إذا كان X محوراً عددياً وَ M قطعة مستقيمة وَ $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة بمفهوم ريمان ، فإن هذه النظرية تعبر عن المعنى الهندسي المعروف للتكامل بصفته مساحة الساحة الواقعة تحت بيان التابع .

4. نظرية فوبيني . نعتبر الجداء $U = X \times Y \times Z$ ، ولتكن القياسات : μ_x ، μ_y ، μ_z المعطاة ، بالترتيب ، على المجموعات X ، Y ، Z ، عندئذ يمكن تعريف القياس :

$$\mu_\mu = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu_z$$

كما يلي :

$$(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu_z$$

أو بِـ :

$$\mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu_z)$$

من السهل التأكد من أن هذين التعريفين متكافئان .

تعتبر النظرية التالية أهم نظرية في التكاملات المضاعفة .

نظرية 5. (فوبيني) . ليكن μ_x وَ μ_y قياسين معرفين على σ – جبرين ، σ – جمعيين وتامين ، وليكن $f(x, y)$ تابعاً يقبل المكاملة من أجل القياس :

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

على مجموعة :

$$A \subset X \times Y \tag{9}$$

عندئذ[1] :

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y\right) d\mu_x = \tag{10}$$

$$= \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y)\, d\mu_x\right) d\mu_y$$

(1) نفس الهامش الوارد بخصوص النظرية 3 المقدمة أعلاه .

نلاحظ أن نص هذه النظرية يؤكد ضمنياً على وجود التكاملين الداخليين (في (10)) من أجل كل القيم تقريباً للمتغير الذي نأخذ من أجله التكاملين الخارجيين.

البرهان. نجري في البداية البرهان في الحالة $0 \leq f(x, y)$. من أجل ذلك نعتبر الجداء:

$$U = X \times Y \times Z$$

الذي يكون فيه Z هو المستقيم العددي ويكون فيه قياس الجداء هو:

$$\lambda = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu^1 = \mu \otimes \mu^1$$

حيث يرمز μ^1 لقياس لوبيغ الخطي.

لتكن w مجموعة جزئية من U، المعرفة بالشرط:

$$(x, y, z) \in w$$

إذا كان $(x, y) \in A$ وَ $0 \leq z \leq f(x, y)$.
من النظرية 4، لدينا:

$$\lambda(w) = \int_A f(x, y)\, d\mu \tag{11}$$

من جهة أخرى، ينتج من النظرية 3 أن:

$$\lambda(w) = \int_X \xi(w_x)\, d\mu_x \tag{12}$$

حيث $\xi = \mu \otimes \mu^1$ وَ w_x يرمز لمجموعة الثنائيات (y, z) بحيث $(x, y, z) \in w$. بالإضافة إلى ذلك، نستخلص من النظرية 4 أيضاً أن:

$$\xi(w_x) = \int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \tag{13}$$

بمقارنة (11)، (12)، (13) نحصل على:

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x$$

وهو المطلوب.

تُردُّ الحالة العامة إلى الحالة السابقة بفضل العلاقات:

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$$

$$f^+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}$$

$$f^-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2}$$

ملاحظة. إن وجود التكاملين:

$$(14) \quad \begin{cases} \int_X \left(\int_{A_x} f\, d\mu_y \right) d\mu_x \\ \int_Y \left(\int_{A_y} f\, d\mu_x \right) d\mu_y \end{cases}$$

لا يستلزم عموماً، كما يُبين المثالان أسفله، صحة العلاقات (10) ولا قابلية المكاملة للتابع $f(x, y)$ على A. لكن إذا وجد على الأقل واحد من التكاملين:

$$(15) \quad \begin{cases} \int_X \left(\int_{A_x} |f(x, y)|\, d\mu_y \right) d\mu_x \\ \int_Y \left(\int_{A_y} |f(x, y)|\, d\mu_x \right) d\mu_y \end{cases}$$

فإن التابع $f(x, y)$ يقبل المكاملة على A ولدينا العلاقات (10).

لرؤية ذلك نفرض مثلاً أن التكامل الأول من التكاملين (15) موجود وأنه يساوي M. إن التابع $f_n(x, y) = \min\{|f(x, y)|, n\}$ يقبل القياس ومحدود وبالتالي يقبل الجمع على A. من نظرية فوبيني:

$$(16) \qquad \int_A f_n(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f_n(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x \leq M$$

تشكل المتتالية f_n متتالية رتيبة موجبة متقاربة أينما كان تقريباً نحو

$|f(x, y)|$. نستنتج من نظرية لوفي، بمراعاة المتراجحة (16)، أن التابع $|f(x, y)|$ يقبل الجمع على A. وعندئذ يكون التابع $f(x, y)$ قابلاً للجمع أيضاً ويتمتع بشروط نظرية فوبيني. ومنه المطلوب.

أثبتنا نظرية فوبيني بافتراض أن القياسين μ_x وَ μ_y (إذن μ أيضاً) منتهيان. ورغم ذلك فإن النظرية محققة أيضاً في حالة القياسات σ - المنتهية (راجع، مثلا، [21]).

نعتبر مثالين لتوابع يتحقق من أجلها وجود التكاملين (14) مع عدم صحة العلاقات (10).

1. ليكن:

$$A = [-1, 1]^2$$

وَ:

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

حينئذ:

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx = 0 \qquad , \ y \neq 0$$

وَ:

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dy = 0 \qquad , \ x \neq 0$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dy \right) dx = 0$$

لكن التكامل المزدوج بمفهوم لوبيغ على المربع غير موجود لأن:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |f(x, y)|\, dx\, dy = \int_{0}^{1} dr \int_{0}^{2\pi} \frac{|\sin \varphi \cdot \cos \varphi|}{r}\, d\varphi = 2 \int_{0}^{1} \frac{dr}{r} = \infty$$

2. ليكن:

$$A = [0, 1]^2$$

وَ :

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n} & , \frac{1}{2^n} \le x \le \frac{1}{2^{n-1}} \; ; \; \frac{1}{2^n} \le y < \frac{1}{2^{n-1}} \\ -2^{2n+1} & , \frac{1}{2^{n+1}} \le x < \frac{1}{2^n} \; ; \; \frac{1}{2^n} \le y < \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 \text{ في الحالات الأخرى} & \end{cases}$$

يمكن أن نثبت بأن :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = 0$$

وَ :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = 1$$

الفصل السـادس.

تكامل لوبيغ غير المحدود. نظرية الاشتقاق.

نعتبر في هذا الفصل تكامل لوبيغ المتعلق بصفة خاصة بالتوابع المعرفة على المستقيم، وذلك بافتراض أن القياس الذي نأخذ من أجله هذا التكامل هو القياس الخطي للوبيغ المعتاد.

إذا كان f تابعاً قابلاً للجمع، معرفاً على فضـاء قابل للقياس X وكان لدينا قياس μ معرّف على X، فإن التكامل:

$$\int_A f(x)\, d\mu \qquad (*)$$

موجود مـن أجل كل مجموعة قـابلـة للقيـاس $A \subset X$، وإذا اعتبرنـا f مثبتـاً فإن هذا التكامل يمثل تابعاً لمجموعات معرفاً من أجل كل المجموعات القابلة للقياس $A \subset X$. يسمى مثل هذا التكامل تكامل لوبيغ غير المحدود. يمكن أن نأخذ مكان الفضـاء X قطعة مستقيمة من المستقيم العددي، وذلك كحالة خاصة. بالإضـافة إلى ذلك، إذا كانت A قطعة مستقيمة أيضاً، فإن التكامل (*) يصير تابعاً لنقطتين وهما حدَا (أو طرفَا) القطعة المستقيمة A. نفرض في هذه الحالة ان القياس μ هو قياس لوبيغ على المستقيم ونكتب dt بدل $d\mu$. بعد تثبيت احد الحدين للتكامل (*)، نثبّت مثلاً الحد الأدنى، يمكننا دراسة خاصيات التكامل $\int_a^x f(t)\, dt$ المـأخوذ على القطعة المستقيمة $[a, x]$، وهذا باعتباره تابعاً للمتغير x. ستؤدي بنا هذه المسـألة إلى اعتبار بعض الاصناف الهـامة من التوابع المعرفة على المستقيم. سنتعرض للمسـألة العامة المتعلقة بدراسة تكامل لوبيغ (لتابع f مثبت) بصفته تابعاً لمجموعة ضمن 5 §.

نحن نعلم من خلال الدروس الأولية في التحليل العلاقتين الأسـاسيتين التاليتين المعبرتين عن العلاقة الموجودة بين عمليتي الاشتقاق والمكاملة: إذا كان f تابعاً مستمراً وَ F تابعاً يقبل الاشتقاق باستمرار، فإن:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (1$$

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad (2$$

ومنه يُطرح السؤلان المواليان: هل تبقى المساواة 1) قائمة من أجل التوابع القابلة للجمع بمفهوم لوبيغ؟ ثم ما هو (أكبر) صنف من التوابع التي تتحقق من أجلها المساواة 2)؟

نعالج في الفقرات الموالية موضوع هذين السؤالين.

§ 1. التوابع الرتيبة. قابلية اشتقاق التكامل بالنسبة لحده الأعلى.

1. الخاصيات الاساسية للتوابع الرتيبة.

نبدأ بدراسة خاصيات تكامل لوبيغ:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

باعتباره تابعاً لحده الأعلى. نورد أولاً الخاصية البديهية والهامة التالية: إذا كان التابع f غير سالب، فإن التابع $\Phi(x)$ رتيب وغير متناقص (أي متزايد). من جهة أخرى فإن كل تابع قابل للجمع يساوي حتماً فرق تابعين قابلين للجمع وغير سالبين:

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t) \qquad (2)$$

ولذا نستطيع تفكيك التكامل (1) إلى فرق تابعين رتيبين وغير متناقصين. إذن تُردُّ دراسة تكامل لوبيغ بصفته تابعاً لحده الأعلى إلى دراسة التوابع الرتيبة من نفس النمط. تتمتع التوابع الرتيبة (بغض النظر عن مصدرها) بسلسلة من الخاصيات البسيطة والهامة نعيدها إلى الأذهان فيما يلي:

نذكّر في البداية ببعض المفاهيم. سنعتبر دوماً توابع معطاة على قطعة مستقيمة إلّا إذا نُصّ على خلاف ذلك.

نقول عن تابع f إنه رتيب وغير متناقص إذا أدى الشرط $x_1 \leq x_2$ إلى

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

نعرف بطريقة مماثلة تابعاً رتيباً غير متزايد.

ليكن f تابعاً كيفياً على المستقيم. تسمى النهاية[1]

$$\lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h)$$

(عند وجودها) النهاية من اليمين للتابع f عند النقطة x_0 ونرمز لها بـ$f(x_0 + 0)$. ونعرّف النهاية من اليسار للتابع f عند النقطة x_0 بطريقة مماثلة، ونرمز لها بـ$f(x_0 - 0)$. تعني المساواة $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ بطبيعة الحال إما أن التابع f مستمر عند النقطة x_0، وإما أن لـf تقطّعا غير رئيسي. تسمى كل نقطة توجد من أجلها هاتان النهايتان مع عدم تساويهما، نقطة تقطع من النمط الأول؛ ويُسمى الفرق $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ قفزة التابع f عند النقطة x_0.

إذا كان $f(x_0) = f(x_0 - 0)$ فإننا نقول عن التابع f إنه مستمر من اليسار عند النقطة x_0؛ وإذا كان $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ نقول ان f مستمر من اليمين عند هذه النقطة.

نبين فيما يلي الخاصيات الأساسية للتوابع الرتيبة. لتثبيت فكر القارئ سنتكلم عن التوابع الرتيبة غير المتناقصة، لكنه من الواضح أن كل ما سنورده الآن في هذا الصدد يُعمَّم مباشرة إلى التوابع الرتيبة غير المتزايدة.

1. إن كل تابع f رتيب وغير متناقص على $[a, b]$ تابع قابل للقياس ومحدود، وبالتالي قابل للجمع.

ذلك أن لدينا تعريفاً:

(1) يرمز $h \to 0^+$ إلى كون h يسعى إلى 0 وهو دوماً موجب.

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad , \quad \forall\, x \in [a, b]$$

من جهة أخرى فإن المجموعة :

$$A_c = \{x \ ; \ f(x) < c\}$$

من أجل كل ثابت c ، هي إما قطعة مستقيمة وإما مجال نصف مفتوح (أو مجموعة خالية) . لرؤية ذلك نفرض وجود نقاط x تحقق $f(x) < c$ وليكن d الأعلى لمجموعة هذه النقاط . حينئذٍ نلاحظ ان A_c تمثل إما القطعة المستقيمة $[a, d]$ وإما المجال نصف المفتوح $[a, d)$.

2. لا يمكن أن تكون تقطعات تابع رتيب إلّا من النمط الأول .

لرؤية ذلك نفرض أن x_0 نقطة ما من $[a, b]$ وأن : $x_n \to x_0$ حيث $x_n < x_0$. عندئذٍ تكون المتتالية $\{f(x_n)\}$ محدودة من الأدنى ومن الأعلى (مثلاً بـ$f(a)$ وَ $f(b)$) . وبالتالي فإن لهذه المتتالية نقطة تراكم واحدة على الأقل . من ناحية اخرى نلاحظ أن وجود عدة نقاط تراكم لمثل هذه المتتالية يناقض بطبيعة الحال فرض رتابة التابع f. وهكذا فإن $f(x_0 - 0)$ موجود . نثبت بطريقة مماثلة وجود $f(x_0 + 0)$.

ليس من الضروري أن يكون تابع رتيب مستمراً. ورغم ذلك فإن الخاصية التالية قائمة .

3. إن مجموعة نقاط تقطع تابع رتيب مجموعة ، على الأكثر ، قابلة للعد .

ذلك أن مجموع قفزات عددها منته ، لتابع f رتيب على $[a, b]$ ، لا يتجاوز $f(b) - f(a)$. وبالتالي ، من أجل كل n فإن عدد القفزات المتجاوزة لِـ$\frac{1}{n}$ عدد منته . فإذا جمعنا عدد القفزات من أجل $n = 1, 2, \ldots$ وجدنا عددها الـكلي منتهياً أو غير منته وقابل للعد .

نذكر من بين أبسط التوابع الرتيبة التوابع المسماة توابع القفزات . ويمكن أن ننشئها بالطريقة التالية . نفرض أن لدينا متتالية منتهية أو قابلة للعد من النقاط

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

على القطعة $[a, b]$. نلحق بكل نقطة x_n من هذه النقاط عدداً موجباً h_n بحيث يكون $\sum_n h_n < \infty$. نُعرّف بعد ذلك تابعاً f على $[a, b]$ بوضع:

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n \tag{3}$$

من الواضح أن هذا التابع رتيب وغير متناقص. بالإضافة إلى ذلك فهو مستمر من اليسار[1] عند كل نقطة، أما نقاط تقطعه فهي النقاط $\{x_n\}$، والقفزة عند كل نقطة x_n تساوي h_n[2]. ذلك أن:

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n$$

وبما أن كل x_n محقق للشرط $x > x_n$ يحقق أيضاً الشرط: $x - \varepsilon > x_n$ من أجل $\varepsilon > 0$ صغير بكفاية فإن النهاية الأخيرة تساوي $\sum_{x_n < x} h_n = f(x)$، وهكذا:

$$f(x-0) = f(x)$$

إذا تساوت النقطة x مع أية نقطة من النقاط x_n، مثلاً $x = x_{n_0}$، فإن:

$$f(x_{n_0}+0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_{n_0}+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{x_n < x_{n_0}+\varepsilon} h_n = \sum_{x_n \leq x_{n_0}} h_n$$

أي:

$$f(x_{n_0}+0) - f(x_{n_0}-0) = h_{n_0}$$

أخيراً إذا لم يتساوى x مع أية نقطة من النقاط x_n فإن تابع القفزات يصبح مستمراً عند هذه النقطة (أثبت ذلك!).

(1) لو كان التابع f معرفاً بالدستور:

$$f(x) = \sum_{x_n \leq x} h_n$$

لكان f مستمراً من اليمين. سنفرض من الآن فصاعداً أن كل التوابع المعتبرة مستمرة من اليسار، إلّا إذا نص على خلاف ذلك.

(2) شريطة أن يكون $x_n \neq b$ مهما كان n، لأن $x_n = b$ لا يدخل في المجموع (3). لمراعاة القفزة عند b يجب اعتبار المجال نصف المفتوح $(a, b+\varepsilon)$، $(0 < \varepsilon)$ بدل $[a, b]$.

نسمي من الآن فصاعداً كل تابع يمكن الحصول عليه انطلاقاً من الانشاء السابق تابع قفزات. من أبسط توابع القفزات هي التوابع الدرجية التي يمكن وضع نقاط تقطعها على شكل متتالية رتيبة:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

أما في الحالة العامة فنشير إلى أن توابع القفزات لها بنية أكثر تعقيداً؛ فمثلاً إذا كانت $\{x_n\}$ مجموعة النقاط الناطقة (أو الكسرية) في القطعة $[a, b]$ وَ $h_n = \frac{1}{2^n}$، فإن الدستور (3) يُعرّف تابع قفزات متقطعاً من أجل x ناطق ومستمراً من أجل x غير ناطق.

4. يمكن أن نمثل كل تابع رتيب ومستمر من اليسار بطريقة وحيدة على شكل مجموع تابع مستمر ورتيب وتابع قفزات (مستمر من اليسار).

ليكن f تابعاً غير متناقص ومستمراً من اليسار، ولتكن: $x_1, x_2, \dots$ نقاط تقطعه وَ $h_1, h_2, \dots$ قفزاته عند هذه النقاط. نضع:

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n$$

إن الفرق:

$$\varphi = f - H$$

تابع مستمر وغير متناقص. للبرهان على ذلك نعتبر الفرق:

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [f(x'') - f(x')] - [H(x'') - H(x')]$$

حيث $x'' > x'$. إن الطرف الأيمن لهذه المساواة يمثل الفرق بين التزايد الكلي للتابع f على القطعة $[x', x'']$ ومجموع قفزات f على هذه القطعة. من الواضح أن هذا الفرق غير سالب، وهو ما يثبت أن التابع φ غير متناقص. من جهة أخرى، باعتبار نقطة ما x^*، يمكن كتابة:

$$\varphi(x^* - 0) = f(x^* - 0) - H(x^* - 0) = f(x^* - 0) - \sum_{x_n < x^*} h_n$$

$$\varphi(x^* + 0) = f(x^* + 0) - H(x^* + 0) = f(x^* + 0) - \sum_{x_n \leq x^*} h_n$$

ومنه

$$\varphi(x^* + 0) - \varphi(x^* - 0) = f(x^* + 0) - f(x^* - 0) - h^* = 0$$

(حيث h^* يمثل قفزة التابع H عند النقطة x^*) . ومنه ينتج بمراعاة الاستمرار من اليسار لِـ f وَ H ان φ تابع مستمر بالفعل.

2. قابلية اشتقاق تابع رتيب

ننتقل الآن إلى السؤال المتعلق بمعرفة ما إذا كان كل تابع رتيب يقبل مشتقاً.

نظرية 1 (هـ. لوبيغ) . إن كل تابع رتيب f معرف على قطعة $[a, b]$ يقبل مشتقاً أينما كان تقريباً على هذه القطعة.

نُقدم في البداية بعض المفاهيم اللازمة للبرهان على هذه النظرية.

نعلم أن مشتق تابع f عند نقطة x_0 هو تعريفاً نهاية النسبة:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4}$$

عندما يسعى x إلى x_0 . إلّا ان هذه النهاية قد تكون غير موجودة. لكن المقادير الأربعة التالية (التي يمكن أن تأخذ قيماً منتهية أو غير منتهية) لها دائماً معنى:

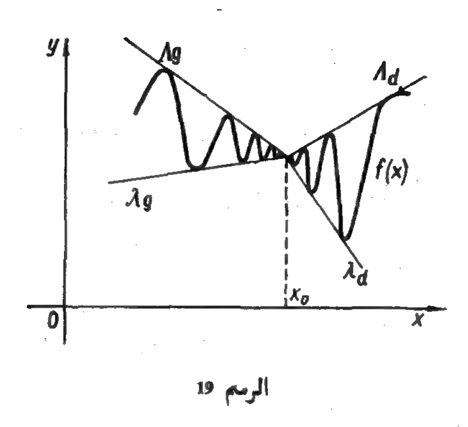
Λ_d: النهاية العليا للنسبة (4) عندما يؤول x إلى x_0 من اليمين (أي بحيث $0 < x - x_0$) . يسمى هذا المقدار العدد المشتق الأعلى من اليمين.

λ_d: (وهو العدد المشتق الأدنى من اليمين) يمثل النهاية الدنيا للنسبة (4) عندما يؤول x إلى x_0 من اليمين.

Λ_g: (وهو العدد المشتق الأعلى من اليسار) يُمثل النهاية العليا للنسبة (4) عندما يؤول x إلى x_0 من اليسار.

λ_g: (وهو العدد المشتق الأدنى من اليسـار) يُمثل النهاية الدنيا للنسبة (4) عندما يؤول x إلى x_0 من اليسـار.

مثلنا في الرسم 19 المستقيمات التي لها معاملات زاويّة $\wedge_d$، λ_d، $\wedge_g$، λ_g على التوالي. من الواضح ان لدينا دوماً: $\wedge_d \leq \lambda_d$ وَ $\wedge_g \leq \lambda_g$.



الرسم 19

إذا كان $\wedge_d$ وَ λ_d متساويين فإن قيمتيهما المشتركة تمثل المشتق من اليمين للتابع $f(x)$ عند النقطة x_0. كما ان المساواة $\wedge_g = \lambda_g$ تستلزم ان القيمة المشتركة لِـ λ_g وَ $\wedge_g$ تساوي المشتق من اليسـار للتابع $f(x)$ عند النقطة x_0. إن وجود مشتق منته للتابع f عند x_0 يكافئ تساوي الأعداد المشتقة الأربعة للتابع f وانتهاء قيمها المشتركة. ولذا نستطيع صياغة نظرية لوبيغ بالشكل التالي:

من أجل تابع رتيب على $[a, b]$ لدينا العلاقات التالية:

$$- \infty < \lambda_g = \lambda_d = \wedge_g = \wedge_d < \infty$$

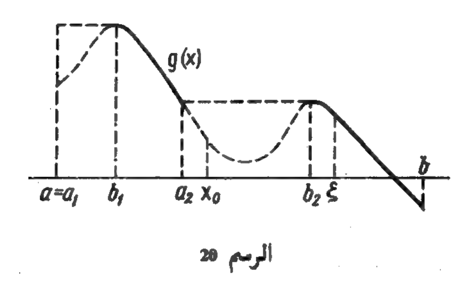
محققة ايثما كان تقريباً على $[a, b]$.

تمرين. ليكن: $f^*(x) = - f(x)$. ما هي العلاقات الموجودة بين الأعداد المشتقة لِـ f^* والأعداد المشتقة f؟

نفس السؤال عند الانتقال من $f(x)$ إلى $f(-x)$.

يعتمد برهان نظرية لوبيغ على التوطئة الموالية والتي سنستخدمها مستقبلاً .

لندخل التعريف التالي ، ليكن $g(x)$ تابعاً مستمراً معطى على القطعة $a \leq x \leq b$. نقول عن نقطة x_0 من هذه القطعة انها غير مرئية من اليمين من أجل التابع g ، إذا وجدت نقطة ξ $(x_0 < \xi \leq b)$ بحيث $g(x_0) < g(\xi)$ (الرسم 20) .



الرسم 20

توطئة (ف . ريس F. Riesz) . إذا كان g تابعاً مستمراً فإن مجموعة النقاط غير المرئية من اليمين مجموعة مفتوحة في $[a, b]$، وبالتالي يمكن تمثيلها على شكل اتحاد منته أو قابل للعد لمجالات مفتوحة وغير متقاطعة مثنى مثنى (a_k, b_k) (ويحتمل ان يضاف إلى هذه المجالات مجال نصف مفتوح يحوي الحد a) . من أجل كل مجال من هذه المجالات لدينا $g(a_k) \leq g(b_k)$.

برهان التوطئة . إذا كانت x_0 نقطة غير مرئية من اليمين من أجل g فإن كل النقاط المجاورة لـx_0 تمتع بنفس الخاصية (أي عدم الرؤية) وذلك بفضل استمرار g . ولذا فإن مجموعة النقاط التي تمتع بهذه الخاصية مجموعة مفتوحة في $[a, b]$. ليكن (a_k, b_k) أحد المجالات المكوّنة لهذه المجموعة . لنفرض أن :

$$g(a_k) > g(b_k) \tag{6}$$

توجد حينئذٍ داخل هذا المجال نقطة x_0 بحيث $g(x_0) > g(b_k)$. لتكن x^* النقطة الموجودة في أقصى يمين نقاط (a_k, b_k) المحققة لـ$g(x) = g(x_0)$.

بما أن $x^* \in (a_k, b_k)$ فإنه توجد نقطة $\xi > x^*$ بحيث $g(\xi) > g(x^*)$. لا يمكن أن تنتمي هذه النقطة إلى المجال (a_k, b_k) لأن x^* توجد في أقصى يمين نقاط هذا المجال المحققة لِـ $g(x) = g(x_0)$ ، في حين أن $g(b_k) < g(x_0)$.

من ناحية أخرى نلاحظ أن المتراجحة $b_k < \xi$ مستحيلة ذلك ان صحتها تؤدي إلى $g(\xi) > g(x_0) > g(b_k)$ مع العلم أن b_k لا تمثل نقطة غير مرئية من اليمين . إن التناقض المحصل عليه آنفاً يبين ان المتراجحة (6) مستحيلة . ومنه يأتي $g(a_k) \leq g(b_k)$. وبذلك ينتهي البرهان على التوطئة . يستطيع القارئ ان يتأكد بسهولة من ان لدينا في الحقيقية : $g(a_k) = g(b_k)$ شريطة ان يكون $a_k \neq a$.

ملاحظة . نقول عن نقطة x_0 إنها غير مرئية من اليسار من أجل تابع مستمر $g(x)$ إذا وجدت نقطة $\xi < x_0$ تحقق $g(\xi) > g(x_0)$. يمكن القيام باستدلال مماثل للسابق للتأكد من أن مجموعة النقاط غير المرئية من اليسار اتحاد منته أو قابل للعد من المجالات غير المتقاطعة مثنى مثنى (a_k, b_k) ، ومن أن $g(a_k) \geq g(b_k)$.

ننتقل الآن إلى برهان نظرية لوبيغ . نقدم في البداية البرهان باعتبار الفرض الإضافي الذي ينص على ان f تابع مستمر وغير متناقص . من أجل هذا الغرض ، يكفي ان نبرهن بأن لدينا المتراجحتين التاليتين أينما كان تقريباً :

$$1)\ \Lambda_d < \infty \qquad \text{وَ} \qquad 2)\ \lambda_g > \Lambda_d$$

بالفعل ، نضع $f^*(x) = -f(-x)$. إن f^* تابع رتيب وغير متناقص معرف على القطعة $[-b, -a]$. إذا كان Λ_d^* وَ λ_g^* يمثلان العددين المشتقين الأعلى من اليمين والأدنى من اليسار ، على التوالي ، للتابع f^* فإننا نتأكد بدون أية صعوبة (أنظر التمرين السابق) من أن :

$$\Lambda_g(x) = \Lambda_d^*(-x)$$

$$\lambda_d(x) = \lambda_g^*(-x)$$

وهذا من أجل كل $x \in (a, b)$.

وبالتالي إذا طبقنا المتراجحة 2) على $f^*(x)$ نحصل على :

$$\lambda_d \geq \wedge_g \tag{7}$$

اينما كان تقريباً على $[a, b]$. من تلك المتراجحات ومن تعريف الأعداد المشتقة نستنتج :

$$\wedge_d \leq \lambda_g \leq \wedge_g \leq \lambda_d \leq \wedge_d$$

وهذا يعني أن :
$$\lambda_g = \lambda_d = \wedge_g = \wedge_d$$

لنثبت أولاً ان $\wedge_d < \infty$ اينما كان تقريباً. إذا كان $\wedge_d = \infty$ عند نقطة x_0 فإنه من أجل كل ثابت C توجد نقطة $\xi > x_0$ بحيث :

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > C$$

أي :

$$f(\xi) - f(x_0) > C(\xi - x_0)$$

أو :

$$f(\xi) - C\,\xi > f(x_0) - C\,x_0$$

بعبارة أخرى فإن النقطة x_0 غير مرئية من اليمين من أجل التابع :

$$g(x) = f(x) - C\,x$$

من توطئة ف. ريس يأتي أن مجموعة النقاط المتمتعة بهذه الخاصية مجموعة مفتوحة، ومن أجل كل مجال (a_k, b_k) من المجالات المكونة لهذه المجموعة لدينا :

$$f(a_k) - C\,a_k \leq f(b_k) - C\,b_k$$

أي أن

$$f(b_k) - f(a_k) \geq C(b_k - a_k)$$

نقسم على C ونجمع المتراجحات المحصل عليها في كافة المجالات (a_k, b_k) فنحصل على :

$$\sum_k (b_k - a_k) \leq \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{C} \leq \frac{f(b) - f(a)}{C}$$

بما أن بامكان الثابت C ان يكون كبيراً بالقدر الذي نريده، نستنتج ان مجموعة النقاط التي يتحقق من أجلها $\wedge_d = \infty$ مجموعة يمكن تغطيتها بجماعة مجالات مجموع اطوالها صغير بالقدر الذي نريده. بالتالي فإن هذه المجموعة ذات قياس منعدم.

بنفس الطريقة، وبالاعتماد على توطئة ف. ريس، نستطيع البرهان على ان: $\lambda_g \geq \wedge_d$ اينما كان تقريباً، إلّا أنه ينبغي هنا تطبيق التوطئة المذكورة مرتين. لنعتبر عددين ناطقين c وَ C بحيث: $0 < c < C < \infty$ ولنضع $\varrho = \frac{c}{C}$. نرمز بـ $E_{c,C}$ لمجموعة النقاط x التي تحقق $\wedge_d > C$ وَ $\lambda_g < c$. عندما ننتهي من البرهان على $\mu E_{c,C} = 0$ فإننا نستنتج من ذلك ان $\lambda_g \geq \wedge_d$ أينما كان تقريباً لأنه من الواضح ان مجموعة النقاط التي تحقق $\lambda_g < \wedge_d$ تساوي اتحاداً منتهياً أو قابلاً للعد من مجموعات ذات الشكل $E_{c,C}$.

لنثبت الآن هذه المتراجحة الأساسية:

من أجل كل مجال $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ لدينا:

$$\mu\big(E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)\big) \leq \varrho(\beta - \alpha)$$

لرؤية ذلك نعتبر في البداية مجموعة النقاط $x \in (\alpha, \beta)$ التي تحقق $\lambda_g < c$. نلحق بكل نقطة x من هذه المجموعة نقطة $\xi < x$ بحيث:

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - c} < c \quad \text{أو :} \quad f(\xi) - c(\xi) > f(x) - cx$$

وبالتالي فإن مثل هذه النقطة x نقطة غير مرئية من اليسار من أجل التابع $f(x) - cx$ وحسب توطئة ف. ريس (انظر الملاحظة السابقة) فإن مجموعة كل هذه النقاط x اتحاد منته أو قابل للعد من مجالات $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$ وَ $f(\alpha_k) - c\,\alpha_k \geq f(\beta_k) - c\,\beta_k$ أي:

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq c(\beta_k - \alpha_k) \tag{8}$$

نعتبر على كل مجال من المجالات (α_k, β_k) المجموعة G_k للنقاط x التي تحقق $\wedge_d > C$. نطبق من جديد توطئة ف. ريس (كما طبقت في برهان المتراجحة $\wedge_d < \infty$، من أجل النقاط غير المرئية من اليمين) فنستنتج أن G_k اتحاد منته أو قابل للعد من المجالات غير المتقاطعة $(\alpha_{k_j}, \beta_{k_j})$، وأن :

$$\beta_{k_j} - \alpha_{k_j} \leq \frac{1}{C} [f(\beta_{k_j}) - f(\alpha_{k_j})] \tag{9}$$

من الواضح ان المجموعة $E_{c,C} \cap (\alpha, \beta)$ يمكن تغطيتها بجماعة من المجالات $(\alpha_{k_j}, \beta_{k_j})$؛ بالاعتماد على المتراجحات (8) وَ (9) نحصل على :

$$\sum_{k,j} (\beta_{k_j} - \alpha_{k_j}) \leq \frac{1}{C} \sum_{k,j} [f(\beta_{k_j}) - f(\alpha_{k_j})] \leq$$

$$\leq \frac{1}{C} \sum_{k} [f(\beta_k) - f(\alpha_k)] \leq \frac{c}{C} \sum_{k} (\beta_k - \alpha_k)$$

$$\leq \varrho(\beta - \alpha)$$

وهكذا نكون قد أثبتنا المتراجحة الأساسية.

من السهل الآن البرهان على : $\mu E_{c,C} = 0$.

لهذا الغرض يكفي استعمال خاصية المجموعة $E_{c,C}$ المعبر عنها من خلال المتراجحة الأساسية.

توطئة. لتكن A مجموعة قابلة للقياس من القطعة $[a, b]$ بحيث :

$$\mu(A \cap (\alpha, \beta)) \leq \varrho(\beta - \alpha)$$

من أجل كل مجال $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$، حيث $0 < \varrho < 1$. عندئذٍ :

$$\mu A = 0$$

البرهان. ليكن $\mu A = t$. من أجل $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مفتوحة G تساوي اتحاداً قابلاً للعد من المجالات (a_m, b_m) بحيث:

$$A \subset G \quad \text{و} \quad \sum_m (b_m - a_m) < t + \varepsilon .$$

نضع $t_m = \mu[A \cap (a_m, b_m)]$. من الواضح $t = \sum\limits_m t_m$. وبالتالي، $t \leq \varrho \sum (b_m - a_m) < \varrho(t + \varepsilon)$، وبما أن $\varepsilon > 0$ اختياري نستنتج أن $\varrho t \leq \varrho t$. لكن $0 < \varrho < 1$، ومنه $t = 0$.

بذلك ينتهي برهان التوطئة وبها ينتهي أيضاً برهان النظرية 1.

أثبتنا إذن النظرية 1 بفرض أن التابع f مستمر. نلاحظ ان نفس الاستدلال السابق يمتد إلى الحالة التي يكون فيها f تابعاً رتيباً ومتقطعاً وذلك باستخدام تعميم توطئة ف. ريس إلى التوابع التي لها تقطعات من النمط الأول.

ليكن g تابعاً معرفاً على القطعة $[a, b]$، ليس له سوى تقطعات من النمط الأول. نقولَ عن نقطة $x_0 \in [a, b]$ انها نقطة غير مرئية من اليمين من أجل التابع $g(x)$ إذا وجدت نقطة $\xi > x_0$ بحيث:

$$\max [g(x_0 - 0) \; , \; g(x_0) \; , \; g(x_0 + 0)] < g(\xi)$$

حينئذٍ، وكما هو الحال بالنسبة لتابع مستمر g، فإن مجموعة النقاط غير المرئية من اليمين من أجل g هي مجموعة مفتوحة، ثم من أجل كل مجال (a_k, b_k) من المجالات المكونة لتلك المجموعة، لدينا:

$$g(a_k) \leq g(b_k)$$

على الرغم من طول برهان النظرية 1 فإن لهذه النظرية معنى حدسياً في غاية البساطة، لنشرح مثلاً لماذا يجب أن يكون العدد $\wedge_d$ (و $\wedge_g$ أيضاً) منتهياً اينما كان تقريباً. تُمثل النسبة $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ «معامل التمدد» للقطعة $[a, b]$ عند النقطة المعطاة x بواسطة التطبيق f. وبما أن هذا التطبيق يحوّل القطعة

المنتهية $[a,b]$ إلى قطعة منتهية $[f(a),f(b)]$ فإن هذا «التمدد» لا يمكن أن يكون غير منته على مجموعة ذات قياس موجب.

يستحسن في أغلب الأحيان استخدام النظرية التالية الخاصة بالاشتقاق حداً حداً لسلسلة توابع رتيبة، تسمى هذه النظرية احياناً «نظرية فوبيني الصغيرة».

نظرية 2. إذا كانت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x) \tag{10}$$

سلسلة متقاربة ايمًا كان، حيث F_n توابع رتيبة غير متناقصة على $[a,b]$، فإن هذه السلسلة تقبل ايمًا كان تقريباً الاشتقاق حداً حداً:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x)$$

البرهان. بما أنه بالإمكان تعويض $F_n(x)$ بِـ$F_n(x) - F_n(a)$ فإننا نستطيع افتراض بأن كل التوابع $F_n(x)$ غير سالبة وتنعدم عند $x = a$.

بفضل النظرية 1، توجد مجموعة $E \subset [a,b]$ قياسها $b - a$ تقبل التوابع $F_n(x)$ وَ $F(x)$ عليها مشتقات $F'_n(x)$ وَ $F'(x)$.

نعتبر نقطتين كيفيتين $x \in E$ وَ $\xi \in [a,b]$. لدينا:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \{F_n(\xi) - F_n(x)\}}{\xi - x} = \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}$$

بما ان الفروق $x - \xi$ وَ $F_n(\xi) - F_n(x)$ من نفس الاشارة (ذلك لأن التوابع رتيبة) فإن، من أجل كل N، لدينا:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \{F_n(\xi) - F_n(x)\}}{\xi - x} \leq \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}$$

بالانتقال إلى النهاية حيث نجعل ξ تسعى إلى x نحصل على :

$$\sum_{n=1}^{N} F_n'(x) \leq F'(x)$$

لما كان $0 \leq F_n'(x)$ من أجل كل n ، نستنتج :

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) \leq F'(x) \tag{11}$$

وهكذا يتضح ان سلسلة المشتقات $F_n'(x)$ متقاربة ايثما كان على E . لنثبت ان (11) مساواة من أجل كل العناصر x تقريباً . نلحق بكل k مجموعاً جزئياً $S_{n_k}(x)$ للسلسلة (10) بحيث :

$$0 \leq F(b) - S_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k}$$

بما أن التابع $F(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{m > n_k} F_m(x)$ غير متناقص ، لدينا :

$$0 \leq F(x) - S_{n_k}(x) < \frac{1}{2^k}$$

من أجل كل x ، وهذا يستلزم أن السلسلة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F(x) - S_{n_k}(x)] \tag{12}$$

المؤلفة من توابع غير متناقصة ، سلسلة متقاربة (يمكن القول أن هذا التقارب منتظم) أيثما كان على القطعة $[a, b]$. عندئذٍ ، وحسب ما سبق ، فإن السلسلة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F'(x) - S'_{n_k}(x)] \tag{13}$$

المحصل عليها انطلاقاً من (12) بالإشتقاق حداً حداً سلسلة متقاربة ايما كان تقريباً. وبالتالي فإن الحد العام للسلسلة (13) يؤول إلى الصفر ايما كان تقريباً، أي ان $S'_{n_k}(x) - F'(x)$ يؤول إلى الصفر ايما كان تقريباً. لكن لو كانت (11) متراجحة تامة لوجدنا أن كل المجاميع الجزئية غير متقاربة نحو $F'(x)$. وبالتالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x)$$

وهذا أيما كان تقريباً. ينتهي بذلك برهان النظرية.

نتيجة. يقبل كل تابع قفزات لِتابع رتيب مشتقاً منعدماً أيما كان تقريباً.

ذلك أن مثل هذا التابع مجموع لسلسلة متقاربة من التوابع غير متناقصة ذات الشكل:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq x_n \\ h_n & , x > x_n \end{cases}$$

وكل تابع F_n له مشتق منعدم أيما كان تقريباً.

3. مشتق تكامل بالنسبة لحده الأعلى.

بما أن التكامل:

$$\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t$$

لتابع قابل للجمع يساوي فرق تابعين رتيبين نستنتج من النظرية 1 مباشرة ما يلي:

نظرية 3. من أجل كل تابع قابل للجمع φ فإن المشتق

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t \tag{14}$$

موجود من أجل كل x تقريباً.

من المهـم أن نلاحظ اننا أثبتنا وجود المشتق (14) اينما كان تقريباً دون أن نتعرض للسؤال المتعلق بصحة المسـاواة:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x)$$

والواقع هو ان هذه المسـاواة صحيحة اينما كان تقريباً من أجل كل تابع قابل للجمع φ (أنظر 3 §).

2 §. التوابع ذات التغير المحدود

قادتنا مسـألة اشتقاق تكامل لوبيغ بالنسبة لحده الأعلى إلى اعتبار صنف التوابع التي يمكن تمثيلها على شكل فروق توابع رتيبة. نقدم في هذه الفقرة وصفاً ثانياً لهذه التوابع بدون اللجوء إلى مفهوم الرتابة ونعالج أهم خاصياتها.

نبدأ بالتعاريف الضرورية الموالية.

تعريف 1. نقول عن تابع f معرف على قطعة $[a, b]$ أنه تابع ذو تغيّر محدود، إذا وجد ثابت C بحيث من أجل كل تجزئة لِـ$[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

تتحقق المتراجحة:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C \tag{1}$$

إن كل تابع رتيب ذو تغيّر محدود، لأن المجموع الوارد في الطرف الأيسر من المتراجحة (1) لمثل هذا التابع لا يتعلق بالتجزئة المعتبرة وهو يسـاوي دوماً $|f(b) - f(a)|$.

تعريف 2. ليكن f تابعاً ذا تغيّر محدود. يسمى الحد الأعلى لمجاميع (1)

المـأخوذ بالنسبة لكل التجزئات المنتهية الممكنة للقطعة $[a, b]$ يسمى التغيّر الـكلي للتابع f على القطعة $[a, b]$ ونرمز له بِـ $V_a^b[f]$. وهكذا :

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

ملاحظة. يسمى كل تابع f معرف على كل المستقيم العددي تابعاً ذا تغيّر محدود إذا شكلت الأعداد $V_a^b[f]$ مجموعة محدودة تُسمى في هذه الحالة النهاية :

$$\lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} V_a^b[f]$$

التغير الـكلي للتابع f على المستقيم : $-\infty < x < \infty$ ، ونرمز لها بِـ : $V_{-\infty}^{\infty}[f]$.

لنعتبر الخاصيات الأسـاسية للتغير الـكلي لتابع :

1. من أجل كل ثابت α لدينا :

$$V_a^b[\alpha f] = |\alpha| \, V_a^b[f]$$

ذلك ما ينتج مباشرة من تعريف $V_a^b[f]$.

2. إذا كان f وَ g تابعين تغيّرهما محدود فإن $f + g$ تابع ذو تغيّر محدود أيضاً ولدينا :

$$V_a^b[f + g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g] \tag{2}$$

ذلك لأن :

$$\sum_k |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq \sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_k |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

وهذا من أجل كل تجزئة للقطعة $[a, b]$. ومنه ، ولما كان :

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$$

فإننا نحصل مباشرة على المتراجحة المعتبرة.

يستنتج من الخاصيتين 1 وَ 2 ان كل عبارة خطية لتوابع ذات تغيّر محدود (معرفة على قطعة معطاة $[a, b]$) تمثل هي الأخرى تابعاً ذا تغيّر محدود. بعبارة أخرى تشكل التوابع ذات التغيّر المحدود فضاء شعاعياً (لاحظ ان مجموعة التوابع الرتيبة لا تشكل فضاءً شعاعياً).

3. إذا كان $a < b < c$ فإن :

$$V_a^b [f] + V_b^c [f] = V_a^c [f] \tag{3}$$

لرؤية ذلك نعتبر أولاً تجزئة للقطعة $[a, c]$ بحيث تكون b نقطة من نقاط التجزئة ، مثلاً $x_r = b$. عندئذٍ :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{r} |f(x_k) - f(x_{k-1})| +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^b [f] + V_b^c [f] \tag{4}$$

نعتبر الآن تجزئة كيفية للقطعة $[a, c]$. من الواضح اننا إذا أضفنا نقطة لهذه التجزئة ، وبصفة خاصة النقطة b ، فإن المجموع :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

لا يصغر . وبالتالي فإن المتراجحة (4) محققة من أجل كل تجزئة للقطعة $[a, c]$، إذن :

$$V_a^c [f] \leq V_a^b [f] + V_b^c [f]$$

من جهة أخرى، من أجل $\varepsilon > 0$، توجد تجزئات للقطعتين $[a, b]$ وَ $[b, c]$ بحيث :

$$\sum_i |f(x'_i) - f(x'_{i-1})| > V_a^b [f] - \frac{\varepsilon}{2}$$

وَ :

$$\sum_j |f(x''_j) - f(x''_{j-1})| > V_b^c [f] - \frac{\varepsilon}{2}$$

بجمع هاتين التجزئتين نحصل على تجزئة جديدة للقطعة $[a, c]$ التي من أجلها نجد :

$$\sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_i |f(x'_i) - f(x'_{i-1})| + $$
$$+ \sum_j |f(x''_j) - f(x''_{j-1})| > V_a^b [f] + V_b^c [f] - \varepsilon$$

بما أن $\varepsilon > 0$ صغير بصفة اختيارية نستنتج أن

$$V_a^c [f] \geq V_a^b [f] + V_b^c [f] \tag{5}$$

من المساواة (4) والمتراجحة (5) نحصل على (3).

بما أن التغيّر الكلي لكل تابع على أية قطعة مستقيمة قيمة غير سالبة، نستنتج من الخاصية 3 مباشرة الخاصية الموالية :

4. إن التابع :

$$v(x) = V_a^x [f]$$

تابع رتيب غير متناقص.

5. إذا كان التابع f مستمراً من اليسار عند نقطة x^* فإن التابع v مستمر من اليسار أيضاً عند هذه النقطة.

لرؤية ذلك نعتبر عدداً معطى $\varepsilon > 0$. نختار $\delta > 0$ بحيث: $|f(x^*) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ بمجرد أن يكون $x^* - \delta < x \leq x^*$. نختار بعد ذلك تجزئة:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x^*$$

بحيث:

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

يمكن بدون تقييد عمومية المسألة افتراض:

$$x^* - x_{n-1} < \delta$$

(إذا كان الأمر غير ذلك نضيف إلى التجزئة المعتبرة نقطة جديدة، وهذا يصغر الفرق الوارد في الطرف الأيسر من المتراجحة 6). ومنه:

$$|f(x^*) - f(x_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي:

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$$

ومنه يأتي بالضرورة:

$$V_a^{x^*}[f] - V_a^{x_{n-1}}[f] < \varepsilon$$

أي

$$v(x^*) - v(x_{n-1}) < \varepsilon$$

بما أن التابع v رتيب وغير متناقص نستنتج أن: $v(x^*) - v(x) < \varepsilon$ من أجل كل x بحيث $x_{n-1} \leq x \leq x^*$. وهذا يعني بالضبط ان التابع v مستمر من اليسار عند x^*.

إذا كان التابع f مستمراً من اليمين عند نقطة x^*، يمكن باتباع استدلالات

مماثلة البرهان على أن التابع v مستمر من اليمين عند هذه النقطة. وبالتالي، إذا كان التابع f مستمراً عند هذه النقطة (أو على القطعة $[a, b]$ بأكملها) فإن الأمر كذلك فيما يخص التابع v.

ليكن f تابعاً اختيارياً ذا تغير محدود معرف على القطعة $[a, b]$ وليكن v تغيّره الكلي على $[a, x]$. نعتبر الفرق:

$$\varphi = v - f$$

إن هذا الفرق تابع رتيب غير متناقص. بالفعل، ليكن $x'' \geq x'$. عندئذٍ:

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [v(x'') - v(x')] - [f(x'') - f(x')] \tag{7}$$

من جهة أخرى لدينا دوماً:

$$|f(x'') - f(x')| \leq v(x'') - v(x') = V_{x'}^{x''}[f]$$

ومنه يأتي أن الطرف الأيمن من المساواة (7)، وبالتالي الطرف الأيسر أيضاً، قيمة غير سالبة.

وهكذا، بما أن:

$$f = v - \varphi$$

نحصل على النتيجة التالية.

نظرية 1. إن كل تابع ذي تغير محدود يساوي فرق تابعين رتيبين غير متناقصين.

إن القضية العكسية لهذه النتيجة بديهية؛ إن كل تابع يقبض التمثيل على شكل فرق تابعين رتيبين تابع ذو تغير محدود. وبالتالي فإن مجموعة التوابع القابلة للتمثيل على شكل فروق توابع رتيبة، وهي المجموعة المعتبرة في الفقرة السابقة، ما هي سوى مجموعة التوابع ذات التغيّر المحدود.

من النظرية 1 ومن نظرية لوبيغ الخاصة باشتقاق التوابع الرتيبة والمثبتة

في الفقرة السابقة، ينتج مباشرة ان كل تابع ذي تغيّر محدود يقبل ايما كان تقريباً مشتقاً منتهياً.

نعمم الآن مفهوم تابع القفزات. لتكن $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ مجموعة منتهية أو قابلة للعد من نقاط $[a, b]$. نلحق بكل نقطة من هذه النقاط عددين g_n وَ h_n بحيث:

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|) < \infty$$

نفرض بالإضافة إلى ذلك أنه إذا كان $x_n = a$ فإن $g_n = 0$ وإذا كان $x_n = b$ فإن $h_n = 0$.

نضع:

$$\psi(x) = \sum_{x_n \leq x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n$$

نسمي التابع المعرف بهذه الطريقة تابع قفزات. اما التغيّر الكلي لهذا التابع فهو يساوي:

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|)$$

أما نقاط تقطعه فهي النقاط x_n التي يكون من أجلها أحد العددين g_n أو h_n مخالفاً للصفر، لدينا في هذه الحالة:

$$\psi(x_n) - \psi(x_n - 0) = g_n$$

$$\psi(x_n + 0) - \psi(x_n) = h_n$$

لدينا القضية التالية:

يمكن أن نكتب كل تابع f ذي تغير محدود على $[a, b]$، بطريقة وحيدة، على الشكل:

$$f = \varphi + \psi$$

حيث φ تابع مستمر وَ ψ تابع قفزات.

إن البرهان مماثل لبرهان الخاصية 4 المتعلقة بالتوابع الرتيبة (§ 1, 1).
لإنشاء التابع ψ نضع :

$$g_n = f(x_n) - f(x_n - 0)$$

$$h_n = f(x_n + 0) - f(x_n)$$

عند نقاط تقطع التابع f.

تمارين . 1. إذا كان لِـ f مشتق محدود على $[a, b]$ (أي إذا كان $f'(x)$ موجوداً اينما كان وَ $c > |f'(x)|$) فإن f تابع ذو تغيّر محدود ولدينا :

$$V_a^b [f] \leq c(b - a)$$

2. ليكن التابع $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$. أثبت أن التغير الكلي لِـ f على $[0, 1]$ غير منته .

إن التوابع الوحيدة التي لها تغيّر كلي معدوم هي التوابع الثابتة . نضع :

$$\|f\| = V_a^b [f] \tag{8}$$

إن المقدار $V_a^b [f]$ يتمتع بالخاصيتين 2) وَ 3) الواردتين في تعريف النظيم (راجع الفصل 3 ,§ 3 ,1) لـكنه لا يحقق الخاصية 1) . إلا اننا إذا اقتصرنا على اعتبار التوابع المحققة للشرط الاضافي $f(a) = 0$ فإننا نجد هذه التوابع تشكل فضاءً شعاعياً كما نلاحظ في هذه الحالة أن المقدار $V_a^b [f]$ يحقق كل شروط تعريف النظيم . يسمى الفضاء $V^0[a, b]$ المؤلف من التوابع ذات التغير المحدود المحققة للشرط $f(a) = 0$ ، والمزود بالعمليتين المعتادتين وهما الجمع والضرب في عدد ، والمزود أيضاً بالنظيم (8) ، يسمى فضاء التوابع ذات التغيّر المحدود . (أثبت أن هذا الفضاء تام .)

§3. مشتق التكامل غير المحدود للوبيغ

أثبتنا في §1 ان تكامل لوبيغ :

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

بصفته تابعاً لـ x يقبل مشتقاً منتهياً ايثما كان تقريباً . وعلى الرغم من ذلك فإننا لم نبين العلاقة الموجودة بين هذا المشتق والتابع الوارد تحت رمز التكامل . نثبت الآن النتيجة التالية التي سبق ذكرها في آخر §1 .

نظرية 1. من أجل كل تابع قابل للجمع f ، لدينا المساواة التالية ايثما كان تقريباً :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

البرهان . نضع :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

نثبت أولاً ان :

$$f(x) \geq \Phi'(x)$$

أيثما كان تقريباً . ذلك أنه إذا كان $f(x) < \Phi'(x)$ فإنه يوجد عددان ناطقان α وَ β بحيث :

$$f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x) \qquad (1)$$

نرمز بـ$E_{\alpha\beta}$ لمجموعة النقاط x التي من أجلها تتحقق المتراجحة (1) . إن هذه المجموعة قابلة للقياس لأن التابعين f وَ Φ' يقبلان القياس . لنثبت أن قياس كل مجموعة $E_{\alpha\beta}$ منعدم . ونستنتج حينئذٍ بأن :

$$\mu\{x : f(x) < \Phi'(x)\} = 0$$

لأن مجموعة المجموعات $E_{\alpha\beta}$ قابلة للعد.

ليكن $\varepsilon > 0$ اختيارياً وليكن $\delta > 0$ بحيث

$$\left|\int_e f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

بمجرد أن يكون: $\mu(e) < \delta$ (إن العدد δ موجود من أجل كل ε وهذا بفضل الاستمرار المطلق للتكامل). نختار الآن مجموعة مفتوحة $G \subset [a, b]$ بحيث:

$$\mu(E_{\alpha\beta}) + \delta > \mu(G) \text{ وَ } G \supset E_{\alpha\beta}$$

إذا كان $x \in E_{\alpha\beta}$ فإن:

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x)}{\xi - x} > \beta \qquad (2)$$

من أجل كل $\xi > x$ بحيث تكون ξ مجاورة بكفاية لِـ x. بنقل المتراجحة (2) على الشكل:

$$\Phi(\xi) - \beta\xi > \Phi(x) - \beta x$$

نلاحظ أن النقطة x غير مرئية من اليمين من أجل التابع $\Phi(x) - \beta x$ وذلك على كل مجال من المجالات المكونة للمجموعة G.

وبالتالي باستخدام توطئة ف. ريس يمكننا الاشارة إلى مجموعة مفتوحة $S = \bigcup_k (a_k, b_k)$ بحيث $G_{\alpha\beta} \subset S \subset G$ وَ:

$$\Phi(b_k) - \beta b_k \geq \Phi(a_k) - \beta a_k$$

أي

$$\Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geq \beta(b_k - a_k)$$

أو

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\mathrm{d}t \geq \beta(b_k - a_k)$$

بجمع هذه المتراجحات من أجل كل المجالات (a_k, b_k) المكونة لِـ S نحصل على:

$$\int_S f(t)\mathrm{d}t \geq \beta\mu(S) \tag{3}$$

من جهة أخرى:

$$\int_S f(t)\mathrm{d}t = \int_{E\alpha\beta} f(t)\mathrm{d}t + \int_{S\setminus E\alpha\beta} f(t)\mathrm{d}t \leq \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) + \\ + \varepsilon \leq \alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta \tag{4}$$

بمقارنة (3) وَ (4) نحصل على:

$$\alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta \geq \beta\mu(S)$$

ومنه

$$\mu(S) \leq \frac{\varepsilon + |\alpha|\delta}{\beta - \alpha}$$

وهكذا يمكن وضع المجموعة $E_{\alpha\beta}$ داخل مجموعة مفتوحة قياسها صغير بصفة اختيارية (يمكن ان نفرض مثلاً أن $\varepsilon \leq |\alpha|\delta$)، وهذا يعني ان $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$.
وبذلك نكون قد اثبتنا بأن:

$$f(x) \geq \Phi'(x)$$

ايما كان تقريباً. ثم بتعويض $f(x)$ بِـ$f(x)$ − يمكن أن نثبت بنفس الطريقة ايما كان تقريباً بأن:

$$-f(x) \geq -\Phi'(x)$$

أي:

$$f(x) \leq \Phi'(x)$$

وبالتالي

$$f(x) = \Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

أيما كان تقريباً. انتهى برهان النظرية.

§ 4. البحث عن تابع انطلاقاً من معرفة مشتقة. التوابع المستمرة مطلقاً

كنا اجبنا عن السؤال الأول من السؤالين المطروحين في بداية الفصل وذلك بإثبات ان المساواة:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(t)$$

صحيحة ايثما كان تقريباً من أجل تابع f قابل للجمع على $[a, b]$. نعتبر الآن السؤال الثاني المطروح وهو المتعلق بالبحث عن كيفية تعميم دستور نيوتن - ليبنيتز المعروف في التحليل الأولي من أجل التوابع القابلة للإشتقاق باستمرار:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \tag{1}$$

هدفنا إذن هو تعميم (1) إلى حالة تكامل لوبيغ.

من الواضح أنه يجب الاقتصار على توابع F تقبل الاشتقاق أيثما كان تقريباً (ولولاه لفقدت المساواة (1) معناها). نحن نعلم أن التوابع ذات التغير المحدود تحقق بصفة خاصة الشرط السالف الذكر.

من جهة أخرى فإن التكامل الوارد في الطرف الأيسر من المساواة (1) تابع ذو تغيّر محدود. ولذا فإن هذه المساواة لا يمكن أن تقوم إذا اعتبرنا صنف توابع أوسع من صنف التوابع ذات التغيّر المحدود. لما كان كل تابع ذي تغيّر محدود يساوي فرق تابعين رتيبين غير متناقصين فإنه ينبغي البدء في دراسة التوابع الرتيبة.

نلاحظ أن المساواة (1) غير صحيحة عموماً من أجل توابع رتيبة كيفية. ورغم ذلك لدينا النتيجة التالية:

نظرية 1. إن المشتق f' لتابع رتيب غير متناقص f يقبل الجمع ولدينا:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leq f(b) - f(a)$$

البرهان. إن مشتق التابع f عند النقطة x هو تعريفاً نهاية النسبة[1]:

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

عندما يؤول h إلى 0. من رتابة f تأتي قابليته للجمع، ومنه تأتي قابلية الجمع لكل التوابع φ_h. وبالتالي يمكن مكاملة المساواة (2) طرفاً طرفاً. وهكذا نحصل على:

$$\int_a^b \varphi_h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{h}\int_a^{b+h} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x$$

يؤول الطرف الثاني لهذه المساواة نحو $f(b) - f(a+0)$ عندما يؤول h إلى $+0$. إذن نحصل على المتراجحة التالية بتطبيق نظرية فاتو:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{h\to 0}\int_a^b \varphi_h(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a+0) \leq f(b) - f(a)$$

(كما أن وجود تكامل f' مضمون أيضاً بفضل نظرية فاتو). انتهى برهان النظرية.

من السهل تقديم مثال لتابع رتيب تتحقق من أجله المتراجحة التامة:

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x < f(b) - f(a)$$

يكفي، من أجل ذلك، أن نضع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 \ , & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

---

(1) حتى يكون للعبارة $f(x+h)$ معنى من أجل كل $x \in [a, b]$ يمكن أن نفرض بأن: $f(x) = f(b)$ من أجل $x > b$ وَ $f(x) = f(a)$ من أجل $x < a$.

من المهم أن نلاحظ وجود توابع مستمرة ورتيبة تتحقق من أجلها المتراجحة التامة :

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t < f(x) - f(a)$$

من أجل كل $a < x$. وهذا مثال بسيط على ذلك . نعتبر على القطعة $[0, 1]$ المجموعة الثلاثية لـكانتور ونعرف f في البداية على مجالاتها الملامسة بوضع :

$$f(t) = \frac{2k - 1}{2^n}$$

حيث $k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$ ، وذلك على المجال الملامس ذي الرتبة k والمرتبة n (بما في ذلك حدي المجال) ، مع العلم أن المجالات مرقمة من اليسار إلى اليمين . عندئذٍ :

$$f(t) = 1/2 \quad , \quad 1/3 \leq t \leq 2/3$$

$$f(t) = 1/4 \quad , \quad 1/9 \leq t \leq 2/9$$

$$f(t) = 3/4 \quad , \quad 7/9 \leq t \leq 8/9$$

وهكذا على التوالي (أنظر الرسم 21) . بهذه الطريقة يكون التابع f معرفاً ايما كان على القطعة $[0, 1]$ ما عدا النقاط ذات النمط الثاني من مجموعة كانتور (أي النقاط التي لا تنتمي إلى المجالات الملامسة ولا إلى حدود هذه المجالات) . نعرف الآن f عند النقاط المتبقية بالطريقة التالية . لتكن t^* نقطة من هذه النقاط ، ولتكن $\{t_n\}$ متتالية متزايدة من نقاط النمط الأول في مجموعة كانتور الثلاثية (أي حدود المجالات الملامسة) ، متقاربة نحو t^* . حينئذٍ تكون النهاية :

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) \qquad (3)$$

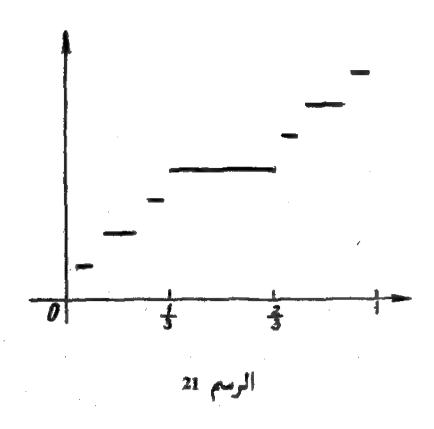
موجودة ؛ والأمر كذلك فيما يخص النهاية

$$\lim_{n \to \infty} f(t'_n) \qquad (4)$$

حيث $\{t'_n\}$ متتالية متناقصة من نقاط النمط الأول، متقاربة نحو t^*، بالإضافة إلى ذلك فإن النهايتين (3) وَ (4) متساويان . نأخذ القيمة المشتركة لهاتين النهايتين ونضعها مساوية لِـ $f(t^*)$، فنحصل على تابع رتيب معرف ومستمر اينما كان على القطعة $[0, 1]$؛ يسمى هذا التابع «درج كانتور» . أما مشتقه فهو يساوي 0 عند كل نقطة تنتمي إلى مجال ملامس، أي ان المشتق منعدم اينما كان تقريباً . وبالتالي، لدينا من أجل هذا التابع :

$$0 = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t < f(x) - f(0) = f(x)$$

وهذا مهما كان $x \in [0, 1]$.



الرسم 21

نشير بصفة خاصة أن المساواة التالية، في حالة تابع رتيب $f(x)$:

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

تستلزم

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

وهذا من أجل كل $x \in (a, b]$.

حتى نصف صنف التوابع التي تتحقق من أجلها المساواة:

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

ندخل التعريف التالي:

تعريف. نقول عن تابع f معطى على قطعة $[a, b]$ إنه مستمر مطلقاً على $[a, b]$، إذا تحقق من أجل كل $\varepsilon > 0$ وجود عدد $\delta > 0$ بحيث من أجل كل جماعة منتهية من مجالات غير متقاطعة مثنى مثنى:

$$(a_k , b_k) \quad , \quad k = 1, 2, ..., n$$

مجموع أطوالها أصغر من δ: $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$، يكون لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

من الواضح ان كل تابع مستمر مطلقاً تابع مستمر بانتظام. أما القضية العكسية فهي خاطئة عموماً: فالتابع المسمى «درج كانتور» مثلاً، وهو التابع المقدم أعلاه، تابع مستمر (وبالتالي مستمر بانتظام) على القطعة $[0, 1]$ لـكنه ليس مستمراً مطلقاً: ذلك لأن مجموعة كانتور يمكن أن تغطى بجماعة منتهية من المجالات (a_k , b_k) حيث $k = 1, 2, ..., n$ مجموع اطوالها صغير بالقدر الذي نريده. مع العلم ان لدينا بطبيعة الحال المساواة التالية من أجل تلك المجالات:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 1$$

نورد فيما يلي الخاصيات الأساسية للتوابع المستمرة مطلقاً.

1. نلاحظ في البداية أنه يمكن استبدال العبارة «من أجل كل جماعة منتهية من مجالات مجموع اطوالها أصغر من δ» الواردة في التعريف السابق، بالعبارة «من أجل كل جماعة منتهية أو قابلة للعد من مجالات

مجموع أطوالها أصغر من δ» . لرؤية ذلك نفرض من أجل $\varepsilon > 0$ معطى، اننا اخترنا $\delta > 0$ بحيث :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

من أجل كل جماعة منتهية من المجالات (a_k, b_k) المحققة للشرط :

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

ولتكن (α_k, β_k) جماعة قابلة للعد من المجالات مجموع أطوالها لا يتجاوز δ. عندئذٍ، من أجل كل n ، ينتج :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon$$

فإذا انتقلنا إلى النهاية في هذه المتراجحة $n \to \infty$ نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leq \varepsilon$$

2. كل تابع مستمر مطلقاً تابع ذو تغيّر محدود.

ذلك ان الاستمرار المطلق لتابع f على قطعة $[a, b]$ يعني بصفة خاصة أن من أجل كل $\varepsilon > 0$ يُمكن اختيار $\delta > 0$ بحيث يكون التغيّر الكلي لِـ f على كل قطعة طولها أصغر من δ لا يتجاوز ε. وبما أنه بالإمكان تجزئة القطعة $[a, b]$ إلى عدد منته من القطع ذات اطوال أصغر من δ فإن التغيّر الكلي لِـ f على $[a, b]$ منته.

3. إن مجموع تابعين مستمرين مطلقاً وجداء تابع من هذا النوع مع عدد هما تابعان مستمران مطلقاً.

ذلك ما ينتج مباشرة من تعريف الاستمرار المطلق ومن خاصيات طويلة مجموع وجداء.

تعني الخاصيتان 1 وَ 2 أن التوابع المستمرة مطلقاً تشكل منوعة خطية في فضاء التوابع ذات التغيّر المحدود.

4. إن كل تابع مستمر مطلقاً يساوي فرق تابعين مستمرين مطلقاً غير متناقصين ذلك ان كل تابع مستمر مطلقاً، كما هو الحال بالنسبة لكل تابع ذي تغيّر محدود، يمكن تمثيله على الشكل:

$$f = v - g$$

حيث:

$$v(x) = V_a^x[f] \quad \text{وَ} \quad g(x) = v(x) - f(x)$$

تابعان غير متناقصين. لنثبت ان كلاً من هذين التابعين تابع مستمر مطلقاً. نتأكد من ذلك بالنسبة لِـ v. ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، نختار $\delta > 0$ كما يتطلبه الاستمرار المطلق للتابع f. نأخذ جماعة مكوّنة من n مجالاً (a_k, b_k) مجموع أطوالها أصغر من δ ثم نعتبر المجموع:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(v(b_k) - v(a_k)\right) \tag{5}$$

يمثل هذا المجموع الحد الأعلى لمجموعة قيم المجموع:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} |f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})| \tag{6}$$

وذلك من أجل كل التجزئات المنتهية الممكنة

$$a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < x_{1,2} < \dots < x_{1,m1} = b_1$$

$$a_2 = x_{2,0} < x_{2,1} < x_{2,2} < \dots < x_{2,m2} = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,mn} = b_n$$

للمجالات (a_1, b_1)، ...، (a_n, b_n). لما كان مجموع أطوال المجالات $(x_{k,l-1}, x_{k,l})$ التي يمتد اليها المجموع (6) لا يتجاوز $\delta > 0$، فإن كل قيم المجموع (6) أصغر من ε أو تساويه. وبالتالي فإن المجموع (5) الذي يمثل الحد الأعلى لمجموعة هذه القيم هو أيضاً أصغر من ε أو يساويه. تبرز النظريتان التاليتان الصلة الوطيدة الموجودة بين مفهوم الاستمرار المطلق والتكامل غير المحدود للوبيغ.

نظرية 2. ليكن f تابعاً قابلاً للجمع، إن التكامل غير المحدود:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

تابع مستمر مطلقاً.

البرهان. إذا كانت $\{(a_k, b_k)\}$ جماعة كيفية من المجالات غير المتقاطعة مثنى مثنى فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\bigcup_k (a_k, b_k)} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

بفضل الاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ فإن العبارة الأخيرة تؤول إلى الصفر عندما يؤول الطول الكلي للمجالات (a_k, b_k) إلى الصفر.

نظرية 3. (لوبيغ). إن المشتق $f = F'$ لتابع مستمر مطلقاً معطى على قطعة $[a, b]$ تابع يقبل الجمع على هذه القطعة؛ ومن أجل كل x $(a \leq x \leq b)$ لدينا:

$$\int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

تبين النظريتان 2 وَ 3 ان التوابع المستمرة مطلقاً هي التوابع الوحيدة التي يمكن الحصول عليها، بتقدير ثابت اضافي، انطلاقاً من مشتقاتها بفضل عملية المكاملة.

نحتاج للبرهان على النظرية 3 للتوطئة التالية.

توطئة. إذا كان مشتق تابع مستمر مطلقاً وغير متناقص f منعدماً اينما كان تقريباً فإن هذا التابع ثابت.

البرهان على التوطئة. بما أن التابع f مستمر ورتيب فإن ساحة قيمه هي $[f(a), f(b)]$. لنثبت ان طول هذه القطعة تساوي صفراً في حالة انعدام $f'(x)$ أينما كان تقريباً. وسينتهي بذلك برهان التوطئة. نجزئ مجموعة نقاط القطعة $[a, b]$ إلى جزئين: المجموعة E المؤلفة من النقاط حيث $f'(x) = 0$ والمجموعة Z التي تتمم E في $[a, b]$. من فرض التوطئة يأتي: $\mu(Z) = 0$. نختار عدداً حقيقياً كيفياً $\varepsilon > 0$ ونلحق به عدداً حقيقياً $\delta > 0$ يتماشى مع تعريف الاستمرار المطلق للتابع f. لنضع المجموعة Z في مجموعة مفتوحة قياسها أصغر من δ (وهذا ممكن لأن $\mu(Z) = 0$). بعبارة اخرى فإننا نغطي Z بواسطة جماعة منتهية أو قابلة للعد من المجالات (a_k, b_k) التي لها مجموع اطوال أصغر من δ. طبقاً لاختيار δ لدينا:

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

وبالتالي فإن جماعة المجالات (a_k, b_k) (ومنه حتماً، المجموعة Z المحتواة في اتحاد تلك المجالات) تتحول بواسطة التابع f إلى مجموعة قياسها أصغر من ε. وهكذا فإن $\mu(f(Z)) = 0$.

نعتبر الآن المجموعة $E = [a, b] \setminus Z$. ليكن $x_0 \in E$. بما ان $f'(x_0) = 0$ من أجل كل النقاط x المجاورة بكفاية لِـx_0 فإن:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon$$

أي (نفرض $x_0 < x$ لتثبيت فكر القارئ) :

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon (x - x_0)$$

أو

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x)$$

وهذا يعني ان x_0 نقطة غير مرئية من اليمين من أجل التابع $g(x) = \varepsilon x - f(x)$. وبالتالي ، وبفضل توطئة ف . ريس ، فإن المجموعة E محتواة في جماعة منتهية أو قابلة للعد من المجالات (α_k, β_k) التي لها حدود تحقق الشرط :

$$\varepsilon\beta_k - f(\beta_k) \geq \varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k)$$

أي

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq \varepsilon (\beta_k - \alpha_k)$$

ومنه

$$\sum_k \big(f(\beta_k) - f(\alpha_k)\big) \leq \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leq \varepsilon (b - a)$$

بعبارة أخرى فإن المجموعة E تتحول بواسطة التابع f إلى مجموعة يمكن تغطيتها بجماعة مجالات مجموع أطوالها أصغر من $\varepsilon(b - a)$. بما أنه يمكن لِـ ε أن يكون صغيراً بصفة اختيارية ، نستنتج أن $\mu\big(f(E)\big) = 0$.

وهكذا فإن المجموعتين $f(E)$ وَ $f(Z)$ لهما قياس منعدم. لكن اتحادهما يعطي بالضبط القطعة $[f(a), f(b)]$. ومنه يتبين أن طول هذه القطعة منعدم ، وهو ما يثبت ان $f(x)$ ثابت .

الآن أصبح من السهل البرهان على النظرية 3 . يكفي ان نقتصر على الحالة التي يكون فيها $F(x)$ تابعاً غير متناقص . في هذه الحالة نجد :

$$\Phi(x) = F(x) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

تابعاً رتيباً غير متناقص. ذلك أنه إذا كان $x' < x''$ فإن:

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{x'}^{x''} f(t)\mathrm{d}t \geq 0$$

من جهة أخرى فإن التابع Φ مستمر مطلقاً (بصفته فرقاً لتابعين مستمرين مطلقاً) وَ $\Phi'(x) = 0$ ايثما كان تقريباً (وذلك حسب النظرية 1 من 3 §). إذن من التوطئة السابقة يأتي ان Φ ثابت. بوضع $x = a$ في (7) نجد أن هذا الثابت يساوي $F(a)$. انتهى برهان النظرية.

كنا رأينا سابقاً ان كل تابع ذي تغيّر محدود f يساوي مجموع تابع قفزات H وتابع مستمر ذي تغيّر محدود φ:

$$f = H + \varphi$$

نعتبر الآن تابعاً مستمراً وغير مستمر مطلقاً وذا تغيّر محدود φ ثم نضع:

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

إن الفرق:

$$\chi = \varphi - \psi$$

تابع مستمر ذو تغيّر محدود وَ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\chi(x) = \varphi'(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \varphi'(t)\mathrm{d}t = 0$$

أينما كان تقريباً.

نقول عن تابع مستمر ذي تغيّر محدود أنه شاذ إذا كان مشتقه منعدماً ايثما كان تقريباً. نستطيع الآن النص على النتيجة التالية:

يمكن فك كل تابع ذي تغيّر محدود إلى مجموع ثلاثة توابع:

$$f = H + \psi + \chi \tag{8}$$

حيث H تابع قفزات وَ ψ تابع مستمر مطلقاً وَ χ تابع شاذ.

من السهل البرهان على أن كل حد من التفكيك (8) معرف بالتابع f بطريقة وحيدة بتقدير ثابت اضافي. زيادة على ذلك، إذا كانت كل التوابع الظاهرة في المساواة (8) لها نظيمات تجعلها منعدمة عند النقطة $x = a$ فإن التفكيك (8) وحيد. باشتقاق طرفي (8) نحصل على

$$f'(x) = \psi'(x)$$

أينما كان تقريباً (لأن H' وَ χ' منعدمان أينما كان تقريباً). وبالتالي، بمكاملة مشتق تابع ذي تغيّر محدود فإننا لا نسترجع التابع نفسه بل نسترجع مركبته المستمرة مطلقاً لا غير. فيما يخص المركبتين الاخريين (تابع القفزات والتابع الشاذ)، فانهما ينحيان «ولا يتركان اثراً لوجودهما».

من المفيد مقارنة هذه النتائج بتلك التي تعطيها نظرية التوزيعات. نحتفظ بما جاء في الفصل الرابع، نذكّر أن المراد بمصطلح التوزيع هو أية تابعية خطية مستمرة على الفضاء K المؤلف من التوابع القابلة للإشتقاق لا نهائياً وذات حامل محدود. نلحق بكل تابع يقبل الجمع محلياً f التابعية المعرفة بالدستور:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall \varphi \in K$$

إن مشتق هذه التابعية بمفهوم التوزيعات هو التابعية التي تلحق بكل عنصر $\varphi \in K$ العدد:

$$(f', \varphi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

بما أن المعادلة $y' = 0$ لا تقبل سوى حلول معتادة (ثوابت) ضمن مجموعة التوزيعات فإن كل توزيع يمكن استرجاعه انطلاقاً من مشتقه بتقدير ثابت اضافي. بصفة خاصة فإن كل تابع قابل للجمع محلياً f يمكن استرجاعه ايما كان تقريباً بتقدير ثابت اضافي انطلاقاً من مشتقه f' بمفهوم التوزيعات. نفرض الآن بأن التابع f يقبل ايما كان تقريباً مشتقاً؛ لهذا الغرض نفرض

مثلاً ان التابع f رتيب. نرمز بـ $f_1 = \frac{df}{dx}$ للمشتق المعتاد للتابع f. (كنا رأينا بأن $\frac{df}{dx}$ يمكن أن ينعدم ايثما كان تقريباً على الرغم من أن $f(x)$ لا يساوي ثابتاً. إن التابع $\frac{df}{dx}$ يقبل الجمع محلياً (فرضنا أن f رتيب) ؛ وبالتالي يمكن أن نلحق به تابعية (توزيعاً) :

$$(f_1, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx} \varphi(x) dx$$

المهـم هنا هو ان التوزيع f_1 لا يطابق عموماً التوزيع f'. فمثلاً إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad , & x > 0 \\ 0 \quad , & x \leq 0 \end{cases}$$

فإن $f_1 = 0$ وَ $f' = \delta$ (راجع المثال 1 من الفصل 4، § 4، 3) . بعبارة أوضح فإن النظرية 3 تعبر عن كون التوابع الوحيدة من بين التوابع ذات التغير المحدود التي لها مشتقات بالمفهوم المعتاد مطابقة لمشتقاتها بمفهوم التوزيعات هي التوابع المستمرة مطلقاً.

تواجهنا هنا من جديد الوضعية التي تعرضنا اليها ضمن الفصل 4، § 4: لكي تكون العمليات الأساسية للتحليل (في الحالة الراهنة، نريد استرجاع تابع انطلاقاً من مشتقه) قابلة للإنجاز علينا إما أن نقتصر على صنف ضيق من التوابع مع الاحتفاظ بالتعاريف التقليدية (وهذا الصنف هو صنف التوابع المستمرة مطلقاً)، وإما الاّ نتقيد بذلك ونعمم خصوصاً مفهوم التابع (وفي نفس الوقت مفهوم المشتق) .

تمارين . 1. عيّن المشتق بمفهوم التوزيعات لتابع «درج كانتور» .

2. ليكن f تابعاً ذا تغيّر محدود وَ f' مشتقه بمفهوم التوزيعات وَ f_1 التابعية (التوزيع) المعرف بالمشتق «المعتاد» $\frac{df}{dx}$ للتابع f. برهن على أنه إذا

أ) كان f مستمراً مطلقاً فإن $f' = f_1$.

ب) كان $f' = f_1$ فإن التابع f يكافئ تابعاً مستمراً مطلقاً أي مطابقاً لمثل ذلك التابع ايما كان تقريباً. بصفة خاصة إذا كان $f' = f_1$ وَ f مستمراً فإن f مستمر مطلقاً.

5 §. تكامل لوبيغ بصفته تابع مجموعة. نظرية رادون - نيكوديم (Radon – Nikodym)

1. الشحنات. تفكيكات هان وجوردان (Hahn, Jordan).

إن المفاهيم والنتائج المقدمة في الفقرات السابقة من أجل توابع على المستقيم تمتد بشكل واسع إلى توابع معطاة على فضاء مقيس اختياري.

ليكن X فضاء اختيارياً نعرّف عليه قياساً منتهياً μ، وليكن f تابعاً قابلاً للجمع من أجل هذا القياس على X. إن التابع f يقبل عندئذٍ الجمع على كل جزء قابل للقياس A من المجموعة X؛ وبالتالي فإن التكامل:

$$\Phi(A) = \int_A f(x)d\mu \tag{1}$$

(مع f مثبت) تابع لمجموعة معرّف و σ - جمعي على σ - الجبر $\mathfrak{S}_\mu$ المؤلف من المجموعات القابلة للقياس من الفضاء X. وهكذا، من أجل كل تفكيك

$$A = \bigcup_k A_k$$

لمجموعة قابلة للقياس A، وفق اتحاد منته أو قابل للعد من المجموعات القابلة للقياس وغير المتقاطعة مثنى مثنى، نجد أن:

$$\Phi(A) = \sum_k \Phi(A_k)$$

بعبارة أخرى فإن التابع Φ المعرّف بالمساواة (1) يتمتع بكل خاصيات قياس σ - جمعي، باستثناء محتمل لِخاصية الإيجابية. (من أجل تابع f غير سالب يكون Φ أيضاً غير سالب).

تعريف 1. يُسمى تابع لمجموعة σ- جمعي (منته) Φ معرّف على σ - جبر من المجموعات الجزئية للفضاء المعطى X، يسمى قياساً ذا اشارة اختيارية أو، باختصار، شحنة.

إن مفهوم الشحنة تعميم طبيعي لمفهوم قياس σ - جمعي، وهو يُردُّ كما سنرى ذلك، ضمن مفهوم معين، إلى مفهوم القياس ذاته.

تمرين. اثبت من أجل كل شحنة (منتهية) معطاة على σ - جبر مجموعات $\mathfrak{S}$، أنه يُوجد ثابت c بحيث $|\Phi(A)| \leq c$ من أجل كل $A \in \mathfrak{S}$.

إذا اعتبرنا شحنة كهربائية حقيقية موضوعة مثلاً على سطح كيفي فإننا نستطيع تقسيم هذا السطح إلى منطقتين: الأولى تحمل شحنة موجبة (أي بحيث يكون كل جزء منها مشحوناً بشحنة موجبة) والثانية تحمل شحنة سالبة. أما القضية المكافئة رياضياً لهذه النتيجة فتعطيها النظرية 1 التي سترد بعد قليل.

ندخل في البداية المصطلح التالي. لتكن Φ شحنة معرفة على σ - جبر $\mathfrak{S}$ من المجموعات الجزئية في الفضاء X. نقول عن مجموعة E من $\mathfrak{S}$ إنها سالبة بالنسبة لِـΦ إذا كان $\Phi(E \cap F) \leq 0$ وهذا من أجل كل $F \in \mathfrak{S}$؛ كما نقول عن E إنها موجبة في حالة: $\Phi(E \cap F) \geq 0$ من أجل كل $F \in \mathfrak{S}$.

نظرية 1. إذا كانت Φ شحنة معرّفة على X فإنه توجد مجموعة قابلة للقياس $A^- \subset X$ بحيث تكون A^- سالبة وَ $A^+ = X \setminus A^-$ موجبة (بالنسبة لِـΦ).

البرهان. نضع:

$$a = \text{Inf}\, \Phi(A)$$

حيث يشمل الحد الأدنى كل المجموعات السالبة A . لتكن $\{A_n\}$ متتالية مجموعات سالبة بحيث :

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(A_n) = a$$

ومنه يتضح أن $A^- = \bigcup_n A_n$ مجموعة سالبة بحيث :

$$\Phi(A^-) = a$$

لنثبت أن A^- هي المجموعة المطلوبة أي ان :

$$A^+ = X \setminus A^-$$

مجموعة موجبة . لنفرض ان الأمر غير ذلك ، أي ان A^+ يحوي مجموعة جزئية قابلة للقياس C_0 بحيث $\Phi(C_0) < 0$. لا يمكن أن تكون المجموعة C_0 سالبة لأننا لو نضيفها ، وهي سالبة ، إلى A^- نحصل على مجموعة سالبة $\tilde{A}$ التي من أجلها يتحقق :

$$\Phi(\tilde{A}) < a$$

وهذا مستحيل . وبالتالي يوجد عدد طبيعي اصغري k_1 يمكن أن نجد من أجله مجموعة جزئية C_1 من C_0 تحقق الشرط :

$$\Phi(C_1) \geq \frac{1}{k_1}$$

لدينا بطبيعة الحال $C_1 \neq C_0$. نستطيع من أجل المجموعة $C_0 \setminus C_1$ إعادة الاستدلال المتبع بخصوص C_0 ؛ نحصل عندئذٍ على مجموعة C_2 تحقق الشرط :

$$\Phi(C_2) \geq \frac{1}{k_2} \qquad (k_2 \geq k_1)$$

وهكذا على التوالي . أخيراً نضع :

$$F_0 = C_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

إن المجموعة F_0 غير خالية لأن : $\Phi(C_0) < 0$ وَ $\Phi(C_i) > 0$ من أجل $1 \leq i$. يتضح من الإنشاء السابق ان المجموعة F_0 سالبة . وبالتالي إذا اضفناها إلى A^- فإننا نصل من جديد إلى تناقض مع تعريف a . إذن من أجل كل المجموعات القابلة للقياس $E \subset X\setminus A^-$ لدينا :

$$\Phi(E) \geq 0$$

وهذا يعني ان $X\setminus A^-$ موجب . انتهى برهان النظرية .

يسمى تفكيك الفضاء X إلى جزء سالب A^- وجزء موجب A^+ تفكيك هان (Hahn) .

إن تفكيك هان ليس عموماً وحيداً . إلاّ أنه إذا كان

$$X = A_1^- \cup A_1^+$$
$$X = A_2^- \cup A_2^+$$

تفكيكين لهان فإن من أجل كل $E \in \mathcal{G}$ لدينا :

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap E_2^-)$$
$$\Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+) \qquad (2)$$

ذلك أن :

$$E \cap (A_1^- \setminus A_2^-) \subset E \cap A_1^- \qquad (3)$$

ومنه نستنتج أن :

$$\Phi\big(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)\big) \leq 0$$

ومن جهة أخرى :

$$E \cap (A_1^- \setminus A_2^-) \subset E \cap A_2^+ \qquad (4)$$

ومنه :

$$\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) \geq 0$$

وبالتالي :

$$\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) = 0$$

بنفس الطريقة نثبت أن :

$$\Phi(E \cap (A_2^- \setminus A_1^-)) = 0$$

من العلاقتين الأخيرتين نستنتج :

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-)$$

تُثْبت العلاقة الثانية من (2) بنفس الطريقة.

وهكذا فإن الشحنة Φ تعرف على $\mathscr{C}$ بطريقة وحيدة تابعين غير سالبين لمجموعات :

$$\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+)$$

$$\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-)$$

وتسمى على التوالي التغيّر الأعلى والتغيّر الأدنى للشحنة Φ. من جهة أخرى من الواضح أن :

1) $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$

2) Φ^+ وَ Φ^- تابعَا مجموعات σ - جمعيان وغير سالبين، أي انهما قياسان.

من الواضح أيضاً أن التابع $|\Phi| = \Phi^+ + \Phi^-$ قياس؛ نُسمي تغيّراً كلياً للشحنة Φ التابع $|\Phi|$. ويُسمى تمثيل Φ على شكل فرق تغيّره الأعلى وتغيّره الأدنى تفكيك جوردان للشحنة Φ.

ملاحظة. اعتبرنا أعلاه شحنات منتهية أي توابع Φ قيمها محدودة من الأدنى ومن الأعلى (راجع التمرين الوارد أعلاه). وفي هذه الحالة فإن Φ^+ وَ Φ^- قياسان منتهيان. إن كل ما قيل بخصوص هذين التابعين يمكن أن يعمم إلى

الحالة التي تكون فيها الشحنات محدودة من جهة واحدة فقط أي الحالة التي يكون فيها أحد المقدارين $\text{Inf}\,\Phi(A)$ أو $\sup\Phi(A)$ منتهياً.

2. أهم أنواع الشحنات. ليكن μ قياساً σ - جمعياً معرفاً في الفضاء X على σ - جبر $\mathfrak{G}$. نقول عن المجموعات المنتمية إلى $\mathfrak{G}$ انها قابلة للقياس ندخل الآن المفاهيم الموالية.

نقول عن شحنة Φ معرّفة من أجل المجموعات $E \in \mathfrak{G}$ أنها مركزة على مجموعة قابلة للقياس A_0 إذا كان $\Phi(E) = 0$ من أجل كل $E \subset X \backslash A_0$. تسمى حينئذٍ المجموعة A_0 حامل الشحنة Φ.

نقول عن شحنة Φ أنها مستمرة إذا كان $\Phi(E) = 0$ من أجل كل مجموعة E تحوي نقطة واحدة. نقول عن شحنة Φ أنها غير متصلة إذا كانت مركزة على مجموعة منتهية أو قابلة للعد، بعبارة أخرى تكون شحنة Φ غير متصلة إذا وجدت مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ بحيث نجد من أجل كل $E \subset X$:

$$\Phi(E) = \sum_{c_k \in E} \Phi(c_k)$$

نقول عن شحنة Φ أنها مستمرة مطلقاً (بالنسبة لقياس معطى μ) إذا كان: $\Phi(A) = 0$ من أجل كل مجموعة قابلة للقياس A بحيث $\mu(A) = 0$.

نقول عن شحنة Φ أنها شاذة (بالنسبة لقياس μ) إذا كانت مركزة على مجموعة قياسها منعدم بالنسبة لِـμ. من الواضح أنه إذا كانت شحنة مستمرة وشاذة بالنسبة للقياس μ فإنها منعدمة.

3. الشحنات المستمرة مطلقاً. نظرية رادون - نيكوديم. كمثال لشحنة مستمرة مطلقاً بالنسبة لقياس معطى μ نورد تكامل لوبيغ:

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

(لتابع f قبل للجمع مثبت f) المعتبر كتابع لمجموعة. والواقع أن هذا المثال يستنفد كل الشحنات المستمرة مطلقاً. لدينا، بعبارة أخرى، النظرية التالية:

نظرية 2 (رادون - نيكوديم). ليكن μ قياساً (منتهياً) σ - جمعياً معرفاً على σ - جبر من المجموعات الجزئية من X، ولتكن Φ شحنة مستمرة مطلقاً بالنسبة لـِ μ معرّفة على σ - الجبر نفسه. عندئذٍ يوجد تابع f معرّف على X قابل للجمع بالنسبة لـِ μ بحيث:

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

من أجل كل مجموعة قابلة للقياس A. إن هذا التابع المسمى مشتق الشحنة Φ بالنسبة للقياس μ، معرّف بطريقة وحيدة بتقدير تكافؤ وفق μ.

البرهان. يمكن تمثيل كل شحنة على شكل فرق شحنتين غير سالبتين (راجع البند 2 أعلاه)؛ بالإضافة إلى ذلك فإن كل شحنة مستمرة مطلقاً يمكن تمثيلها على شكل فرق شحنتين غير سالبتين مستمرتين مطلقاً. ولهذا يكفي البرهان على النظرية من أجل شحنات غير سالبة أي من أجل قياسات. ليكن إذن Φ قياساً مستمراً مطلقاً بالنسبة للقياس المعطى μ. لنثبت التوطئة التالية.

توطئة. ليكن Φ قياساً مستمراً مطلقاً بالنسبة لـِ μ، ولا يطابق الصفر. يوجد عندئذٍ عدد طبيعي n ومجموعة قابلة للقياس B بحيث: $\mu(B) > 0$ كما أن B موجبة بالنسبة للشحنة $\Phi - \frac{1}{n}\mu$.

برهان التوطئة. لتكن $X = A_n^- \cup A_n^+$ تفكيك هان من أجل الشحنة $\Phi - \frac{1}{n}\mu$، $n = 1, 2, \ldots$ وليكن:

$$A_0^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^- \ , \ A_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+$$

عندئذٍ:

$$\Phi(A_0^-) \leq \frac{1}{n}\mu(A_0^-)$$

من أجل كل n ، أي أن : $\Phi(A_0^-) = 0$ ؛ وبالتالي $\Phi(A_0^+) > 0$ إذن $\mu(A_0^+) > 0$ (من الإستمرار المطلق لِـ Φ بالنسبة لِـ μ) . ولذا يوجد n بحيث $0 < \mu(A_n^+)$. نلاحظ أن العدد n والمجموعة $A_n^+ = B$ يحققان شروط التوطئة .

ننتقل الآن إلى برهان النظرية . لتكن K مجموعة التوابع f على X التي تتمتع بالشروط التالية : التوابع غير سالبة وقابلة للمكاملة بالنسبة لِـ μ وَ :

$$\int_A f(x)\, d\mu \leq \Phi(A)$$

وهذا من أجل كل مجموعة قابلة للقياس A . لتكن :

$$M = \sup\left\{\int_X f(x)\, d\mu : f \in K\right\}$$

نعتبر متتالية $\{f_n\}$ مؤلفة من توابع تنتمي إلى K بحيث :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = M$$

نضع :

$$g_n(x) = \max\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\right)$$

لنثبت أن $g_n \in K$ ، أي من أجل كل مجموعة قابلة للقياس E لدينا :

$$\int_E g_n(x)\, d\mu \leq \Phi(E)$$

ذلك أن E يمكن أن يكتب على الشكل :

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

حيث E_k مجموعات غير متقاطعة وَ $g_n(x) = f_k(x)$ على E_k ، إذن

$$\int_E g_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_k(x)\, d\mu \leq \sum_{k=2}^{n} \Phi(E_k) = \Phi(E)$$

نضع :

$$f(x) = \sup\{f_n(x)\}$$

من الواضح عندئذٍ بأن $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ وبالتالي يأتي من نظرية ب. لوفي أن لدينا:

$$\int_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\,d\mu = M$$

لنثبت الآن بأن:

$$\Phi(E) - \int_E f(x)\,d\mu = 0$$

يتبين من الإنشاء أن تابع المجموعات:

$$\lambda(E) = \Phi(E) - \int_E f(x)\,d\mu$$

تابع غير سالب ويتمتع بكل خاصيات القياس. بالإضافة إلى ذلك فإنه مستمر مطلقاً بالنسبة لِـ μ. إذا كان $\lambda \neq 0$ فإنه يوجد حسب التوطئة $\varepsilon > 0$ وَ B بحيث $\mu(B) > 0$ وَ:

$$\varepsilon\mu(E \cap B) \leq \lambda(E \cap B)$$

من أجل كل مجموعة قابلة للقياس E. عندئذ، بوضع $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$ حيث χ_B هو التابع المميز للمجموعة B، نحصل من أجل كل مجموعة E:

$$\int_E h(x)\,d\mu =$$

$$\int_E f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(E \cap B) \leq \int_{E\setminus B} f(x)\,d\mu + \Phi(E \cap B) \leq \Phi(E)$$

وهذا يعني أن التابع h ينتمي إلى المجموعة K المعرفة أعلاه. لكن، لدينا من جهة أخرى:

$$\int_X h(x)\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(B) > M$$

وذلك يناقض تعريف M. وهكذا يتضح وجود التابع f المحقق لِـ:

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\,d\mu$$

لنثبت وحدانية هذا التابع. إذا كان:

$$\Phi(A) = \int_A f_1(x)\, d\mu = \int_A f_2(x)\, d\mu$$

من أجل كل $A \in \mathcal{C}$، فإن لدينا من أجل كل مجموعة:

$$A_n = \left\{ x : f_2(x) - f_1(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

(حيث n عدد طبيعي) العلاقة:

$$\mu(A_n) \leq n \int_{A_n} \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\, d\mu = 0$$

والأمر كذلك فيما يخص المجموعات:

$$B_m = \left\{ x : f_1(x) - f_2(x) > \frac{1}{m} \right\}$$

حيث لدينا:

$$\mu(B_m) = 0$$

وبما أن:

$$\left\{ x : f_1(x) \neq f_2(x) \right\} = \left(\bigcup_n A_n \right) \cup \left(\bigcup_m B_m \right)$$

نستنتج:

$$\mu\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} = 0$$

وهذا يعني أن $f_1(x) = f_2(x)$ أينما كان تقريباً. انتهى البرهان.

ملاحظة. من الواضح أن نظرية رادون-نيكوديم تعميم طبيعي لنظرية لوبيغ التي تؤكد على أن كل تابع مستمر مطلقاً يساوي تكامل مشتقه. إلاّ أنه إذا كانت لدينا طريقة فعلية للبحث عن المشتق في حالة التوابع المعرفة على

المستقيم مثل طريقة حساب نهاية النسبة $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ فإن نظرية رادون-نيكوديم لا تنص سوى على وجود المشتق $\frac{d\Phi}{d\mu}$ لشحنة مستمرة مطلقاً Φ بالنسبة للقياس μ، وذلك دون الإشارة إلى طريقة حساب هذا المشتق. نلاحظ أنه بالإمكان الاشارة إلى مثل تلك الطريقة إلاَّ أننا لانرغب في معالجة هذه القضية هنا، ونكتفي بالقول أن هذه الطريقة تمثل، باختصار، في حساب نهاية النسبة $\frac{\Phi(A)}{\mu(A)}$ عندما تتجول A في جماعة مجموعات «متقاربة» بمفهوم معيَّن نحو نقطة معطاة. نجد تفاصيل هذه المسائل مثلا في [53].

§ 6. تكامل ستيلجاس (Stieltjes)

1. قياسات ستيلجاس. كنا في الفصل السابق، لدى الحديث عن إنشاء قياسات لوبيغ على المستقيم، قد أشرنا إلى الإنشاء التالي. ليكن F تابعاً رتيباً وغير متناقص معطى على قطعة $[a, b]$ نفرضه، لتثبيت فكر القارئ، مستمراً من اليسار. بتعريف قياس كل المجالات المغلقة والمفتوحة ونصف المفتوحة المحتواة في القطعة المعطاة $[a, b]$ بواسطة العلاقات:

$$
\left\{
\begin{aligned}
m(\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha + 0) \\
m[\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha) \\
m(\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha + 0) \\
m[\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha)
\end{aligned}
\right. \qquad (1)
$$

يمكن بعد ذلك تعميم هذا القياس بفضل طريقة تمديد قياس حسب لوبيغ إلى σ - جبر a_F يحوي كل المجموعات الجزئية المفتوحة والمغلقة (إذن كل المجموعات الجزئية البوريلية) من القطعة $[a, b]$. يسمى القياس μ_F المحصل

عليه بواسطة مثل هذا الانشاء، قياس لوبيغ-ستيلجاس المولد بالتابع F؛ ويسمى التابع F التابع المولد لهذا القياس[1].

لنعتبر بعض الحالات الخاصة لقياسات لوبيغ-ستيلجاس.

1. ليكن F تابع قفزات، وَ $x_1, x_2, \ldots$ نقاط تقطعه، و $h_1, h_2, \ldots$ قيم قفزاته عند هذه النقاط. إن القياس μ_F المولد عن هذا التابع يجعل كل المجموعات الجزئية للقطعة $[a, b]$ قابلة للقياس، وقياس كل مجموعة A هو:

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i \in A} h_i \tag{2}$$

لرؤية ذلك نلاحظ أن تعريف قياس لوبيغ-ستيلجاس يؤدي مباشرة إلى أن قياس كل مجموعة $\{x_i\}$ يساوي h_i وقياس متمم المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots\}$ منعدم. من الجمعية العدودية للقياس μ_F تنتج المساواة (2) من أجل كل $A \subset [a, b]$. يسمى القياس μ_F المحصل عليه انطلاقاً من تابع قفزات قياساً غير متصل.

2. ليكن F تابعاً مستمراً مطلقاً وغير متناقص على $[a, b]$، وليكن $f = F'$ مشتقه. عندئذ يكون القياس الموافق لِـ F، وهو μ_F، معرفاً من أجل كل المجموعات الجزئية للقطعة $[a, b]$ (القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ) ومن أجل كل مجموعة A من هذا النوع لدينا:

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)\,dx \tag{3}$$

بما أن التمديد حسب لوبيغ لكل قياس σ - جمعي معرف بطريقة وحيدة بواسطة قيمه على نصف الحلقة الأولى (أو الابتدائية) نستنتج أن المساواة (3) محققة من أجل كل المجموعات $A \subset [a, b]$ القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ. يسمى القياس μ_F الملحق بتابع مستمر مطلقاً F قياساً مستمراً مطلقاً.

(1) إذا كان التابع غير المتناقص F غير مستمر من اليسار، يمكن أن نعرف أيضاً قياساً، بتغيير الدساتير (1) بشكل مناسب؛ ينبغي أن نضع مثلا $m[\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha - 0)$، الخ.

3. إذا كان F تابعاً مستمراً شاذاً فإن القياس الموافق له μ_F مركز بأكمله على المجموعة التي لها قياس (لوبيغ) منعدم وحيث يكون F' مخالفاً للصفر أو غير موجود. نقول في هذه الحالة أن القياس μ_F شاذ.

من الواضح أنه إذا كان $F = F_1 + F_2$ فإن $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$. بالتالي، وبما أن كل تابع رتيب يساوي مجموع تابع قفزات وتابع مستمر مطلقاً وتابع شاذ، فإنه ينتج بأن كل قياس للوبيغ-ستيلجاس يمكن أن يُمَثَّل على شكل مجموع ثلاث مركبات، الأولى غير متصلة والثانية مستمرة مطلقاً والثالثة شاذة. نذكر أن تفكيك تابع رتيب إلى ثلاث مركبات معرف بتقدير حدود ثابتة. ومنه ينتج أن تمثيل كل قياس لوبيغ-ستيلجاس على شكل مجموع قياس غير متصل وقياس مستمر وقياس شاذ تمثيل وحيد.

إن كل ما قلناه آنفاً خاص بقياسات لوبيغ-ستيلجاس على قطعة مستقيمة. ولهذا نعتبر الآن تابعاً F رتيباً وغير متناقص ومحدود (من الأعلى ومن الأدنى)، معرفاً على كل المستقيم العددي. بتعريف قياس كل مجال مغلق أو مفتوح أو نصف مفتوح من المستقيم العددي بواسطة دساتير مماثلة للعلاقات (1) نحصل على قياس منته على المستقيم العددي بأكمله، نسميه أيضاً قياس لوبيغ-ستيلجاس. بصفة خاصة فإن قياس المستقيم بأكمله في هذه الحالة يساوي:

$$F(\infty) - F(-\infty)$$

حيث:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) \quad \text{و} \quad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x)$$

(ينتج وجود النهايتين من كون F رتيباً ومحدوداً).

إن مفهوم قياس لوبيغ-ستيلجاس يستنفد في الحقيقة كل القياسات (أي كل توابع المجموعات المنتهية وَ σ-الجمعية وغير السالبة) على المستقيم. للتأكد من ذلك نعتبر قياساً μ من تلك القياسات نختاره بصفة كيفية بوضع:

$$F(x) = \mu(-\infty, x)$$

نحصل على تابع رتيب قياسه بمفهوم لوبيغ-ستيلجاس يطابق القياس μ المعطى. وهكذا فإن عبارة «قياس لوبيغ-ستيلجاس» لاتبرز صنفاً خاصاً من القياسات على المستقيم؛ فهذه العبارة تشير فقط إلى طريقة خاصة لإنشاء مثل تلك القياسات: انطلاقاً من تابع مولد معطى.

2. تكامل لوبيغ-ستيلجاس. ليكن μ_F قياساً على القطعة $[a, b]$ مولداً عن تابع رتيب F. نعرف من أجل هذا القياس، كالعادة صنف (أو صف) التوابع القابلة للجمع وكذا مفهوم تكامل لوبيغ.

$$\int_a^b f(x)\, d\mu_F$$

يسمى مثل هذا التكامل المأخوذ بالنسبة للقياس μ_F المولد عن التابع F تكامل لوبيغ-ستيلجاس ونرمز له بـ:

$$\int_a^b f(x)\, dF(x)$$

نعتبر بعض الحالات الخاصة.

1. ليكن F تابع قفزات (أي أن μ_F قياس غير متصل)، عندئذ يُردُّ التكامل:

$$\int_a^b f(x)\, dF(x)$$

بطبيعة الحال إلى المجموع:

$$\sum_i f(x_i)\, h_i$$

حيث تمثل النقاط x_i نقاط تقطع التابع F والنقاط h_i قفزات F عند هذه النقاط.

2. إذا كان F تابعاً مستمراً مطلقاً فإن تكامل لوبيغ-ستيلجاس :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}F(x)$$

يساوي :

$$\int_a^b f(x)\; F'(x)\, \mathrm{d}x$$

أي تكامل $f(x)\; F'(x)$ مأخوذاً بالنسبة لقياس لوبيغ المعتاد. لرؤية ذلك نفرض أن $f(x)$ ثابت على مجموعة قابلة للقياس $A \subset [a, b]$ وَ $f(x) = 0$ خارج A ، نرى عندئذ بأن المساواة :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}F(x) = \int_a^b f(x)\; F'(x)\, \mathrm{d}x \tag{4}$$

نتيجة من المساواة (3). ثم بفضل الجمعية العدودية للتكاملات نلاحظ أن المساواة (4) تمتد صلاحيتها إلى التوابع البسيطة القابلة للجمع من أجل القياس μ_F. لتكن الآن متتالية توابع بسيطة متقاربة بانتظام نحو $f(x)$. يمكن أن نفرض بأن المتتالية $\{f_n\}$ غير متناقصة. حينئذ تكون $\{f_n(x)\}$ متتالية غير متناقصة ومتقاربة أينما كان تقريباً نحو $f(x)\; F'(x)$ ، وبفضل نظرية ب. لوفي يمكن الانتقال في المساواة :

$$\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}F(x) = \int_a^b f_n(x)\; F'(x)\, \mathrm{d}x$$

إلى النهاية : $n \to \infty$.

مما سبق يتضح أنه إذا كان F مجموعاً لتابع قفزات وتابع مستمر مطلقاً فإن تكامل لوبيغ-ستيلجاس ، من أجل القياس μ_F ، يرد إلى سلسلة (أو مجموع منته) وتكامل بالنسبة للقياس المعتاد للوبيغ. إذا احتوى F ، زيادة على ذلك ، مركبة شاذة فإن قولنا السابق حول ردّ μ_F إلى سلسلة وتكامل يصبح مستحيلاً .

يمكن تمديد مفهوم تكامل لوبيغ-ستيلجاس بصفة طبيعية بالانتقال من التوابع الرتيبة إلى توابع ذات تغيّر محدود. ليكن Φ تابعاً من تلك التوابع. نكتبه على شكل فرق تابعين رتيبين:

$$\Phi = v - g$$

حيث v هو التغيّر الكلي للتابع Φ على القطعة $[a, x]$. نعرف الآن تكامل لوبيغ-ستيلجاس بالنسبة لِـ Φ بوضع:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,v(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x)$$

نتأكد بسهولة من أنه إذا كان Φ ممثلاً بطريقة ثانية بواسطة فرق تابعين رتيبين، مثلاً $\Phi = w - h$، فإن:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,v(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,g(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,w(x) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,h(x)$$

بعبارة أخرى لحساب تكامل لوبيغ-ستيلجاس بالنسبة لتابع معطى Φ، يمكن أن نستعمل أي تمثيل لهذا التابع بواسطة فرق تابعين رتيبين.

3. بعض التطبيقات لتكامل لوبيغ-ستيلجاس في نظرية الاحتمالات.

لا نستعمل تكامل لوبيغ-ستيلجاس في التحليل فحسب بل نجده أيضاً في العديد من مسائل الرياضيات التطبيقية. وبصفة خاصة فإن لها استعمالاً واسعاً في نظرية الاحتمالات. نذكّر أن تابع التوزع لمتغير عشوائي ξ هو تعريفاً التابع F المعرف من أجل كل x بالمساواة:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

أي أن $F(x)$ هو الاحتمال لكي يكون المتغير العشوائي ξ أصغر من x. من

الواضح أن كل تابع توزع رتيب وغير متناقص ومستمر من اليسـار ويحقق الشرطين : $F(-\infty) = 0$ وَ $F(+\infty) = 1$.

وبالعكس ، فإن كل تابع يتمتع بهذين الشرطين يمكن اعتباره تابع توزع لمتغيّر عشوائي .

إن المميزات الرئيسية لمتغير عشوائي هي :

أمله الرياضي :

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, d F(x) \tag{5}$$

تغايره :

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \, d F(x) \tag{6}$$

نميّز من بين المتغيرات العشوائية عادة المتغيرات غير المتصلة والمستمرة على التوالي . نقول عن متغيّر عشوائي إنه غير متصل إذا لم يأخذ سوى مجموعة منتهية أو قابلة للعد من القيم :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

(مثلا ، عدد المكالمـات في مركز هاتفي خلال فترة زمنية متغيّر عشوائي غير متصل) .

إذا كانت $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ تمثل احتمالات أخذ المتغيّر ξ للقيم $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ، فإن تابع توزع ξ يسـاوي بطبيعة الحال تابع قفزات . من أجل مثل هذا التابع نلاحظ أن التكاملين (5) وَ (6) يردّان على التوالي إلى المجموعين :

$$M\xi = \sum_i x_i \, p_i$$

وَ :

$$D\xi = \sum_i (x_i - a)^2 \, p_i \quad , \quad (a = M\xi)$$

نقول عن متغير عشوائي ξ إنه مستمر إذا كان تابع توزعه F مستمراً مطلقاً. يسمى المشتق F' لهذا التابع كثافة توزع احتمالات المتغير العشوائي ξ. بالاعتماد على ما جاء في البند السابق من أجل متغيّر عشوائي مستمر فإن تكامليْ لوبيغ-ستيلجاس المعبرين عن أمله الرياضي وتغايره يردّان إلى التكاملين المواليين المأخوذين بالنسبة للقياس المعتاد للوبيغ:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2\, p(x)\, dx$$

حيث $p = F'$ هي كثافة توزع احتمالات ξ وَ $a = M\xi$.

نقتصر عادة في الدروس الأولية لنظرية الاحتمالات على المتغيرات العشوائية غير المتصلة والمستمرة وهي تكاد تكون الوحيدة التي نجدها في مسائل الرياضيات التطبيقية. وعلى كل فإن تابع توزع متغيّر عشوائي يمكن أن يحوي أيضاً مركبة شاذة بحيث لا تكون المتغيرات العشوائية غير المتصلة والمستمرة هي المركبات الوحيدة لمتغير عشوائي اختياري.

ليكن ξ متغيراً عشوائياً وَ F تابع توزع وَ $\eta = \varphi(\xi)$ متغيراً عشوائياً ثانياً تابعاً بوريلياً للمتغيّر الأول. يمكن أن يكتب الأمل الرياضي $M\eta$ للمتغيّر η، تعريفاً، على الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, d\Phi(x)$$

حيث Φ تابع توزع لِـ η. لكن المهم هنا هو أنه إذا كان التابع φ قابلاً للجمع من أجل القياس المولد، على المستقيم، عن التابع F فإن الأمل الرياضي للمتغير η يمكن أن يُعبَّر عنه بواسطة تابع التوزع F للمتغير ξ:

$$M\eta = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dF(x)$$

ذلك لأن التابع $y = \varphi(x)$ يعرف تطبيقاً من المستقيم $(-\infty < x < \infty)$

بالقياس μ_F (المولد عن F) في المستقيم $(-\infty < y < \infty)$ بالقياس μ_Φ وهذا القياس هو صورة القياس μ_Φ بواسطة التطبيق $y = \varphi(x)$. لـكنه يتضح من خلال نتائج الفصل الخامس أنه إذا كان (X, μ) وَ (Y, ν) فضاءين مقيسين، وَ φ تطبيقاً من (X, μ) في (Y, ν) يحافظ على القياس (أي أنه بحيث:

$\left(\nu(A) = \mu\left(\varphi^{-1}(A)\right)\right)$ وَ f تابعاً قابلاً للجمع على (Y, ν)، فإن:

$$\int_Y f(y)\, \mathrm{d}\nu = \int_X f\left(\varphi(x)\right) \mathrm{d}\mu$$

(تحويل المتغير في تكامل لوبيغ) . بوضع $f(y) = y$ وَ $\mu = \mu_F$ وَ $\nu = \mu_\Phi$ نحصل على المساواة المطلوبة. وهكذا، ولحساب الأمل الرياضي (وكذا التغاير) لتابع للمتغيّر ξ، يكفي أن نعرف فقط تابع التوزع لهذا المتغيّر.

4. تكامل ريمان-ستيلجاس (Riemann-Stieltjes). يمكن إلى جانب تكامل لوبيغ-ستيلجاس المعتبر أعلاه والذي يمثل في الحقيقة فرق تكاملي لوبيغ لتابع معطى f، مأخوذين بالنسبة لقياسين معينين على المستقيم، يمكن أن ندخل أيضاً التكامل المسمى بتكامل ريمان-ستيلجاس. وهذا التكامل يعرف كنهاية لمجاميع تكاملية مماثلة لمجاميع ريمان التكاملية المعتادة.

نعتبر من جديد تابعا Φ ذا تغير محدود مستمر من اليسار ومعرفاً على مجال نصف مفتوح $[a, b)$، وليكن f تابعاً كيفياً معرفاً على نفس المجال نصف المفتوح $[a, b)$. نعتبر تجزئة لـ$[a, b)$ بواسطة النقاط:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

نختار في كل عنصر $[x_{i-1}, x_i)$ من هذه التجزئة[1] نقطة كيفية ξ_i ونشكل المجموع:

---

(1) كما هو الحال بخصوص تكامل ستيلجاس فإن «مساهمة» النقاط المنفصلة قد تكون غير منعدمة؛ لاينبغي أن تكون لعناصر التجزئة نقاط مشتركة، ولهذا نأخذ هنا مجالات نصف مفتوحة.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})] \tag{7}$$

حيث نقصد بـ $\Phi(x_n)$ القيمة $\Phi(b-0)$. إذا آل المجموع (7) إلى نهاية (وهي نهاية لاتتعلق لا بالتجزئة المختارة للمجال $[a, b)$ ولا باختيار النقاط ξ_i في عناصر هذه التجزئة) عندما يؤول $\max(x_i - x_{i-1})$ إلى الصفر، نسمي تلك النهاية تكامل ريمان-ستيلجاس للتابع f بالنسبة للتابع Φ على $[a, b)$ ونرمز لهذا التكامل بـ:

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) \tag{8}$$

نظرية 1. إذا كان f تابعاً مستمراً على القطعة $[a, b]$ فإن تكامل ريمان-ستيلجاس (8) لـ f موجود وهو يطابق تكامل لوبيغ-ستيلجاس لـ f.

البرهان. يمكن اعتبار المجموع (7) كتكامل لوبيغ-ستيلجاس للتابع الدرجي

$$f_n(x) = f(\xi_i) \quad , \quad x_{i-1} \le x < x_i$$

عندما نقلل عدد عناصر تجزئة المجال $(a, b]$ نحصل على متتالية من تلك التوابع متقاربة بانتظام نحو f. ولذا نرى أن نهاية المجاميع الواردة موجودة وتطابق تكامل لوبيغ-ستيلجاس للتابع f الذي يمثل النهاية (نظرية الانتقال إلى النهاية تحت رمز المكاملة). من جهة أخرى، نلاحظ أن هذه هي النهاية التي أطلقنا عليها اسم تكامل ريمان-ستيلجاس (8). انتهى البرهان.

نورد فيما يلي بعض الخاصيات الأولية لتكامل ريمان-ستيلجاس. نفرض هنا بأن التابع f مستمر على $[a, b)$.

1. لدينا التقدير (نظرية المتوسط)

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\,\Phi(x)\right| \le \max|\,f(x)|\; V_a^b\,[\Phi] \tag{9}$$

حيث يرمز $V_a^b\,[\Phi]$ للتغيّر الكلي للتابع Φ على $[a, b)$.

ذلك أن من أجل كل تجزئة للمجال $[a, b)$ لدينا المتراجحة:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\big(\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})\big)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \cdot |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq \max|f(x)| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| \leq \max|f(x)|\ V_a^b[\Phi]$$

بالانتقال إلى النهاية في هذه المتراجحة نحصل على التقدير (9). من أجل $\Phi(x) = x$ يعطي التقدير المعروف:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\max|f(x)|$$

من أجل تكامل ريمان.

2. إذا كان $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_2(x)$$

ذلك أن هذه المساواة محققة من أجل المجاميع التكاملية مهما كانت التجزئة المختارة للمجال $[a, b)$، وبالتالي فإن المساواة تبقى محققة عند المرور إلى النهاية أي من أجل التكاملات.

كنا عرّفنا تكامل ريمان-ستيلجاس (8) بافتراض أن التابع $\Phi(x)$ مستمر من اليسار. ورغم ذلك فإن تعريف هذا التكامل كنهاية للمجموع (7) قائم من أجل كل تابع $\Phi(x)$ ذي تغير محدود. لدينا في هذه الحالة القضية التالية:

3. إذا كان Φ_1 تابعاً ذا تغيّر محدود على $[a, b)$، وكذا Φ_2 وكان Φ_1 وَ Φ_2 متطابقين أينما كان إلاّ على مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط الداخلية لهذا المجال فإن:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Phi_2(x)$$

من أجل كل تابع f مستمر على $[a, b]$.

لإثبات هذه القضية نعتبر في البداية الحالة التي يكون فيها $\Phi_2 = 0$ أي أننا نريد أولاً البرهان على القضية :

$3'$. إذا كان ψ تابعاً ذا تغير محدود منعدماً أينما كان إلاّ على مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط الداخلية للمجال $[a, b)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\psi(x) = 0$$

من أجل كل تابع f مستمر على $[a, b]$.

نلاحظ أولاً بأن ذلك بديهي من أجل تابع يخالف 0 في نقطة واحدة فقط x_0 (بتقليل عناصر تجزئة $[a, b)$ بشكل لامتناه دون أن تكون x_0 نقطة تجزئة نحصل عندئذ على مجاميع تكاملية منعدمة)؛ وبالتالي، وبفضل خاصية الجمعية، ندرك أن المساواة المطلوبة قائمة أيضاً من أجل كل تابع يخالف 0 في عدد منته من النقاط.

ليكن الآن ψ تابعاً مخالفاً للصفر عند النقاط :

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

ولتكن :

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

قيمه عند هذه النقاط. لما كان ψ ذا تغيّر محدود، لدينا: $\sum_n |y_n| < \infty$.
نختار عدداً طبيعياً N بحيث يكون $\sum_{n>N} |y_n| < \varepsilon$ ونكتب ψ على الشكل :

$$\psi = \psi_N + \psi$$

حيث ψ_N تابع يأخذ عند النقاط $r_1, r_2, \ldots, r_N$، على التوالي، القيم $y_1, y_2, \ldots y_N$، وينعدم خارج هذه النقاط؛ أما ψ فهو يخالف 0 عند النقاط $r_{N+1}, r_{N+2}, \ldots$. من الخاصية السابقة يأتي :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\psi(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\psi_N(x) + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\tilde{\psi}(x)$$

إن التكامل الأول من الطرف الأيمن منعدم حسب ما أثبتنا آنفاً؛ أما التكامل الثاني فهو يقبل التقدير التالي حسب الخاصية 1:

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\tilde{\psi}(x)\right| < \max|f(x)| \cdot 2\varepsilon$$

(لأنه من البديهي بأن $V_a^b[\tilde{\psi}] = 2\sum_{n>N}|y_n| < 2\varepsilon$). بما أن ε صغير بصفة اختيارية فإننا نستنتج مباشرة الخاصية المطلوبة.

للبرهان على الخاصية 3 نعتبر الفرق $\psi = \Phi_1 - \Phi_2$. إنه لا يخالف الصفر إلا على مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط المنتمية إلى (a, b). يبقى أن نطبق الخاصيتين 2 وَ 3′. بصفة خاصة، لما كانت مجموعة نقاط تقطع تابع ذي تغير محدود قابلة للعد على الأكثر فإننا نستنتج الخاصية الموالية:

4. إذا كان f تابعاً مستمراً فإن تكامل ريمان-ستيلجاس $\int_a^b f(x)\, d\Phi(x)$ لا يتعلق بقيم التابع Φ عند نقاط تقطعه الواقعة داخل المجال (a, b).

بما أن تكامل ريمان-ستيلجاس لتابع مستمر يطابق تكامل لوبيغ-ستيلجاس الموافق له فإن لدينا المساواة التالية من أجل تابع $f(x)$ مستمر:

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \sum_i f(x_i)\, h_i$$

وهذا بخصوص تكامل ريمان-ستيلجاس وعندما يكون Φ تابع قفزات، كما أن لدينا:

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\, \Phi'(x)\, dx \tag{10}$$

وهذا عندما يكون Φ تابعاً مستمراً مطلقاً. إذا كان، إضافة إلى ذلك، التابع Φ' قابلاً للمكاملة بمفهوم ريمان فإن تكامل الطرف الثاني من (10) يمكن اعتباره كتكامل ريمان.

إن كل ماقلناه آنفاً بخصوص تكامل ريمان-ستيلجاس على مجال منته يمتد (دون صعوبة تذكر) إلى الحالة التي يكون فيها التكامل مأخوذاً على المستقيم بأكمله أو على نصف المستقيم.

ملاحظة. كنا عرفنا تكامل ستيلجاس على المجال نصف المفتوح $(a, b]$. يمكن بطريقة مماثلة تعريف التكامل على $[a, b)$ وعلى (a, b) وعلى $[a, b]$. بخلاف تكامل ريمان المعتاد فإن قيم تكامل ستيلجاس على المجالات (a, b)، $[a, b]$، $[a, b)$، $(a, b]$ قيم مختلفة. فإذا كانت مثلاً a نقطة تقطع للتابع Φ فإن تكامل ستيلجاس على $[a, b]$ يساوي التكامل الموافق له على $(a, b]$ مضافاً إلى حد من الشكل $f(a)h$ حيث $h = \Phi(a + 0) - \Phi(a)$.

5. الانتقال إلى النهاية تحت رمز تكامل ستيلجاس. أثبتنا في الفصل الخامس بعض النظريات المتعلقة بالإنتقال إلى النهاية تحت رمز تكامل لوبيغ. وقد طرحنا حينئذ السؤال التالي: لتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع، نعتبر تكاملات هذه التوابع بالنسبة لقياس معطى، أدرس إمكانية الانتقال إلى النهاية تحت رمز التكامل. في حالة تكامل ستيلجاس هناك طرح آخر للمسألة في غاية الأهمية: لتكن متتالية توابع ذات تغيّر محدود $\{\Phi_n\}$، ماهي الشروط التي تمكننا من الانتقال إلى النهاية تحت رمز التكامل:

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x)$$

حيث f تابع مثبت؟

لدينا في هذه الحالة النظرية التالية:

نظرية 2. (النظرية الأولى لهيلي Helly).

لتكن $\{\Phi_n\}$ متتالية توابع ذات تغيّر محدود على القطعة $[a, b]$، متقاربة على هذه القطعة نحو تابع Φ وبحيث تكون التغيرات الكلية للتوابع Φ_n محدودة في مجموعتها أي:

$$V_a^b[\Phi_n] \leq C \qquad (n = 1, 2, ...)$$

عندئذ يكون التابع النهاية Φ ذا تغيّر محدود أيضاً، ولدينا من أجل كل تابع مستمر f :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) \tag{11}$$

البرهان. نثبت أولاً بأن التغيّر الكلي للتابع النهاية Φ لايتجاوز الثابت C الذي يحد من الأعلى مجموعة القيم $V_a^b[\Phi_n]$. بالفعل، من أجل كل تجزئة :

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$$

للقطعة $[a, b]$ لدينا :

$$\sum_{k=1}^{m} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m} |\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})| \leq C$$

أي أن :

$$V_a^b[\Phi] \leq C$$

لنبين أن العلاقة (11) قائمة في الحالة التي يكون فيها f تابعاً درجياً. لتكن h_k قيم f على المجالات (x_{k-1}, x_k). حينئذ :

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \sum_k h_k[\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})]$$

وَ :

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \sum_k h_k[\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})]$$

من الواضح أن العبارة الأولى تؤول إلى العبارة الثانية لما $n \to \infty$.

ليكن f تابعاً مستمراً وَ ε عدداً موجباً اختيارياً. نختار تابعاً درجياً f_ε بحيث :

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

فنحصل على :

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) - \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x)\right| \leq$$

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi_n(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\, d\Phi_n(x) - \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x)\right|$$

بفضل نظرية المتوسط الخاصة بتكامل ستيلجاس ، نلاحظ أن الحد الأول والثالث من الطرف الأيمن أصغر من $\frac{\varepsilon}{3}$؛ أما الثاني فهو أصغر من $\frac{\varepsilon}{3}$ من أجل كل n كبيراً بكفاية . لما كان $\varepsilon > 0$ كيفياً فإننا نستنتج المطلوب .

ملاحظة . تمتد هذه النظرية إلى الحالة التي يكون فيها أحد أو كلا حدي التكاملات الموالية غير منتهين :

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x)$$

لكن ينبغي في هذه الحالة أن يؤول التابع f إلى نهاية منتهية عندما يؤول x إلى لانهاية (وهذا من شأنه أن يمكننا من تقريبه بانتظام على كل المجال غير المنتهي المعتبر ، وذلك بواسطة توابع درجية لا تأخذ سوى عدد منته من القيم) .

وضحت نظرية هيلي الأولى الشروط التي ينبغي أن تتوفر في متتالية $\{\Phi_n\}$ من التوابع ذات التغير المحدود كي نتمكن في تكامل ريمان-ستيلجاس بالنسبة لهذه التوابع من الانتقال إلى النهاية؛ أما نظرية هيلي الثانية فهي توضح الشروط التي تضمن وجود متتالية تحقق شروط النظرية الأولى .

نظرية 3. (النظرية الثانية لهيلي)

نستطيع من أجل كل مجموعة غير منتهية M من توابع Φ معطاة على قطعة كيفية $[a, b]$ تحقق الشرطين:

$$\begin{cases} \max|\Phi(x)| \leq C \\ V_a^b [\Phi] \leq k \end{cases} \tag{12}$$

(حيث C وَ k ثابتان تشرك فيهما كل التوابع Φ المنتمية لِـ M)، نستطيع استخراج متتالية متقاربة عند كل نقطة من $[a, b]$.

البرهان. يكفي أن نبرهن على هذه النظرية من أجل توابع رتيبة. ليكن إذن:

$$\Phi = v - g$$

حيث $v(x)$ هو التغيُّر الكلي لِـ Φ على القطعة $[a, x]$. عندئذ نرى أن التوابع v الموافقة لكل التوابع $\Phi \in M$ تحقق:

$$\max|v(x)| \leq k$$

$$V_a^b[v] = V_a^b [\Phi] \leq k$$

أي أنها تحقق شروط النظرية وأنها رتيبة. لنفرض أن النظرية مثبتة من أجل توابع رتيبة، نختار متتالية $\{\Phi_n\}$ من توابع M بحيث تكون متتالية التوابع الموافقة لها v_n متقاربة نحو نهاية v. من جهة أخرى فإن التوابع:

$$g_n = v_n - \Phi_n$$

رتيبة وتحقق شروط النظرية. ولهذا يمكن استخراج، من $\{\Phi_n\}$، متتالية جزئية $\{\Phi_{n_k}\}$ بحيث تكون المتتالية الموافقة لها $\{g_{n_k}\}$ متقاربة نحو تابع g. لكن في هذه الحالة:

$$\Phi_{n_k}(x) \to \Phi(x) = v(x) - g(x)$$

يبقى إذن أن نثبت النظرية من أجل جماعة M من التوابع الرتيبة.

لتكن:

$$r_1, r_2 ..., r_n, ...$$

كل النقـاط الناطقة على القطعـة $[a, b]$. بفضل المتراجحتين (12) نرى أن الأعداد $\Phi(r_1)$ (حيث Φ يتجوَّل في المجموعة M بأكملها) تشكل مجموعة محدودة. بالتالي، توجد متتالية $\{\Phi_n^{(1)}\}$ متقاربة عند النقطة r_1. يمكن، من هذه المتتالية، استخراج متتالية جزئية $\{\Phi_n^{(2)}\}$ متقاربة عند النقطة r_2 (وبالطبع عند r_1). ثم من $\{\Phi_n^{(2)}\}$ نستطيع استخراج متتالية جزئية متقاربة عند النقطة r_3، وهكذا على التوالي. إذن فإن المتتالية القطرية $\{\Phi_n^{(n)}\}$ تصبح متقاربة عند كل النقاط الناطقة من القطعة $[a, b]$. إن نهايتها تابع غير متناقص Φ معرف، في الوقت الراهن، عند النقاط $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ لا غير. لا بد من تعريف هذا التابع عند كل نقاط القطعة $[a, b]$، لهذا الغرض نضع من أجل النقاط x غير الناطقة: $\Phi(x) = \lim\limits_{r \to x-0} \Phi(r)$ (حيث r لا يتعلق إلاّ بالقيم الناطقة). لنثبت أن التابع غير المتناقص Φ المحصل عليه بهذه الطريقة تابع يساوي نهاية المتتالية $\{\Phi_n^{(n)}\}$ عند كل نقطة من نقاط استمراره. لتكن x^* نقطة من هذه النقاط. من أجل كل $\varepsilon > 0$ معطى يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$|\Phi(x^*) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{6} \tag{13}$$

بمجرد صحة المتراجحة: $|x^* - x| < \delta$.

نختار نقطتين r' وَ r'' بحيث $r' < x^* < r''$ وبحيث $r' > x^* - \delta$ وَ $r'' < x^* + \delta$. ليكن n_0 عدداً كبيراً بكفاية بحيث يكون:

$$\left\{\begin{array}{l} |\Phi_n(r') - \Phi(r')| < \frac{\varepsilon}{6} \\ |\Phi_n(r'') - \Phi(r'')| < \frac{\varepsilon}{6} \end{array}\right. \tag{14}$$

وذلك من أجل $n_0 < n$. نستنتج من (13) وَ (14) :

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(r'')| < \frac{2}{3} \cdot \varepsilon$$

بما أن التابع Φ_n غير متناقص فإن $\Phi_n(r') \le \Phi_n(x^*) \le \Phi_n(r'')$. وبالتالي :

$$|\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*)| \le |\Phi(x^*) - \Phi(r')| + |\Phi(r') - \Phi_n(r')| + $$
$$+ |\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| \le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{4\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$$

وهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x^*) = \Phi(x^*)$.

وهكذا نكون قد أنشأنا متتالية توابع من M متقاربة نحو تابع Φ أينما كان اللهم إلاّ عند نقاط تقطع التابع Φ . بما أن مجموعة تلك النقاط قابلة للعد على الأكثر ، فإنه يمكننا تطبيق «الكيفية القطرية» من جديد ونستخرج من المتتالية $\{\Phi_n\}$ متتالية جزئية متقاربة عند هذه النقاط أيضاً ، أي أينما كان في القطعة $[a, b]$.

6. الشكل العام للتابعيات الخطية المستمرة على فضاء التوابع المستمرة .

أشرنا أعلاه إلى عدة تطبيقات لتكامل ستيلجاس . نعتبر الآن أيضاً مسألة مرتبطة بهذا المفهوم ، وبعبارة أوضح فنحن نريد تعيين الشكل العام لتابعية خطية على الفضاء $C[a, b]$.

نظرية 4. (ف . ريس F. Riesz) .

يمكن كتابة كل تابعية خطية ومستمرة F على الفضاء $C[a, b]$ ، على الشكل :

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) \qquad (15)$$

حيث Φ تابع ذو تغيّر محدود[1]. بالإضافة إلى ذلك لدينا :

$$\|F\| = V_a^b\,[\Phi]$$

البرهان. إن الفضاء $C[a, b]$ يمكن أن يعتبر كفضاء جزئي من الفضاء $M[a, b]$ المؤلف من كل التوابع المحدودة على القطعة $[a, b]$، المزود بنفس النظيم المزود به $C[a, b]$ وهو :

$$\|f\| = \sup |f(x)|$$

لتكن F التابعية الخطية المستمرة على $C[a, b]$. بفضل نظرية هان-باناخ يمكن تمديد F ، مع الاحتفاظ بالنظيم، من $C[a, b]$ إلى الفضاء $M[a, b]$ بأكمله. بصفة خاصة نلاحظ أن التابعية المحصل عليها بعد التمديد معرفة من أجل كل التوابع ذات الشكل :

$$h_a(x) \equiv 0 \quad , h_\tau(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq \tau \\ 0 & , x > \tau \end{cases} \qquad (\tau > a) \tag{16}$$

نضع :

$$\Phi(\tau) = F(h_\tau) \tag{17}$$

ونثبت أن التابع Φ ذو تغيّر محدود على القطعة $[a, b]$. من أجل ذلك نعتبر تجزئة لِـ$[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \tag{18}$$

ونضع :

$$\alpha_k = \mathrm{sgn}\big(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\big) \qquad , \; k = 1, 2, \ldots, n$$

(المقصود من «sgn» هو الإشارة) . عندئذ :

(1) يتعلق الأمر هنا بتكامل على القطعة $[a, b]$

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) = F(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}))$$

$$\leq \|F\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) \right\|$$

لكن التابع $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(h_{x_k} - h_{x_{k-1}})$ لا يأخذ إلاّ القيم ± 1 وَ 0. وبالتالي فإن نظيمه أصغر من 1 أو يساويه. إذن:

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq \|F\|$$

ولما كان ذلك صحيحاً من أجل كل تجزئة للقطعة $[a, b]$ فإننا نستنتج بأن:

$$V_a^b[\Phi] \leq \|F\|$$

وهكذا أنشأنا انطلاقاً من تابعية F تابعاً Φ تغيّره محدود. لنثبت أنه بواسطة هذا التابع يمكن كتابة التابع F على شكل تكامل ستيلجاس (15).

ليكن f تابعاً اختيارياً مستمراً على $[a, b]$. وليكن $\varepsilon > 0$ نختار $\delta > 0$ بحيث $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ في حالة صحة $|x'' - x'| < \delta$. نختار الآن التجزئة (18) بحيث يكون طول كل عنصر منها أصغر من δ ونعتبر التابع الدرجي f_ε المعرف بالطريقة التالية:

$$f_\varepsilon(x) = f(x_k) \quad , \quad x_{k-1} < x \leq x_k \quad , \quad k = 1, 2, ..., n$$

$$f_\varepsilon(a) = f(x_1)$$

يمكن بطبيعة الحال كتابته على الشكل:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \left[h_{x_k}(x) - h_{x_{k-1}}(x) \right]$$

حيث h_τ هو التابع المعرف بالمساواة (16). من الواضح أن $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ من أجل كل x حيث $a \le x \le b$، وبذلك يكون:

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$$

لنبحث عن التابعية F الموافقة للعنصر f_ε. من تعريف التابع h_τ وخطية هذه التابعية نرى أن قيمته تساوي:

$$F(f_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[F(h_{x_k}) - F(h_{x_{k-1}})\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\right]$$

أي أنه يمثل المجموع التكاملي للتكامل:

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x)$$

إذن، إذا كانت القطعة $[a, b]$ مقسمة إلى أجزاء صغيرة بكفاية فإن:

$$\left|F(f_\varepsilon) - \int_a^b f(x)\, d\Phi(x)\right| < \varepsilon$$

الّا ان لدينا من جهة أخرى:

$$|F(f) - F(f_\varepsilon)| \le \|F\| \cdot \|f - f_\varepsilon\| \le \|F\| \cdot \varepsilon$$

وبالتالي:

$$\left|F(f) - \int_a^b f(x)\, d\Phi(x)\right| < \varepsilon\left(1 + \|F\|\right)$$

بما أن $\varepsilon > 0$ اختياري نستنتج:

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x)$$

كما بيّنا أن التغيّر الكلي للتابع Φ المعرف بالدستور (17)، يحقق المتراجحة :

$$V_a^b [\Phi] \leq \|F\| \tag{19}$$

من جهة أخرى ينتج من نظرية المتوسط، بخصوص تكامل ريمان-ستيلجاس أن :

$$\|F\| \leq V_a^b [\Phi] \tag{20}$$

بمقارنة (17) وَ (20) نحصل على المساواة :

$$\|F\| = V_a^b [\Phi]$$

انتهى برهان النظرية.

ملاحظة. من الواضح أننا إذا أخذنا تابعاً كيفياً Φ تغيّره محدود على القطعة $[a, b]$ ووضعنا :

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\Phi(x)$$

نحصل على تابعية خطية على الفضاء $C[a, b]$. من الواضح أيضاً بأن كل تابعين Φ_1 وَ Φ_2، متطابقين على $[a, b]$ بأكمله إلاّ على مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط الداخلية لِـ$[a, b]$، يعرفان نفس التابعية الخطية. وبالعكس، إذا عرف Φ_1 وَ Φ_2 نفس التابعية على الفضاء $C[a, b]$ ، أي إذا كان :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\Phi_2(x)$$

من أجل كل تابع مستمر f فإنه من السهل أن نرى بأن $\Phi_1 - \Phi_2$ ثابت عند كل نقاط استمرار التابع $\Phi_1 - \Phi_2$ أي أينما كان اللهم إلاّ على مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط.

نضمّ إلى نفس صف التكافؤ كل تابعين تغيّرهما محدود على $[a, b]$ والفرق بينهما لا يخالف ثابتاً إلاّ على مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط الداخلية لِـ$[a, b]$، فنحصل على تقابل بين هذه الصفوف والتابعيات الخطية

على الفضاء $C[a, b]$. أي أن كل تابعية خطية على $C[a, b]$ تكتب على شكل تكامل ستيلجاس بالنسبة لشحنة معينة. يمكن لهذه الشحنة أن تكون معطاة بتابع ذي تغيّر محدود، لكن الصلة بين الشحنات وهذه التوابع لا يمكن أن تكون تقابلاً إلاّ بتقدير التكافؤ الوارد أعلاه.

من أجل تابع كيفي Φ من الصف الموافق لتابعية معطاة F لدينا:

$$\|F\| \leq V_a^b [\Phi]$$

نلاحظ أن هذه المتراجحة ليست مساواة دوماً لكن برهان النظرية يثبت أنه يوجد في كل صف من هذه الصفوف تابع، على الأقل، تكون من أجله المتراجحة السابقة مساواة.

الفصل السابع

فضاءات التوابع القابلة للجمع

هناك صنف هام من الفضاءات النظيمية مشكل من فضاءات التوابع القابلة للجمع. نذكر من بين الفضاءات الأخيرة الفضاء L_1 المؤلف من كل التوابع القابلة للجمع، والفضاء L_2 المؤلف من التوابع التي مربعها يقبل الجمع. سنقوم بدراسة الخاصيات الأساسية لهذه الفضاءات.

يعتمد محتوى هذا الفصل من جهة على الخاصيات العامة للفضاءات المترية والفضاءات الشعاعية النظيمية الواردة في الفصول الثاني والثالث والرابع، ومن جهة على مفهوم تكامل لوبيغ الوارد في الفصل الخامس.

§ 1. الفضاء L_1.

1. التعريف والخاصيات الأساسية للفضاء L_1.

ليكن X فضاء نعرف عليه قياساً μ؛ يمكن أن يكون قياس الفضاء X بأكمله منتهياً أو غير منته. نفرض أن القياس μ تام (وهذا يعود إلى القول بأن كل مجموعة جزئية من مجموعة ذات قياس منعدم، مجموعة قابلة للقياس).

نعتبر مجموعة كل التوابع f القابلة للجمع على X. بما أن كل عبارة خطية لتوابع قابلة للجمع تابع قابل للجمع فإن هذه المجموعة المزودة بالعمليتين المعتادتين المعرفتين لمجموع تابعين ولجداء تابع بعدد، تشكل فضاء شعاعياً.

نرمز لهذا الفضاء بِـ $L_1(X, \mu)$ أو باختصار L_1 . ندخل على L_1 نظيماً بوضع[1] :

$$\|f\| = \int |f(x)|\, d\mu \qquad (1)$$

من الواضح إذن أن :

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

وَ :

$$\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$$

ولكي تتحقق الخاصية الأخيرة للنظيم وهي أن $0 < \|f\|$ في حالة $f \neq 0$ يجب اعتبار التوابع المتكافئة على X كأنها تمثل نفس العنصر في الفضاء L_1 . بصفة خاصة فإن العنصر المنعدم في L_1 هو صف التوابع المنعدمة أينما كان تقريباً. وفي هذه الحالة نلاحظ أن العبارة (1) تمتع بكل خاصيات النظيم. وبذلك ننتهي إلى التعريف التالي.

تعريف 1. الفضاء L_1 هو، تعريفاً، الفضاء النظيمي المؤلف من العناصر التالية: كل عنصر عبارة عن صف التوابع القابلة للجمع والمتكافئة فيما بينها. اما عمليتا جمع عناصر L_1 وضربها في أعداد فتعرفان كالعادة بالنسبة للتوابع[2]، ثم إن النظيم على L_1 معرف بالدستور

$$\|f\| = \int |f(x)|\, d\mu$$

ندخل، كما هي الحالة بالنسبة لكل فضاء نظيمي، مسافة على L_1 بواسطة الصيغة :

$$\varrho(f, g) = \|f - g\|$$

---

(1) يرمز هنا وفي المستقبل $\int$ إلى التكامل على الفضاء X بأكمله.

(2) بعبارة أوضح : كل عنصر من L_1 صف توابع قابلة للجمع متكافئة فيما بينها؛ لجمع صفين من هذه الصفوف نختار من كل صف ممثلا ثم نجمع الممثلين المختارين ونأخذ مجموع الصفين الصف الذي يحوي مجموع الممثلين. من الواضح أن النتيجة لا تتعلق باختيار الممثلين. نفس الطريقة نطبقها لضرب عنصر من L_1 في عدد.

إن تقارب متتالية توابع قابلة للجمع بمفهوم هذه المسافة يسمى التقارب بالمتوسط. يمكن اعتبار الفضاء L_1 بأنه مشكّل من التوابع العقدية (الفضاء L_1 العقدي) أو فقط من التوابع الحقيقية (الفضاء L_1 الحقيقي). أما هذا الفصل فمحتواه صالح للحالتين.

هناك قضية بالغة الأهمية في العديد من مسائل التحليل، وهي:

نظرية 1. إن الفضاء L_1 تام

البرهان. لتكن $\{f_n\}$ متتالية من نوع كوشي في L_1، أي:

$$\|f_n - f_m\| \to 0$$

عندما n وَ m يؤولان إلى ∞.

توجد عندئذ متتالية متزايدة دليلاتها $\{n_k\}$ بحيث:

$$f_{n_k} - f_{n_{k+1}} = \int |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \, d\mu < \frac{1}{2^k}$$

من هذه المتراجحة ومن نظرية ب. لوفي ينتج أن السلسلة:

$$|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \dots$$

متقاربة أينما كان تقريباً على X، لكن السلسلة:

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \dots$$

في هذه الحالة متقاربة أيضاً أينما كان تقريباً على X نحو تابع:

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$$

وهكذا فإن كل متتالية لكوشي في L_1 تحوي متتالية جزئية متقاربة أينما كان تقريباً.

لنثبت الآن بأن هذه المتتالية الجزئية $\{f_{n_k}\}$ متقاربة بالمتوسط نحو نفس

التابع f. لما كانت $\{f_n\}$ متتالية لـكوشي، فإن من أجل $\varepsilon > 0$ ومن أجل k وَ l كبيرين لدينا:

$$\int |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \, d\mu < \varepsilon$$

من نظرية فاتو نرى أنه يمكن الانتقال إلى النهاية تحت رمز التكامل ($l \to \infty$) في المتراجحة السابقة. نحصل عندئذ على:

$$\int |f_{n_k}(x) - f(x)| \, d\mu \leq \varepsilon$$

ومنه ينتج أن $f \in L_1$ وأن $f_{n_k} \to f$. لكن إذا احتوت متتالية كوشية متتالية جزئية متقاربة نحو نهاية ما فإن المتتالية نفسها متقاربة نحو نفس النهاية. انتهى البرهان.

2. المجموعات الكثيفة أينما كان في L_1.

من أجل كل تابع f قابل للجمع على X، ومن أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد تابع بسيط قابل للجمع $\varphi(x)$ بحيث:

$$\int |f(x) - \varphi(x)| \, d\mu < \varepsilon$$

من جهة أخرى، بما أن تكامل تابع بسيط قابل للجمع ويأخذ القيم $y_1, y_2, \ldots$ على المجموعات $E_1, E_2, \ldots$، تكامل معرف كمجموع للسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \, \mu(E_n)$$

(شريطة أن تكون هذه السلسلة متقاربة مطلقاً) فإنه يتضح أن كل تابع بسيط قابل للجمع يمكن أن يعتبر كنهاية (بالمتوسط) لمتتالية توابع بسيطة كل تابع منها لا يأخذ سوى عدد منته من القيم. بالتالي فإن التوابع التي لا تأخذ سوى عدد منته من القيم (أي تلك التي تمثل عبارات خطية منتهية من التوابع المميزة) تشكل مجموعة كثيفة أينما كان في L_1.

ليكن R فضاء مترياً، نعرف عليه قياساً يحقق الشرط التالي (المتوفر في قياس لوبيغ على فضاء إقليدي، كما يتوفر في العديد من الحالات ذات الأهمية العملية) : كل المجموعات المفتوحة وكل المجموعات المغلقة في R تقبل القياس، ومن أجل كل مجموعة قابلة للقياس $M \subset R$ ومن أجل كل $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مفتوحة $G \supset M$ بحيث :

$$\mu(G \setminus M) < \varepsilon \tag{2}$$

عندئذ تتوفر لدينا النتيجة التالية :

نظرية 2. إن مجموعة كل التوابع المستمرة القابلة للجمع مجموعة كثيفة أينما كان في $L_1(R, \mu)$.

البرهان. يتبين مما سبق أنه يكفي البرهان على أن كل تابع بسيط، عدد قيمه منته، هو حتماً نهاية بمفهوم التقارب بالمتوسط لمتتالية توابع مستمرة. لكن بما أن كل تابع بسيط وقابل للجمع (وعدد قيمه منته) يساوي عبارة خطية من التوابع المميزة $\chi_M(x)$ للمجموعات القابلة للقياس وذات القياس المنتهي، فإنه يكفي تقديم البرهان من أجل التوابع الأخيرة (أي التوابع المميزة) . لتكن M مجموعة قابلة للقياس من فضاء متري R وليكن $\mu(M) < \infty$. عندئذ نستنتج من الشروط (2) أن من أجل $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مغلقة F_M ومجموعة مفتوحة G_M بحيث :

$$F_M \subset M \subset G_M$$

$$\mu(G_M \setminus F_M) < \varepsilon$$

نعرف الآن تابعاً $\varphi_\varepsilon(x)$ بوضع[1] :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\varrho(x, R \setminus G_M)}{\varrho(x, R \setminus G_M) + \varrho(x, F_M)}$$

---

(1) يرمز $\varrho(x, A)$ إلى المسافة بين النقطة x والمجموعة A .

إن هذا التابع يساوي 0 من أجل $x \in R\setminus G_M$ ويساوي 1 من أجل $x \in F_M$. إنه تابع مستمر لأن كلاً من التابعين $\varrho(x, F_M)$ وَ $\varrho(x, R\setminus G_M)$ مستمر ومجموعها لاينعدم أبداً. أما التابع $\chi_M - \varphi_\varepsilon$ فهو لا يتجاوز 1 على $G_M\setminus F_M$ وينعدم خارج هذه المجموعة. بالتالي:

$$\int |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, d\mu < \varepsilon$$

ومنه تأتي نتيجة النظرية.

من الواضح أن الفضاء $L_1(X, \mu)$ لايتعلق لا باختيار الفضاء X ولا باختيار القياس μ على هذا الفضاء. فمثلاً إذا كان القياس μ مركزاً في عدد منته من النقاط، فإن $L_1(X, \mu)$ يصبح فضاء بعده منته. نلاحظ أن الفضاءات L_1 ذات البعد غير المنتهي هي التي تلعب الدور الأساسي في التحليل الرياضي، وذلك عند احتوائها لمجموعة جزئية قابلة للعد وكثيفة أينما كان. لتمييز الفضاءات L_1 من هذا النوع ندخل أيضاً المفهوم التالي الذي يرجع أصلاً إلى النظرية العامة للقياس.

تعريف 2. نقول عن قياس μ إنه ذو أساس قابل للعد إذا وجدت جماعة قابلة للعد:

$$\mathcal{A} = \{A_n\} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

مؤلفة من مجموعات جزئية قابلة للقياس في الفضاء X (هذه الجماعة هي الأساس القابل للعد للقياس μ) بحيث من أجل كل مجموعة قابلة للقياس $M \subset X$ ومن أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $A_k \in \mathcal{A}$ بحيث:

$$\mu(M \Delta A_k) < \varepsilon$$

بصفة خاصة يكون القياس μ ذا أساس قابل للعد إذا تمكنا من اعتباره كتمديد حسب لوبيغ لقياس m معرف على نصف حلقة قابلة للعد $\mathfrak{S}$. ذلك أن الحلقة $\mathcal{R}(\mathfrak{S})$ (القابلة للعد، طبعاً) في هذه الحالة هي بالضبط الأساس المطلوب. ومنه نرى مثلاً أن قياس لوبيغ على قطعة له أساس قابل للعد

لأننا نستطيع، من أجل هذا القياس، أخذ مجموعة المجالات نصف المفتوحة ذات الحدود الناطقة بمثابة نصف الحلقة الابتدائية.

إن الجداء $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ لقياسين لهما أساسان قابلان للعد هو أيضاً قياس ذو أساس قابل للعد لأن الاتحادات المنتهية المؤلفة من جداءات عناصر تنتمي إلى أساس القياس μ_1 في عناصر تنتمي إلى أساس القياس μ_2، إتحادات تشكل أساساً للقياس $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ (من السهل التأكد من ذلك). ومنه ينتج بأن قياس لوبيغ على المستوى (وأيضاً على فضاء بعده n) له أساس قابل للعد.

ليكن:

$$A_1^*, A_2^*, ..., A_n^*, ... \tag{3}$$

أساساً قابلا للعد للقياس μ. من الواضح أن الجماعة (3) يمكن توسيعها بحيث نحصل على أساس جديد قابل للعد لهذا القياس:

$$A_1, A_2, ..., A_n, ... \tag{4}$$

ويكون هذا الأساس مغلقا بالنسبة للطرح والاتحادات والتقاطعات المنتهية للمجموعات أي أنه يتمتع ببنية حلقة.

نظرية 3. إذا كان القياس μ ذا أساس قابل للعد في $L_1(X, \mu)$ فإنه توجد مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان مؤلفة من التوابع.

البرهان. لنثبت أن المجاميع المنتهية:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x) \tag{5}$$

(حيث c_k أعداد ناطقة وَ f_k توابع مميزة لعناصر من الأساس القابل للعد للقياس μ) تشكل مجموعة قابلة للعد كثيفة أينما كان في $L_1(X, \mu)$.

إن عدودية هذه المجموعة أمر بديهي؛ لنبين أنها كثيفة أينما كان في

$L_1(X, \mu)$. سبق وأن أثبتنا بأن مجموعة التوابع الدرجية التي لا تأخذ سوى عدد منته من القيم مجموعة كثيفة أينما كان في L_1 . ولما كان بالإمكان تقريب كل تابع من هذا النوع بالدقة التي نرغب فيها بواسطة توابع من نفس النوع لاتأخذ سوى قيم ناطقة، فإنه يكفي أن نثبت بأن كل تابع درجي f يأخذ على المجموعات : $E_1, E_2, ..., E_n$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X \;\; ; \;\; E_i \cap E_j = \varnothing \;\; , i \neq j\right)$$

القيم التالية على التوالي :

$$y_1, y_2, ..., y_n$$

(حيث y_i أعداد ناطقة) تابع يمكن تقريبه بمفهوم مسافة L_1 بالدقة التي نرغب فيها، وذلك بواسطة توابع من الشكل (5). بمراعاة الملاحظة الواردة أعلاه، يمكن أن نفرض دون المس بعمومية المسألة بأن أساس القياس μ حلقة.

من التعريف 2 يتبين أن من أجل كل $\varepsilon > 0$ فإن الأساس القابل للعد للقياس μ يحوي مجموعات $A_1, ..., A_n$ بحيث :

$$\mu(E_k \,\Delta\, A_k) < \varepsilon$$

نضع :

$$A'_k = A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

وَ :

$$f^*(x) = \begin{cases} y_k & , x \in A'_k \\ 0 & , x \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A'_i \end{cases}$$

من السهل أن نرى من أجل ε صغير بكفاية أن القياس :

$$\mu\{x : f(x) \neq f^*(x)\}$$

يصبح صغيراً بالشكل الذي نريده. وبالتالي فإن التكامل :

$$\int |f(x) - f^*(x)| d\mu \le (2 \max |y_k|) \mu \{x : f(x) \ne f^*(x)\}$$

يصير صغيراً بالشكل الذي نريده عند أخذ ε صغيراً بكفاية.

بفضل الفروض المتخذة بالنسبة لأساس μ نرى أن التابع f^* يكتب على الشكل (5). انتهى برهان النظرية.

في الحالة الخاصة التي يكون فيها X قطعة من المستقيم العددي ويكون فيها القياس μ قياس لوبيغ، يمكن أن نحصل على مجموعة قابلة للعد وكثيفة أينما كان في L_1 بطريقة أيسر، مثلاً بأخذ مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الناطقة. بالفعل، فإن هذه المجموعة كثيفة أينما كان في مجموعة التوابع المستمرة (حتى بمفهوم التقارب المنتظم) ثم إن المجموعة الأخيرة كثيفة أينما كان في $L_1(X, \mu)$.

§ 2. الفضاء L_2

1. التعريف والخاصيات الأساسية.

كنا رأينا بأن الفضاء L_1 فضاء شعاعياً نظيمياً تاماً (أي فضاء لباناخ). لكنه فضاء غير إقليدي: ذلك أن النظيم المزود به لايمكن تعريفه بواسطة جداء سلمي. ينتج ذلك من «نظرية متوازي الأضلاع» المثبتة في الفصل 3، § 4، 8. فمثلاً من أجل التابعين $f \equiv 1$ وَ $g = \sin x$ القابلين للمكاملة على القطعة $[0, 2\pi]$ نجد أن العلاقة:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2 (\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

ليست محققة في L_1.

يمكن انشاء فضاء نظيمي واقليدي باعتبار مجموعة التوابع ذات المربعات القابلة للجمع. ندخل فيما يلي التعريفات الموافقة لذلك. نعتبر في البداية توابع

حقيقية f معرفة على فضاء X مزود بقياس μ. نفرض أن جميع التوابع قابلة للقياس ومعرفة أينما كان تقريباً على X. ونعتبر من جهة أخرى أن التوابع المتكافئة فيما بينها متساوية.

تعريف 1. نقول عن تابع f إنه ذو مربع قابل للجمع على X إذا كان التكامل:

$$\int f^2(x)\,d\mu$$

موجوداً (ومنتهياً). نرمز لمجموعة التوابع التي تحقق هذا الشرط بِـ $L_2(X, \mu)$ أو باختصار L_2.

نورد فيما يلي الخاصيات الأساسية لعناصر L_2.

1. إن جداء تابعين من L_2 تابع من L_1.

ينتج ذلك مباشرة من المتراجحة:

$$|f(x)\,g(x)| \leq (1/2)\,[f^2(x) + g^2(x)]$$

ومن خاصيات تكامل لوبيغ.

نتيجة. كل تابع f من L_2 على فضاء قياسه منته تابع يقبل الجمع.

لرؤية ذلك يكفي أن نضع $g(x) \equiv 1$ وأن نستخدم الخاصية 1.

2. إن مجموع تابعين من L_2 تابع من L_2.

لدينا:

$$(f(x) + g(x))^2 \leq f^2(x) + 2\,|f(x)\,g(x)| + g^2(x)$$

بالاعتماد على الخاصية 1 نرى أن كلاً من التوابع الثلاثة الواردة في الطرف الأيمن تقبل المكاملة.

3. إذا كان $f \in L_2$ وَ α عدداً كيفياً فإن $\alpha f \in L_2$.

ذلك أنه إذا كان $f \in L_2$ فإن:

$$\int [\alpha f(x)]^2 \, d\mu = \alpha^2 \int f^2(x) \, d\mu < \infty$$

تنص الخاصيتان 2 وَ 3 على أن كل عبارة خطية من توابع L_2 تابع من L_2. بالإضافة إلى ذلك، من الواضح أن جمع توابع من L_2 وضربها في الأعداد عمليتان تحققان كل الشروط الواردة في تعريف الفضاء الشعاعي (الفصل 3، § 1). وبالتالي فإن المجموعة L_2 المؤلفة من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة (أو الجمع) فضاء شعاعي.

نعرف الآن الجداء السلمي في L_2 بوضع:

$$(f, g) = \int f(x) \, g(x) d\mu$$

من الواضح أن الشروط الواردة في تعريف الجداء السلمي (الفصل 3، § 4) محققة هنا كلها، وهي:

1) $(f, g) = (g, f)$

2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$

3) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$

4) $(f, f) > 0$ في حالة $f \neq 0$.

بصفة خاصة فإن الشرط 4 محقق لأننا اصطلحنا على أن نأخذ التوابع المتكافئة فيما بينها متساوية (وهكذا فالعنصر المنعدم في L_2 هو مجموعة التوابع على X المكافئة للتابع $f \equiv 0$).

وهكذا، بعد أن عرفنا من أجل توابع L_2 عمليتي الجمع والضرب في عدد وكذا الجداء السلمي، نصل إلى التعريف النهائي التالي:

تعريف 2. الفضاء الإقليدي L_2 هو، تعريفاً، الفضاء الشعاعي المؤلف من

العناصر التالية : كل عنصر يمثل صف التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة المتكافئة فيما بينها ، والمزود بالجداء السلمي :

$$(f, g) = \int f(x)\, g(x)\, dx$$

لدينا في L_2 ، كما هو الحال بالنسبة لكل فضاء إقليدي ، المتراجحة المعروفة بمتراجحة كوشي-بونياكوفسكي ومتراجحة المثلث وهما تكتبان في هذه الحالة على الشكل :

$$\left(\int f(x)\, g(x)\, d\mu\right)^2 \leq \int f^2(x)\, d\mu \int g^2(x)\, d\mu$$

وَ :

$$\sqrt{\int [f(x) + g(x)]^2\, d\mu} \leq \sqrt{\int f^2(x)\, d\mu} + \sqrt{\int g^2(x)\, d\mu}$$

بصفة خاصة ، ومن أجل $\mu(X) < \infty$ ، عندما نضع في متراجحة كوشي-بونياكوفسكي $g(x) \equiv 1$ نحصل على التقدير المفيد التالي :

$$\left(\int f(x)\, d\mu\right)^2 \leq \mu(X) \int f^2(x)\, d\mu \qquad (1)$$

إن النظيم على L_2 معرف بالدستور :

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int f^2(x)\, d\mu}$$

أما المسافة بين عنصرين f وَ g من L_2 فهي معرفة بالدستور :

$$\varrho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int (f(x) - g(x))^2\, d\mu}$$

تسمى الكمية :

$$\int (f(x) - g(x))^2\, d\mu = \|f - g\|^2$$

الانحراف التربيعي المتوسط للتابعين f وَ g.

يسمى تقارب متتالية توابع بمفهوم مسافة الفضاء L_2 التقارب بالمتوسط التربيعي. إذا لم نخش التباساً بين هذا التقارب والتقارب في L_1 المعرف في الفقرة السابقة فإننا نستعمل هنا أيضاً عبارة «التقارب بالمتوسط».

نظرية 1. إذا كان: $\mu(X) < \infty$ فإن الفضاء $L_2(X, \mu)$ تام.

البرهان. لتكن $\{f_n\}$ متتالية لكوشي في L_2، أي:

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad , \quad n, m \to \infty$$

حينئذ، وبفضل التقدير (1)، نجد:

$$\int |f_n(x) - f_m(x)| \, d\mu \le [\mu(X)]^{1/2} \left\{ \int (f_n(x) - f_m(x))^2 \, d\mu \right\}^{1/2} \tag{2}$$

$$\le \varepsilon \, [\mu(X)]^{1/2}$$

وهذا يعني أن $\{f_n\}$ متتالية لكوشي بالنسبة لمسافة الفضاء L_1 أيضاً. بإعادة الاستدلال المتبع للبرهان على أن الفضاء L_1 تام نختار في $\{f_n\}$ متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}$ متقاربة أينما كان تقريباً نحو التابع f. بالاعتماد على نظرية فاتو نرى أنه يمكن في المتراجحة:

$$\int (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 \, d\mu < \varepsilon$$

المحققة من أجل حدود هذه المتتالية الجزئية عندما يكون k وَ l كبيرين، يمكن الانتقال إلى النهاية ($l \to \infty$). نحصل عندئذ على:

$$\int (f_{n_k}(x) - f(x))^2 \, d\mu \le \varepsilon$$

ومنه ينتج أن $f \in L_2$ وأن $f_{n_k} \to f$. لإنهاء البرهان يكفي، كما هو الحال

في برهان النظرية 1 من 1§، أن نستعمل النتيجة القائلة بأن كل متتالية لـكوشي في حالة احتوائها لمتتالية جزئية متقاربة هي متتالية متقاربة نحو نفس النهاية.

2. حالة فضـاء قياسه غير منته.

درسنا آنفاً التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة المعرفة على فضـاء X قياسه منته. ولدى هذه الدراسة اعتمدنا بالفعل على الشرط $\mu(X) < \infty$: لجأنا إلى هذا الشرط أولاً عند البرهان على أن كل تابع من L_2 يقبل المكاملة ثم عند البرهان على المتراجحة (2) التي يعتمد عليها برهان النتيجة التي تنص على أن L_2 تام. إذا اعتبرنا توابع معرفة على فضـاء قياسه غير منته (مثلاً على المستقيم العددي مع تزويده بقياس لوبيغ) فإننا نلاحظ وجود توابع من L_2 لاتنتمي إلى L_1. مثال ذلك التابع $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ فهو غير قابل للمكاملة على المستقيم العددي بأكمله على الرغم من أن مربعه يقبل المكاملة. من جهة أخرى، في الحالة التي يكون فيها $\mu(X) < \infty$ فإن لدينا المتراجحة (1) التي تعني بأن تقارب متتالية توابع في L_2 تؤدي إلى تقاربها في L_1. أما عندما يكون $\mu(X) = \infty$ فإن ذلك غير صحيح: فالمتتالية:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1/n & , \quad |x| \leq n \\ 0 & , \quad |x| > n \end{cases}$$

مثلاً متتالية توابع متقاربة نحو 0 في الفضـاء $L_2(-\infty, \infty)$ المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على المستقيم العددي، لـكنها ليست متقاربة نحو أية نهاية في $L_1(-\infty, \infty)$. إلاّ أن الفضـاء L_2 يبقى تاماً حتى ولو كان $\mu(X) = \infty$[1].

(1) نلاحظ أن البرهان على أن L_1 تام، وهو البرهان الوارد في 1§، لا يتعلق بالفرض حول قياس الفضاء X، منتهياً كان أو غير منته.

لنثبت ذلك. كما هو الحال في الفصل 5، 5§، 6 حيث أدخلنا مفهوم التكامل على مجموعة قياسها غير منته، سنفرض أن الفضاء X يمكن تمثيله بواسطة اتحاد قابل للعد من المجموعات ذات القياس المنتهي. ليكن:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad , \quad \mu(X_n) < \infty,$$

$$(X_n \cap X_m = \varnothing \quad , \quad n \neq m)$$

ذلك التمثيل، ولتكن $\{f_n\}$ متتالية لكوشي في $L_2(X, \mu)$. عندئذ من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد N بحيث:

$$\int [f_k(x) - f_l(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon$$

وذلك من أجل كل k وَ $l \geq N$. نضع:

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \quad x \in X_n \\ 0 & , \quad x \notin X_n \end{cases}$$

بفضل الجمعية القابلة للعد لتكامل لوبيغ لدينا:

$$\int [f_k(x) - f_l(x)]^2 \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f_l^{(n)}(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon$$

إذن من أجل كل M منته لدينا حتماً:

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f_l^{(n)}(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon \tag{3}$$

إن مجموعة التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على كل مجموعة X_n تامة. بوضع:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{l \to \infty} f_l^{(n)}(x)$$

(بمفهوم التقارب في الفضاء $L_2(X_n, \mu)$) يمكن أن ننتقل في المتراجحة (3) إلى النهاية من أجل $l \to \infty$. نحصل حينئذ على:

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \, d\mu \le \varepsilon$$

وبما أن المتراجحة محققة من أجل كل الأعداد M ، يمكننا الإنتقال إلى النهاية بجعل $M \to \infty$. وهذا يقودنا إلى المتراجحة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \, d\mu \le \varepsilon$$

بوضع :

$$f(x) = f^{(n)}(x) \qquad , \qquad x \in X_n$$

نستطيع إعادة كتابة المتراجحة على الشكل :

$$\int [f_n(x) - f(x)]^2 \, d\mu \le \varepsilon$$

ومنه يأتي أن f ينتمي إلى $L_2(X, \mu)$ وأن المتتالية $\{f_k\}$ متقاربة نحو f .

تمرين . نعرف $L_p(X, \mu)$ كمجموعة صفوف التوابع المتكافئة المحققة لِـ $\int |f(x)|^p \, d\mu < \infty$ حيث $1 \le p < \infty$. أثبت ان $L_p(X, \mu)$ فضاء لباناخ بالنسبة للنظيم :

$$\|f\| = \left(\int |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

3. المجموعات الكثيفة أينما كان في L_2 . نظرية التشاكل

تَبيَّن إذن أن الفضاء $L_2(X, \mu)$ المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة فضاء إقليدي تام . إن بعد هذا الفضاء غير منته ما عدا حالات شاذة . من المهم بالنسبة للعديد من التطبيقات في التحليل معرفة الشروط التي تجعل الفضاء $L_2(X, \mu)$ قابلاً للفصل ، أي يحوي مجموعة قابلة للعد كثيفة أينما كان . رأينا في 1 § أن $L_1(X, \mu)$ يقبل الفصل إذا كان للقياس μ أساس قابل للعد . من السهل التأكد من أن هذا الشرط يضمن أيضاً قابلية

الفصل لِـ $L_2(X, \mu)$. ذلك أن كل تابع من $L_2(X, \mu)$ يمكن تقريبه بالدقة التي نرغب فيها بواسطة توابع منعدمة خارج مجموعات معينة ذات قياس منته[1]. تثبت الاستدلالات السابقة أن في برهان النظرية 3، § 1، أننا نستطيع اختيار مجموعة جزئية قابلة للعد وكثيفة أينما كان في مجموعة التوابع المشار اليها آنفاً.

وهكذا إذا كان للقياس μ أساس قابل للعد فإن $L_2(X, \mu)$ فضاء اقليدي تام وقابل للفصل. بعبارة أخرى، إذا وضعنا جانباً الحالة التي يكون فيها $L_2(X, \mu)$ ذا بعد منته فإننا نحصل على النتيجة التالية: إذا كان القياس μ ذا أساس قابل للعد فإن $L_2(X, \mu)$ فضاء لهلبير قابل للفصل.

بفضل نظرية التشاكل في الفضاءات الهيلبرتية نلاحظ أن ذلك يعني بأن الفضاءات $L_2(X, \mu)$ التي تمتع بالخاصية السالفة الذكر فضاءات متشاكلة فيا بينها. بصفة خاصة نرى بأن كلا من هذه الفضاءات متشاكل مع الفضاء l_2 المؤلف من المتتاليات العددية $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ التي تحقق $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. يمكن اعتبار الفضاء الأخير بمثابة $L_2(X, \mu)$، حيث X مجموعة قابلة للعد، أما القياس μ فهو معرف على كل مجموعاتها الجزئية ويساوي 1 عند كل نقطة. نقتصر في المستقبل على الفضاءات $L_2(X, \mu)$ بحيث يكون القياس μ ذا أساس قابل للعد. وإذا لم نخش التباساً نرمز لهذا الفضاء بِـ L_2.

الفضاء L_2 فضاء هيلبرتي حسب ماسبق ذكره ولذا فإن كل المفاهيم وكل النتائج المثبتة في الفصل 3، § 4 الخاصة بفضاء هيلبرتي مجرد قائمة من أجل L_2.

بصفة خاصة، بالاعتماد على نظرية ريس، فإن كل تابعية خطية على فضاء هيلبرتي H تكتب على شكل جداء سلمي:

$$F(h) = (h, a)$$

(1) إذا كان: $\mu(X) < \infty$ فإن هذه العملية لا لزوم لها.

حيث a شعاع مثبّت من H . وبالتالي كل تابعية على L_2 تكتب بالضرورة على النحو :

$$F(f) = \int f(x)\, g(x)\, d\mu$$

حيث g تابع مثبّت ذو مربع قابل للمكاملة على X .

4. الفضــاء L_2 العقدي .

اعتبرنا ســابقاً الفضــاء L_2 الحقيقي . إن النتائج المحصل عليها تمتد صلاحيتها بدون صعوبة تذكر إلى حالة الفضــاء العقدي . نقول عن تابع عقدي f معرف على فضــاء X مزود بقياس μ، إنه تابع مربعه قابل للمكاملة إذا كان التكامل :

$$\int_X |f(x)|^2\, d\mu$$

منتهياً . نعرف جمع مثل هذه التوابع وضربها في أعداد كالمعتاد ، ونعرف الجداء السلمي بالدستور :

$$(f, g) = \int_X f(x)\, \overline{g(x)}\, d\mu$$

فنحصل على فضــاء إقليدي نسميه الفضــاء L_2 العقــدي (نعتبر هنا أيضاً ، كما هو الحال بالنسبة لحالة L_2 الحقيقي ، بأن جميع التوابع المتكافئة فيما بينها متسـاوية) . إن هذا الفضــاء تام ، وإذا كان للقياس μ أســاس قابل للعد فإن L_2 يصبح قابلاً للفصل . وهكذا (بترك الحالة التي يكون فيها L_2 ذا بعد منته) يتضح أن لدينا النتيجة :

إن الفضــاء L_2 العقدي الموافق لقياس ذي أســاس قابل للعد فضــاء لهيلبرت عقدي وقابل للفصل . ثم إن كل هذه الفضــاءات متشــاكلة فيما بينها وتتمتع إلى جانب ذلك بالخاصيات الواردة في الفصل 3 ، §4 .

5. التقارب بالمتوسط التربيعي وعلاقته بأنواع أخرى من تقاربات متتاليات التوابع .

بإدخال نظيم على الفضاء L_2 نكون قد أدخلنا في نفس الوقت مفهوم التقارب التالي من أجل التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة :

$$f_n \to f$$

إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \int [f_n(x) - fx)]^2 \, d\mu = 0$$

وقد سمي هذا النوع من التقارب التقارب بالمتوسط التربيعي . نريد الآن إيجاد العلاقة بين هذا التقارب وبعض التقاربات الأخرى لمتتاليات التوابع . نعتبر أولاً الحالة التي يكون فيها الفضاء X ذا قياس منته .

1. إذا كانت متتالية توابع $\{f_n\}$ من الفضاء $L_2(X, \mu)$ متقاربة من أجل مسافة $L_2(X, \mu)$ فإنها متقاربة أيضاً من أجل مسافة $L_1(X, \mu)$.

ذلك أن المتراجحة (2) تعطي :

$$\int |f_n(x) - f(x)| \, d\mu \leq \left[\mu(X) \int (f_n(x) - f(x))^2 \, d\mu\right]^{1/2}$$

ومنه تأتي النتيجة المطلوبة .

2. إذا كانت متتالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام فإنها متقاربة أيضاً بالمتوسط التربيعي .

لرؤية ذلك نلاحظ ، من أجل $\varepsilon > 0$ ومن أجل كل n كبير بكفاية ، أن لدينا :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

وبالتالي :

$$\int [f_n(x) - f(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon^2 \mu(X)$$

ومنه تأتي النتيجة.

3. إذا كانت متتالية $\{f_n\}$ من التوابع القابلة للمكاملة متقاربة بالمتوسط فإنها متقاربة أيضاً بالقياس على X.

تنتج هذه الخاصية مباشرة من متراجحة تشيبيتشاف (الفصل 5، § 5، 3). ومنه، بالاعتماد على النظرية 8 § 4 الفصل 5، تنتج القضية:

4. إذا كانت متتالية $\{f_n\}$ متقاربة بالمتوسط، فإنه يمكن أن نستخرج منها متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}$ متقاربة أينما كان تقريباً.

نلاحظ أننا أثبتنا هذه النتيجة لدى البرهان على أن الفضاء L_1 تام وذلك دون استخدام النظرية 8، § 4، الفصل 5.

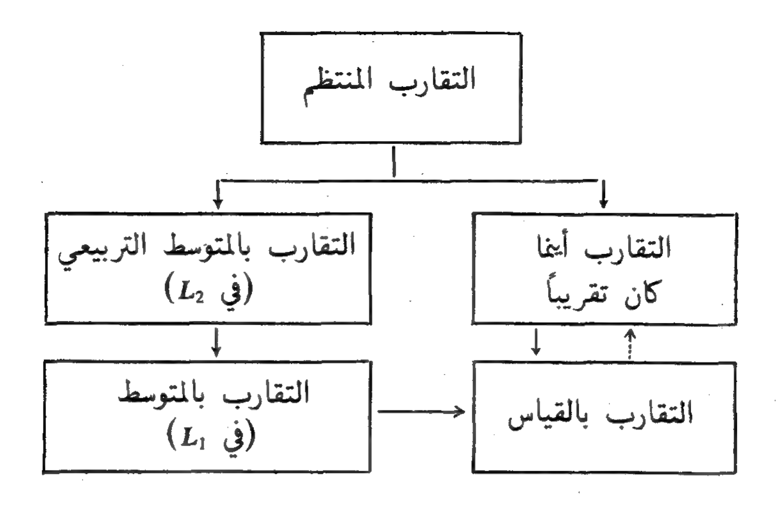
من السهل أن نرى بأن تقارب متتالية بالمتوسط (وحتى بالمتوسط التربيعي) لا يؤدي عموماً إلى تقاربها أينما كان تقريباً. ذلك لأن المتتالية $\{f_n\}$ المشيدة ضمن الفصل 5، § 4، 6 متقاربة بالمتوسط (وحتى بالمتوسط التربيعي) نحو $f \equiv 0$ ورغم ذلك فهي، كما رأينا، غير متقاربة نحو 0 عند كل نقطة. وبالعكس يمكن أن تكون متتالية $\{f_n\}$ متقاربة أينما كان تقريباً (وحتى أينما كان) دون أن تكون متقاربة بالمتوسط. نعتبر مثلا المتتالية $\{f_n\}$ على القطعة $[0, 1]$ بحيث:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & , \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & , \quad x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

من الواضح أن $f_n(x) \to 0$: من أجل كل $x \in [0, 1]$ مع أن:

$$\int_0^1 |f_n(x)| \, dx = 1 \quad , \quad \forall n$$

يمكن وضع العلاقة الموجودة بين مختلف أنواع التقارب في حالة $\mu(X) < \infty$ على الشكل التالي:



حيث يرمز السهم المنقط إلى امكانية استخراج، من متتالية متقاربة بالقياس، متتالية جزئية متقاربة أينما كان تقريباً.

أما في حالة $\mu(X) = \infty$ (مثلاً من أجل التوابع المعرفة على كل المستقيم العددي، مع أخذ قياس لوبيغ على هذا المستقيم) فإن العلاقة المثبتة الواردة أعلاه تصبح غير صحيحة. فمثلاً إذا اعتبرنا المتتالية:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{n} & , \quad |x| \leq n \\ 0 & , \quad |x| > n \end{cases}$$

وجدناها متقاربة بانتظام على كل المستقيم العددي نحو $f \equiv 0$ ورغم ذلك فهي غير متقاربة لا بالمتوسط ولا بالمتوسط التربيعي.

زيادة على ذلك، وكما سبق أن أشرنا، فإن تقارب متتالية بالمتوسط التربيعي (أي في L_2) لاتؤدي في حالة $\mu(X) = \infty$ إلى تقارب هذه المتتالية بالمتوسط (أي في L_1).

نلاحظ أخيراً أن التقارب بالمتوسط لايؤدي عموماً إلى التقارب بالمتوسط التربيعي سواء في حالة $\mu(X) < \infty$ أو في حالة $\mu(X) = \infty$.

§ 3. الجمل المتعامدة المؤلفة من توابع في L_2 . السلاسل بالنسبة لجملة متعامدة.

تبين النظريات العامة المثبتة في الفصل 3، § 4 من أجل الفضاءات الإقليدية أنه توجد في L_2 جملاً متعامدة تامة (وبصفة خاصة، جملاً متعامدة ومتجانسة) مؤلفة من توابع. يمكن الحصول على مثل هذه الجملة، مثلاً، بتطبيق كيفية المعامدة (الفصل 3، § 4) على جملة تامة من التوابع. إذا اخترنا جملة متعامدة تامة $\{\varphi_n\}$ في L_2 فإن كل عنصر $f \in L_2$ يمكن اعتباره طبقاً للنتائج العامة الواردة في الفصل 3، § 4 كمجموع لسلسلة فوريي للتابع f بالنسبة للجملة المتعامدة $\{\varphi_n\}$:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

أما المعاملات c_n، أي معاملات فوريي للتابع f بالنسبة للجملة $\{\varphi_n\}$، فهي معرفة بالدساتير:

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int f(x) \varphi_n(x) \, d\mu$$

(حيث $\|\varphi_n\|^2 = \int \varphi_n^2(x) \, d\mu$) . نعتبر في هذه الفقرة أبرز الأمثلة في الجمل المتعامدة في L_2 كما نعتبر النشور الموافقة لها.

1. الجملة المثلثية. الجملة المثلثية لفوريي (Fourier). نعتبر الفضاء $L_2[-\pi, \pi]$ المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على القطعة $[-\pi, \pi]$، ونعتبر على هذه القطعة قياس لوبيغ المعتاد.

تشكل التوابع :

$$1, \ \cos nx \ , \ \sin nx \ , ... \quad (n = 1, 2, ...) \tag{1}$$

في هذا الفضاء جملة متعامدة تامة تسمى الجملة المثلثية. نتأكد من خاصية التعامدة بالحساب المباشر؛ مثلاً من أجل $n \neq m$ لدينا :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \frac{n+m}{2} x + \cos \frac{n-m}{2} x\right] dx = 0$$

الخ. ثم إن هذه الجملة تامة وينتج ذلك من نظرية فيرشتراس الخاصة بتقريب تابع دوري مستمر كيفي بواسطة كثيرات حدود مثلثية[1]. إن الجملة (1) غير متجانسة، والجملة المتجانسة الموافقة للجملة (1) هي :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ , \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \ , \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \ , \ (n = 1, 2, ...)$$

ليكن f تابعاً في $L_2[-\pi, \pi]$ ؛ نرمز لمعاملات فوريي لهذا التابع بِـ : $\frac{a_0}{2}$ ، a_n ، b_n. وبالتالي، وطبقاً للدساتير العامة الخاصة بمعاملات فوريي، نستنتج :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

وَ :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ , \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

أما سلسلة فوريي الموافقة لهذه المعاملات فهي :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

---

(1) سنبرهن في الفصل 8، 2§ على نظرية فوجير المعززة لنظرية فيرشتراس. ونحصل في نفس الوقت على برهان النتيجة القائلة أن الجملة المثلثية تامة (وذلك بصفة مستقلة عن النتائج الواردة هنا).

ومهما كان التابع $f \in L_2$ فهذه السلسلة متقاربة بالمتوسط التربيعي نحو التابع f ذاته . إذا كان :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

مجموعاً جزئياً لسلسلة فوريي فإن الإنحراف التربيعي المتوسط لِـ S_n وَ f يمكن أن يحسب بواسطة الدستور :

$$\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right)$$

من بين جميع كثيرات الحدود المثلثية من الدرجة n :

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

فإن المجموع الجزئي لسلسلة فوريي S_n تعطي أحسن تقريب للتابع f (من أجل مسافة L_2) . أما متراجحة بسل (Bessel) من أجل الجملة المثلثية فهي من الشكل :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

لكن ، لما كانت الجملة المثلثية تامة فإن لدينا في الواقع من أجل كل تابع في L_2 علاقة بارسفال (Parseval) :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

من أجل كل تابع $f \in L_2$ فإن مربعات معاملات فوريي تشكل سلسلة متقاربة . وبالعكس إذا كانت الأعداد a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2 \ldots)$ بحيث تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ متقاربة فإن السلسلة :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

متقاربة أيضاً (في L_2) ومجموعها تابع معاملاته (لفوريي) مطابقة للأعداد : a_0, a_n, b_n .

إن كل هذه القضايا (التي تأتي مباشرة من النتائج العامة الواردة في الفصل 3، § 4) تمتد بسهولة إلى حالة التوابع المعرفة على قطعة طولها كيفي. إذا كان f تابعاً مربعه قابل للجمع على $[-l, l]$ فإن تحويل المتغير $x = \frac{\pi t}{l}$ أي $t = \frac{lx}{\pi}$ يؤدي إلى تعويض $f(t)$ بالتابع $f^*(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$ المعرف على القطعة $[-\pi, \pi]$.

نستنتج من ذلك أن :

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} \mathrm{d}t \qquad , \qquad n = 0, 1, \ldots$$

وَ :

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{t} \mathrm{d}t \qquad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

أما سلسلة فوريي بالنسبة لتابع f معرف على قطعة طولها $2l$ فلها الشكل :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l}\right)$$

ملاحظة. 1. استخدمت السلاسل المثلثية من طرف الرياضي الفرنسي ج. فوريي في أعماله حول الفيزياء الرياضية وبصفة خاصة حول انتشار الحرارة. من جهة أخرى فإن الدساتير التي تسمح بحساب المعاملات a_n وَ b_n كانت معروفة من طرف أولر (Euler). ثم أخذت السلاسل المثلثية تتطور من خلال أعمال ريمان وديركليت، الخ. لقد استعملت العبارات «سلسلة فوريي» وَ «معاملات فوريي» في البداية بخصوص الجملة المثلثية. ولم

تستخدم بمفهومها العام الوارد في الفصل 3، § 4 (أي من أجل جملة متعامدة كيفية في فضاء اقليدي كيفي) إلاّ بعد عهد طويل.

2. بما أن الجملة المثلثية تامة وبمراعاة النظريات العامة الواردة في الفصل 3، § 4، ينتج من أجل كل تابع $f \in L_2$ أن سلسلة فوريي:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

متقاربة نحو تابع بالمتوسط. لكن، تتطلب بعض المسائل الملموسة في التحليل معرفة الشروط التي تضمن قيام أنواع أخرى من التقاربات لهذه السلسلة نحو f، مثلاً التقارب عند كل نقطة أو التقارب المنتظم. سندرس هذه المسائل في الفصل الموالي.

2. الجمل المثلثية على القطعة $[0, \pi]$. تشكل التوابع

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots \tag{2}$$

وَ:

$$\sin x, \sin 2x, \ldots \tag{3}$$

جملة متعامدة تامة على القطعة $[-\pi, \pi]$. لنثبت أن كلا من الجملتين (2) وَ (3) متعامدة وتامة على القطعة $[0, \pi]$. يمكن أن نتأكد من التعامد بالحساب المباشر. لنثبت أن الجملة (2) تامة. ليكن f تابعاً مربعه قابل للمكاملة على $[0, \pi]$. لنعرف أولاً هذا التابع عند كل نقطة من $[-\pi\, \pi]$ بوضع:

$$f(x) = f(-x)$$

من أجل كل نقطة $x \in [-\pi, 0)$ ولنشر التابع المحصل عليه وفق سلسلة فوريي بالنسبة للجملة:

$$1, \cos nx, \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

لما كان التابع f المعرف الآن على $[-\pi, \pi]$ زوجياً فإن كل معاملات الجيب (sinus) منعدمة. وهذا واضح لأن الدستور الذي يعطي هذه المعاملات يبين أن لدينا من أجل تابع زوجي f ومن أجل $n \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

بعبارة أخرى فإن هذا التابع يمكن تقريبه بالمتوسط التربيعي على القطعة $[-\pi, \pi]$ (وبالتالي على القطعة $[0, \pi]$) بالدقة التي نرغب فيها، بواسطة عبارات خطية من عناصر الجملة (2). ومنه ينتج أن الجملة (2) تامة. يمكن أن نبرهن على أن الجملة (3) تامة على $[0, \pi]$ بطريقة مماثلة للسابقة وذلك بفضل تمديد فردي للتابع f المعرف على $[0, \pi]$ إلى المجال نصف المفتوح $[-\pi, 0)$ بواسطة الصيغة :

$$f(-x) = -f(x)$$

إن التابع المحصل عليه بعد هذا التمديد تابع فردي على $[-\pi, \pi]$ ويقبل على هذه القطعة نشراً لايحوي سوى التابع الجيبي (sinus).

3. سلسلة فوريي في شكلها العقدي. نستطيع كتابة السلسلة المثلثية في شكل مكثف ويتم ذلك باستعمال دساتير أولر :

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad , \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

بنقل هذه العبارات إلى سلسلة فوريي نحصل على :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - i\, b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

حيث $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ومن أجل $1 \leq n$ لدينا :

$$\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \tag{4}$$

تسمى العبارة :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

سلسلة فوريي في الشكل العقدي. تكتب المعاملات c_n لهذه السلسلة بدلالة a_n وَ b_n بواسطة العلاقتين (4)؛ ثم إنه من السهل أيضاً أن نثبت مباشرة الدساتير التي تعطي هذه المعاملات. فبالحساب المباشر يتبين أن :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ 2\pi & , \quad n = m \end{cases}$$

وبالتالي إذا ضربنا المساواة :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{5}$$

في e^{-imx} (حيث $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) وكاملنا فإننا نحصل على :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx = 2\pi\, c_m$$

أي :

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{6}$$

إن النشر (5) صالح أيضاً من أجل التوابع العقدية ذات المربعات القابلة للمكاملة على القطعة $[-\pi, \pi]$. بعبارة أخرى، فإن التوابع e^{inx} تشكل أساساً للفضاء $L_2[-\pi, \pi]$ المؤلف من التوابع العقدية التي لها مربعات الطويلات

قابلة للمكاملة على القطعة $[-\pi, \pi]$. في هذا الفضاء العقدي تمثل العبارات (6) الجداءات السلمية لِـ f في e^{imx}.

بتعويض التوابع e^{imx} بِـ $e^{i\frac{n\pi}{l}}$ يمكن أن نعمم كل ماقلناه آنفاً ليشمل الفضاء $L_2[-l, l]$ المؤلف من التوابع العقدية على قطعة طولها $2l$ كيفي.

4. كثيرات حدود لوجاندر (Legendre). تعطي العبارات الخطية للتوابع:

$$1, x, x^2, \dots \tag{7}$$

مجموعة كل كثيرات الحدود. وبالتالي فإن الجملة (7) تامة في الفضاء L_2 المؤلف من التوابع على قطعة[1] مستقيمة كيفية. بمعامدة الجملة (7) على القطعة $[-1, 1]$ بالنسبة للجداء السلمي:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) \mathrm{d}x$$

نحصل على جملة متعامدة تامة:

$$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots$$

حيث Q_n كثير حدود درجته n. لنثبت أن كلاً من كثيرات الحدود $Q_n(x)$ يطابق، بتقدير ضرب في ثابت، كثير الحدود:

$$R_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n$$

ذلك لأن الجملة $\{R_n\}$ متعامدة: ليكن $m \leq n$؛ بما أن:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2 - 1)^n \bigg|_{x=-1} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2 - 1)^x \bigg|_{n=-1}^{=0}$$

من أجل كل $k = 0$، 1، ...، $n - 1$، فإن المكاملة بالتجزئة تعطي:

---

[1] إن تمام جملة كثيرات الحدود في الفضاء $L_2[a, b]$ المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على قطعة كيفية $[a, b]$ يأتي مباشرة من نظرية فيرشتراس حول التقريب المنتظم لتابع مستمر على قطعة بواسطة كثيرات حدود. راجع الفصل 8، §2، 2.

$$(8) \quad \int_{-1}^{1} R_m(x)\, R_n(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\right](x^2-1)^n\, dx$$

إذا كان $n > m$ فإن العبارة الواردة تحت رمز التكامل في الطرف الأخير مطابقة للصفر، وهذا يثبت أن الجملة $\{R_n\}$ متعامدة.

من جهة أخرى من الواضح أن كثير الحدود R_n من الدرجة n أي أن كل R_n ينتمي إلى الفضاء الجزئي المولد عن العناصر الأولى البالغ عددها $n + 1$ من الجملة (7). وهكذا فإن الجملتين $\{R_n\}$ وَ $\{Q_n\}$ تتمتعان بالخاصيتين:

1) هما متعامدان.

2) العنصر ذو الرتبة n في الجملة ينتمي إلى الفضاء الجزئي المولد عن العناصر $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

نلاحظ أن هذين الخاصيتين تعرفان كل عنصر، بتقدير عامل عددي، من الجملة (راجع النظرية 1، 4§، الفصل 3). لنبحث الآن عن العوامل المجانسة لكثيرات الحدود $R_n(x)$. من أجل $n = m$ تعطي المساواة (8):

$$\int_{-1}^{1} R_n^2(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n\, dx =$$

$$= (2n\,!) \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = \frac{(n\,!)\cdot 2^{2n+1}}{2n+1} \quad (1)$$

أي أن نظيم R_n يساوي $n!\,2^n \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$. نستنتج من ذلك ان جملة كثيرات الحدود:

$$\frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, R_n(x)$$

متعامدة ومتجانسة.

---

(1) يمكن أن نحسب التكامل الأخير بسهولة بواسطة دساتير تدريج أو برده إلى التابع بيتًا.

بدل هذه الـكثيرات الحدود المتجانسة نعتبر عادة كثيرات الحدود المعرفة بالدستور :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

تسمى كثيرات الحدود $\{P_n\}$ كثيرات حدود لوجاندر، أما الدستور السابق فيسمى دستور رودريغاس(Rodrigves). ينتج من الحسابات التي أجريناها أن :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & , \quad n = m \end{cases}$$

نورد فيما يلي العبارات الصريحة لـكثيرات الحدود الخمسة الأولى :

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$
$$P_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}$$

إن نشر تابع f على القطعة $[-1, 1]$ وفق كثيرات حدود لوجاندر يكتب على الشكل :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, P_n(x)$$

حيث :

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

5. الجمل المتعامدة في جداء فضاءات. سلاسل فوريي (Fourier) المضاعفة.

لتكن X' وَ X'' مجموعتين نعرف عليهما القياسان μ' وَ μ''. نرمز لفضاءات

التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على هاتين المجموعتين بِـL_2' وَ L_2'' على التوالي. ونعتبر على الجداء:

$$X = X' \times X''$$

القياس:

$$\mu = \mu' \times \mu''$$

ثم نرمز بِـL_2 لفضاء التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على X المزود بالقياس μ. نعتبر توابع L_2 توابع ذات متغيرين.

نظرية 1. إذا كانت $\{\psi_m\}$ وَ $\{\psi_n\}$ جملتين متعامدتين ومتجانستين وتامتين في L_2' وَ L_2'' على التوالي فإن مجموعة كل الجداءات:

$$f_{mn}(x, y) = \varphi_m(x)\, \psi_n(y)$$

جملة متعامدة ومتجانسة وتامة في L_2.

البرهان. بفضل الملاحظة المتعلقة بنظرية فوبيني (الفصل 5، §6، 4) لدينا:

$$\int_X f_{mn}^2(x, y)\, d\mu = \int_{X'} \varphi_m^2(x) \left(\int_{X''} \psi_n^2(y)\, d\mu'' \right) d\mu' = 1$$

بالاعتماد على نفس النظرية (وإذا كان $m \neq m_1$) فإن:

$$\int_X f_{mn}(x, y)\, f_{m_1 n_1}(x, y)\, d\mu =$$

$$= \int_{X''} \psi_n(y)\, \psi_{n_1}(y) \left(\int_{X'} \varphi_m(x)\, \varphi_{m_1}(x)\, d\mu'' \right) d\mu'' = 0$$

لأن التابع $f_{mn}(x, y)\, f_{m_1 n_1}(x, y)$ المتعلق بمتغيرين يقبل الجمع على $X = X' \times X''$.

وإذا كان $m = m_1$ وَ $n \neq n_1$ فإن:

$$\int_X f_{mn}(x, y) f_{m_1 n_1}(x, y)\, d\mu = \int_{X'} \varphi_m^2(x) \left(\int_{X''} \psi_n(y) \psi_{n_1}(y)\, d\mu'' \right) d\mu' = 0$$

لنثبت أن الجملة $\{f_{mn}\}$ تامة . نفرض أنه يوجد في L_2 تابع f عمودي على كل التوابع f_{mn} . نضع :

$$F_m(y) = \int_{X'} f(x, y) \varphi_m(x)\, d\mu'$$

من الواضح أن التابع $F_m(y)$ ذو مربع قابل للمكاملة . وبالتالي فالتابع $F_m(y) \psi_n(y)$ يقبل المكاملة من أجل كل n . بتطبيق نظرية فوبيني من جديد نحصل على :

$$\int_{X''} F_m(y) \psi_n(y)\, d\mu'' = \int_X f(x, y) f_{mn}(x, y)\, d\mu = 0$$

لما كانت الجملة $\{\psi_n\}$ تامة نستنتج أن $F_m(y) = 0$ من أجل كل y تقريباً . حينئذ :

$$\int_{X'} f(x, y) \varphi_m(x)\, d\mu' = 0$$

وذلك من أجل كل y تقريباً ومن أجل كل m . بفضل تمام الجملة $\{\varphi_m\}$ يأتي أن مجموعة العناصر x بحيث : $f(x, y) \neq 0$ من أجل كل y تقريباً مجموعة ذات قياس منعدم . حسب نظرية فوبيني فهذا يعني أن التابع $f(x, y)$ منعدم أينما كان تقريباً على X . انتهى برهان النظرية .

لنطبق هذه النظرية على بعض الجمل المتعامدة الملموسة . إذا اعتبرنا فضاء التوابع ذات متغيرين :

$$f(x, y) \quad , \quad -\pi \leq x, y \leq \pi$$

ذات المربعات القابلة للمكاملة ، نجد أنه توجد جملة متعامدة وتامة تتألف من جداءات كل عنصر من الجملة :

$$1, \cos mx \quad , \quad \sin mx \qquad (m = 1, 2, ...)$$

في كل عنصر من الجملة :

$$1, \cos ny \quad , \quad \sin ny \qquad (n = 1, 2, ...)$$

أي أنها تتألف من التوابع :

$$1, \cos mx, \sin mx, \cos ny, \sin ny, \cos mx, \sin ny,$$

$$\cos mx \cdot \cos ny, \sin mx \cdot \sin ny, \sin mx \cdot \cos ny$$

أما سلسلة فوريي الموافقة لهذه الجملة فتظهر معقدة شيئاً ما ، ولهذا من اللائق استخدام التوابع الأسية في هذه الحالة :

$$e^{imx} \cdot e^{iny} = e^{i(mx+ny)} \quad , \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

تكتب سلسلة فوريي وفق هذا الأساس على الشكل :

$$f(x, y) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn}\, e^{i(mx+ny)}$$

حيث :

$$c_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\, e^{-i(mx+ny)}\, dx\, dy$$

أما في الفضاء المؤلف من التوابع المعرفة على المربع :

$$-1 \leq x, y \leq 1$$

فإن كثيرات حدود لوجاندر تعطي الجملة المتعامدة المتجانسة المشكلة من كثيرات الحدود :

$$Q_m(x, y) = \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{m!\, n!\, 2^{m+n+1}} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \frac{d^n}{dy^n} \; (y^2 - 1)^n$$

تمتد صلاحية كل ماقلناه آنفاً إلى حالة عدة متغيرات . بصفة خاصة فإن سلسلة فوريي لتابع ذي k متغيراً تكتب على الشكل :

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = -\infty}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k} \; e^{i(n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k)}$$

حيث :

$$c_{n_1 \ldots n_k} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \ldots, x_k)\, e^{-i(n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k)}\, dx_1 \ldots dx_k$$

6. كثيرات الحدود بالنسبة لوزن معطى.

كنا حصلنا على كثيرات حدود لوجاندر بمعامدة التوابع :

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{9}$$

بالنسبة للجداء السلمي :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

الموافق للقياس المعتاد للوبيغ على القطعة $[-1, 1]$. ليكن μ قياساً ثانياً على هذه القطعة بحيث تكون التوابع (9) في الفضاء L_2 الموافق لِـμ، المزود بالجداء السلمي :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, d\mu$$

توابع مستقلة خطياً. عندئذ بتطبيق طريقة المعامدة على الجملة (9) نحصل على جملة جديدة من كثيرات الحدود $\{Q_n\}$ لاتتعلق عموماً باختيار القياس μ. نفرض أن القياس μ معرف من أجل المجموعات الجزئية للقطعة $[-1, 1]$ القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ، بالدستور :

$$\mu(E) = \int_E g(x)\, dx \tag{10}$$

حيث g تابع مثبت غير سالب وقابل للمكاملة. إن شرط التعامد والتجانس:

$$(Q_m, Q_n) = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}$$

يكتب في هذه الحالة على الشكل:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, g(x)\, dx = \begin{cases} 1 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases} \tag{11}$$

يسمى التابع g الذي نعرف بواسطته القياس (10)، الوزن أو تابع الوزن. فيما يخص كثيرات الحدود التي تحقق الشرط (11) نقول أنها متعامدة بالنسبة للوزن g. يؤدي اختيار الوزن في كل مرة إلى جمل كثيرات حدود جديدة. بصفة خاصة، من أجل:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

نحصل على كثيرات حدود مطابقة، بتقدير عامل ثابت، لكثيرات حدود تشيبيتشاف:

$$T_n(x) = \cos n \cdot \arccos x \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

التي تلعب دوراً هاماً في مختلف مسائل الاستقطاب.

نتيقن بسهولة من أن كثيرات الحدود هذه متعامدة بالنسبة للوزن $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. ويكفي من أجل ذلك أن نضع:

$$x = \cos\theta \quad , \quad dx = -\sin\theta \; d\theta \quad , \quad \sqrt{1 - x^2} = \sin\theta$$

فنحصل على:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cdot \cos n\theta \,d\theta = \begin{cases} \pi/2 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}$$

7. الأساس المتعامد في الفضاء $L_2(-\infty, \infty)$. توابع هيرميت (Hermite).

اعتبرنا آنفاً جملاً متعامدة على قطعة مستقيمة، أي على مجموعة قياسها منته . نعتبر الآن حالة مجموعة قياسها غير منته، وعلى وجه التحديد نعتبر الفضاء $L_2(-\infty, \infty)$ المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على المستقيم العددي بأكمله . لايمكن أن ننشىء جملة متعامدة من التوابع في هذا الفضاء انطلاقاً من كثيرات الحدود أو من التوابع المثلثية لأن كل تلك التوابع لاتنتمي إلى $L_2(-\infty, \infty)$. من الطبيعي إذن البحث عن «مادة» إنشاء أساس في $L_2(-\infty, \infty)$ من بين التوابع التي تتناقص بسرعة كافية عند اللانهاية . بصفة خاصة يمكننا الحصول على مثل هذا الأساس بمعامدة المتتالية :

$$x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \;, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ذلك أن كل تابع من الشكل $P(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ ، حيث P كثير حدود، ينتمي بطبيعة الحال إلى $L_2(-\infty, \infty)$ ؛ سنبين بأن الجملة (12) الموالية جملة تامة ضمن الفصل 8، §4، 3 .

بتطبيق طريقة المعامدة على التوابع $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ فإننا نحصل على توابع من الشكل :

$$\varphi_n(x) = H_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

حيث H_n كثير حدود من الدرجة n . تسمى هذه الكثيرات الحدود كثيرات حدود هيرميت (Hermite) وتسمى التوابع φ_n توابع هيرميت . من السهل التأكد من أن كثيرات حدود هيرميت تطابق، بتقدير عامل ثابت، كثيرات الحدود :

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

لرؤية ذلك نلاحظ أن كثير الحدود H_n^* من الدرجة n وأن شرط التعامد :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m^*(x)\, H_n^*(x)\, e^{-x^2}\, dx = 0 \quad , \quad (m \neq n)$$

محقق (يتم التأكد منه بالمكاملة بالتجزئة. بفضل نظرية المعامدة، توجد بتقدير عوامل ثابتة، جملة واحدة متعامدة مؤلفة من توابع ذات الشكل : $P_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ حيث P_n كثير حدود من الدرجة n .

بامكاننا تقديم التفسير التالي للنتيجة المحصل عليها : نعتبر على المستقيم العددي قياسا μ كثافته e^{-x^2} أي بحيث :

$$d\mu = e^{-x^2}\, dx$$

إن هذا القياس منته . أما الجداء السلمي في فضاء التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة من أجل هذا القياس ، فهو معرف بالدستور :

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x^2}\, dx$$

تؤلف كثيرات حدود هيرميت في هذا الفضاء جملة متعامدة. نعتبر أخيراً الفضاء $L_2(0, \infty)$ المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على نصف المستقيم . نأخذ في هذا الفضاء جملة التوابع :

$$x^n e^{-x} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

بتطبيق طريقة المعامدة على هذه الجملة نحصل على جملة التوابع :

$$L_n(x)\, e^{-x}$$

المسماة توابع لاغير (Laguerre). وتسمى كثيرات الحدود L_n كثيرات حدود لاغير . يمكن اعتبار كثيرات حدود لاغير كأساس متعامد للفضاء

المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على نصف المستقيم $(0, \infty)$ بالنسبة للقياس :

$$d\mu = e^{-x}\, dx$$

سنبرهن ضمن الفصل 8، §4، 3 بأن جملة توابع لاغير تامة في $L_2(0, \infty)$.

8. كثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة لوزن غير متصل.

نعتبر على المستقيم العددي $n + 1$ نقطة مختلفة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نلحق بها على التوالي الأوزان $p_0, p_1 \ldots, p_n$ حيث p_i أعداد موجبة، نعرف القياس μ بالدستور :

$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k$$

بعبارة أخرى فإن القياس $\mu(E)$ يساوي مجموع الأوزان لكل النقاط x_k المنتمية لِـ E . من أجل هذا القياس «المنحل» فإن كل مجموعات نقاط المستقيم الحقيقي وكل التوابع المعرفة على هذا المستقيم تقبل القياس، كما أن كل مجموعة E لا تحوي أية نقطة x_k $(k = 0, 1, \ldots n)$ مجموعة ذات قياس منعدم. نلاحظ في هذه الحالة أن تكامل تابع f على المستقيم الحقيقي بأكمله يساوي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} p_k\, f(x_k)$$

ثم إن الجداء السلمي لتابعين معرف بالدستور :

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} p_k\, f(x_k)\, g(x_k)$$

من الواضح أن تابعين f وَ g يكونان متكافئين بالنسبة للقياس μ إذا وفقط إذا كان :

$$f(x_k) = g(x_k)$$

عند كل النقاط $x_0, x_1, ..., x_n$.

تعود مسألة أحسن تقريب بمفهوم المسافة على L_2 في هذه الحالة التافهة إلى تعيين مجاميع :

$$c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + ... + c_m \varphi_m$$

تجعل العبارة التالية أصغرية :

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \{f(x_k) - \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x_k)\}^2$$

أي إلى مسألة «الاستقطاب بطريقة المربعات المصغرة» .

إنطلاقاً من مسألة الاستقطاب بطريقة المربعات المصغرة بواسطة كثيرات الحدود ذات درجة معطاة، استطاع ب.ل. تشيبيتشاف تطوير نظرية كثيرات الحدود المتعامدة. لعرض نتائج تشيبيتشاف حول هذا الموضوع نلاحظ أن الجملة :

$$1, x, x^2, ..., x^n \qquad (13)$$

مستقلة خطياً من أجل القياس المختار μ لأن الجداء السلمي (x^r, x^s) يكتب بالصيغة :

$$(x^r, x^s) = \sum_{k=0}^{n} p_k \, x_k^{r+1}$$

أما معين غرام (Gram) للجملة (13) فهو[1] :

---

(1) نأخذ المجاميع على k من 0 إلى n .

$$\begin{vmatrix} \sum p_k, & \sum p_k x_k, & \sum p_k x_k^2, & \ldots, & \sum p_k x_k^n \\ \sum p_k x_k, & \sum p_k x_k^2, & \sum p_k x_k^3 \ldots, & & \sum p_k x_k^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum p_k x_k^n, & \sum p_k x_k^{n+1}, & \sum p_k x_k^{n+2}, & \ldots, & \sum p_k x_k^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{p_0} \sqrt{p_1} \ldots \sqrt{p_n} \\ \sqrt{p_0 x_0}, \sqrt{p_1 x_1}, \ldots, \sqrt{p_n x_n} \\ \cdots \\ \sqrt{p_0 x_0^n}, \sqrt{p_1 x_1^n}, \ldots, \sqrt{p_n x_n^n} \end{vmatrix} = p_0 p_1 \ldots p_n \begin{vmatrix} 1\ 1 \ldots 1 \\ x_0\ x_1 \ldots x_n \\ \cdots \\ x_0^n \ldots x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

من جهة أخرى إذا كان $r > n$ فإن x^r يتعلق خطياً بتوابع الجملة (13) لأن الفضاء L_2 ، في الحالة هذه، ذو بعد يساوي $n + 1$. ولذا فإن طريقة المعامدة تؤدي إلى جملة منتهية من كثيرات الحدود

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$

المتعامدة والمتجانسة أي أن:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \ P_r(x_k) \ P_s(x_k) = \delta_{rs}$$

وبحيث يقبل كل تابع f نشراً وفق سلسلة منتهية:

$$f \sim \sum_{r=0}^{n} c_r \ P_r$$

مع العلم أن:

$$c_r = \sum_{k=0}^{n} p_k \ P_r(x_k) f(x_k)$$

لدينا عند النقاط x_k العلاقات:

$$f(x_k) = \sum_{r=0}^{n} c_r \, P_r(x_k) \qquad (k = 0, 1, ..., n)$$

أي أن مجموع السلسلة هو كثير حدود استقطاب لاغرانج. أما المجاميع الجزئية:

$$Q_m = \sum_{r=0}^{m} c_r \, P_r \quad , \quad (m < n)$$

فهي كثيرات حدود من الدرجة m، تعطي أحسن تقريب للتابع f عند النقاط x_k وهذا يعني أن العبارة:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \{f(x_k) - Q_m(x_k)\}^2$$

أصغر، من أجل Q_m، من كل كثير حدود آخر له نفس الدرجة m.

9. جمل هار (Haar)، رادماشر (Rademacher)، والش (Walsh).

نعتبر مثالاً لجملة تامة من التوابع على القطعة [0, 1] أنشأها هار. تتكوّن هذه الجملة من التابع:

$$\varphi_0 = 1$$

والمتتاليات:

$$\varphi_{01} \, ,$$

$$\varphi_{11}, \varphi_{12}$$

$$\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}, \varphi_{24} \, ,$$

. . . .

$$\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, ..., \varphi_{n2^n}$$

. . . .

(تضم المتتالية التي رقمها n عدداً من العناصر يساوي 2^n)، حيث

$$\varphi_{01} = \begin{cases} +1 \ , & 0 < x < 1/2 \\ -1 \ , & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{11} = \begin{cases} \sqrt{2} \ , 0 < x < 1/4 \\ -\sqrt{2} \ , 1/4 < x < 1/2 \\ 0 \ , 1/2 < x < 1 \end{cases} \quad ، \quad \varphi_{12} = \begin{cases} 0, \ 0 < x < 1/2 \\ \sqrt{2} \ , 1/2 < x < 3/4 \\ -\sqrt{2} \ , 3/4 < x < 1 \end{cases}$$

وبصفة عامة

$$\varphi_{ni} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \frac{i-1}{2^n} < x < \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ -2^{n/2} \ , & \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < x < i/2^n \\ 0 \ , & x \notin \left[\frac{i-1}{2^n} , \frac{i}{2^n}\right] \end{cases}$$

(حيث $n = 0, 1, 2, \ldots ; i = 1, 2, \ldots, 2^n$).

من السهل أن نرى بأن الجملة المنشأة بهذه الطريقة جملة متعامدة ومتجانسة. لنثبت أنها تامة.

نقسم القطعة $[0, 1]$ إلى 2^{n+1} مجالاً متساوياً Δ_i ونعتبر المجموعة M_{n+1} المؤلفة من كل التوابع التي لها قيمة ثابتة على كل مجال من المجالات Δ_i. من البديهي أن M_{n+1} فضاء شعاعي بعده 2^{n+1}. زيادة على ذلك فإن كل توابع الجملة المعتبرة حتى المتتالية ذات الرتبة n (ربما فيها هذه المتتالية) تنتمي إلى M_{n+1}. بفضل تعامد وتجانس الجملة المعتبرة نلاحظ أن توابع هذه الجملة مستقلة خطياً. ثم إن عدد هذه التوابع يساوي:

$$1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}$$

ولذا فهي تشكل في M_{n+1} جملة تامة مؤلفة من أشعة مستقلة خطياً. بمراعاة كوْن كل تابع مستمر يمكن تقريبه بالدقة التي نريدها بواسطة تابع من

M_{n+1} (من أجل n كبير بكفاية) فإننا نستنتج بأن الجملة المعتبرة تامة.

نعتبر مثالاً ثانياً لجملة متعامدة ومتجانسة مؤلفة من توابع على القطعة $[0, 1]$، أتى به رادماشر. نضع:

$$\varphi_m = (-1)^{[2^m x]}$$

بعبارة أخرى، فإننا نحصل على التابع φ_m بالطريقة التالية: نقسم القطعة $[0, 1]$ إلى 2^m جزءاً يساوي كل واحد منها Δ_i ثم نعطي للتابع φ_m على المجالات Δ_i $(i = 1, ..., 2^m)$ مرة القيمة $1+$ ومرة أخرى القيمة $1-$.

إن تعامد الجملة:

$$\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...$$

أمر بديهي لكنه غير تام؛ وهذا ناتج مثلاً من كون التابع:

$$\varphi_{12} = \varphi_1 \varphi_2 = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1/4 \text{ أو } 3/4 < x < 1 \\ -1 & , \quad 1/4 < x < 3/4 \end{cases}$$

عمودياً على كل توابع الجملة (14). الاّ أننا نستطيع توسيع هذه الجملة إلى أن تصبح جملة متعامدة ومتجانسة وتامة وذلك بأنْ نضيف إليها التوابع من الشكل:

$$\varphi_{m_1 m_2 ... m_k} = \varphi_{m_1} \cdot \varphi_{m_2} \cdots \varphi_{m_k} \qquad (15)$$

$$(0 < m_1 < m_2 < ... < m_k)$$

من الواضح أن الجملة التي نحصل عليها بهذه الطريقة، وهي المسماة جملة والش، تبقى متعامدة ومتجانسة. ثم إنها جملة تامة.

إن البرهان على هذه النتيجة يماثل البرهان على أن جملة هار تامة.

الفصل الثامن

السلاسل المثلثية. تحويل فوريي

§ 1. شروط تقارب سلسلة فوريي

1. شروط كافية لتقارب سلسلة فوريي عند نقطة. نعتبر من جديد الفضاء $L_2[-\pi, \pi]$ المؤلف من التوابع ذات المربعات القابلة للمكاملة على القطعة $[-\pi, \pi]$. كما أثبتنا ضمن الفصل السابع أن هذا الفضاء إقليدي وتام بعده غير منته، أي أنه فضاء هيلبرتي. تشكل التوابع:

$$1, \cos nx, \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

في هذا الفضاء جملة متعامدة تامة. ومنه يأتي من أجل كل تابع f من $L_2[-\pi, \pi]$ أن سلسلة فوريي:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

حيث:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

متقاربة نحو f بالمتوسط التربيعي أي بمفهوم مسافة الفضاء $L_2[-\pi, \pi]$. ورغم ذلك، بالنظر إلى تطبيق سلاسل فوريي على مسائل الفيزياء الرياضية وعلى بعض المسائل الأخرى، فإنه من المهم معرفة الشروط التي تضمن تقارب سلسلة فوريي نحو f ليس بالمتوسط فحسب بل عند كل نقطة معطاة، وبإنتظام وأينما كان. نقدم هنا شروطاً كافية تجعل سلسلة مثلثية متقاربة عند نقطة معطاة. نبدأ ببعض الملاحظات التمهيدية.

بدل التوابع المعطاة على القطعة $[-\pi, \pi]$ يمكن الحديث عن التوابع الدورية التي دورتها 2π على المستقيم العددي بأكمله لأن كل تابع معطى على قطعة يمكن أن نمدده دورياً. من جهة أخرى فإن التوابع التي تؤلف جملة مثلثية توابع محدودة وهو ما يجعل الدساتير (3) التي تعرّف معاملات فوريي بالنسبة لهذه الجملة ذات معنى من أجل كل تابع قابل للجمع[1]. إذن يمكن أن نلحق بكل تابع f في $L_1[-\pi, \pi]$ معاملاته وسلسلته الفورييية:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ننتقل الآن إلى مسألة تقارب هذه السلسلة عند نقطة معطاة x نحو قيمة التابع f عند هذه النقطة. نضع:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4}$$

نغيّر في البداية $S_n(x)$ باستبدال المعاملات a_k وَ b_k في (4) بعباراتها التكاملية (3). بالرمز لمتغير المكاملة بِـ t نحصل على:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cdot \cos kt + \sin kx \cdot \sin kt\right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right\} \mathrm{d}t$$

باستعمال الدستور المعروف[2]:

---

(1) إننا لا نفرض أي شرط خاص بتقارب السلسلة (2) إذا تعلق الأمر بتابع كيفي قابل للجمع.

(2) للحصول على هذا الدستور يكفي الجمع طرفاً طرفاً العلاقات:

$$\sin\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{u}{2}$$

$$\sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2} = \cos u \cdot 2\sin\frac{u}{2}$$

....

$$\sin\frac{2n+1}{2}u - \sin\frac{2n-1}{2}u = \cos nu \cdot 2 \cdot \sin\frac{u}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} \tag{5}$$

نحصل على :

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \tag{6}$$

إن هذه العبارة لِـ $S_n(x)$ وكذا مختلف كتاباتها تسمى تكامل ديركليت .

نجري تبديلاً للمتغير بوضع $t - x = z$. لما كان التابع الوارد في (6) تحت رمز المكاملة تابعاً دورياً دورته 2π فإن تكامل هذا التابع على كل قطعة طولها 2π له نفس القيمة . لهذا يمكن بالمكاملة بالنسبة للمتغير الجديد z الاحتفاظ بنفس النهايتين $-\pi$ وَ π . عندئذ يأتي :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz$$

يسمى التابع :

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}}$$

نواة ديركليت . من المساواة (5) نستنتج مباشرة من أجل كل n أن :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 1$$

نكتب بالإعتماد على هذه المساواة الفرق $S_n(x) - f(x)$ على الشكل :

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \mathrm{d}z \tag{7}$$

وهكذا رُدَّت مسألة تقارب $S_n(x)$ نحو $f(x)$ إلى تقارب التكامل (7) نحو الصفر. تعتمد دراسة هذا التكامل على التوطئة التالية:

توطئة 1. إذا كان التابع φ قابلاً للمكاملة على $[a, b]$ فإن:

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px \,\mathrm{d}x = 0$$

البرهان. إذا كان التابع φ قابلاً للإشتقاق بإستمرار بواسطة المكاملة بالتجزئة فإننا نحصل من أجل $p \to \infty$ على:

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px \,\mathrm{d}x = -\varphi(x)\frac{\cos px}{p}\Big]_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\frac{\cos px}{p}\,\mathrm{d}x \to 0 \tag{8}$$

ليكن الآن φ تابعاً كيفياً قابلاً للمكاملة على $[a, b]$. بما أن التوابع القابلة للاشتقاق باستمرار تشكل مجموعة كثيفة أينما كان في $L_1[a, b]$ فإن من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد تابع قابل للاشتقاق باستمرار φ_ε بحيث:

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

من جهة أخرى:

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \sin px \,\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)] \sin px \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px \,\mathrm{d}x\right|$$

إن الحد الأول من الطرف الأيمن أصغر من $\frac{\varepsilon}{2}$ بفضل (9)؛ أما الحد الثاني فهو يؤول إلى الصفر عندما يؤول p إلى ∞ وهو ما تبينه العلاقة (8). انتهى برهان التوطئة.

من السهل الآن البرهان على النظرية التالية التي تقدم شرطاً كافياً لتقارب سلسلة فوريي.

نظرية 1. إذا كان f تابعاً قابلاً للمكاملة، واستطعنا من أجل x مثبت إيجاد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث يكون التكامل:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt \tag{10}$$

موجوداً، فإن المجاميع الجزئية S_n لسلسلة فوريي لِـ f تتقارب عند هذه النقطة x نحو $f(x)$.

البرهان. لنكتب التكامل (7) على الشكل:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}} \cdot \sin \frac{2n+1}{2} z \, dz \tag{11}$$

إذا كان التابع:

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z}$$

قابلاً للمكاملة (بالنسبة لِـ z) من $-\delta$ إلى δ فإنه يقبل المكاملة على القطعة $[-\pi, \pi]$ بأكملها (لأن f ينتمي إلى $L_1[-\pi, \pi]$). لكن التابع:

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

يقبل أيضاً المكاملة في هذه الحالة، وبالتالي يمكن تطبيق التوطئة 1 على التكامل (11) وهو ما يثبت أن هذا التكامل يؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى ∞. انتهى برهان النظرية.

ملاحظات. 1. يسمى تقارب التكامل (10) شرط ديني. ويكون هذا الشرط

محققاً، بصفة خاصة، إذا كان التابع f من أجل x معطى مستمراً ويقبل مشتقاً منتهياً أو على الأقل مشتقاً من اليمين ومشتقاً من اليسـار.

يبقى الاستدلال المتبع لدى البرهان على النظرية 1 صـالحاً إذا استبدلنا شرط ديني بتقارب التكاملين:

$$(12) \qquad \int_{-\delta}^{0} \frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}\,\mathrm{d}z \ , \int_{0}^{\delta} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\,\mathrm{d}z$$

حيث $f(x-0)$ وَ $f(x+0)$ هما النهايتان من اليسـار ومن اليمين للتابع f عند النقطة x (نفرض أن x نقطة تقطع من النوع الأول للتابع f). بالفعل، يمكن كتابة الفرق.

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$$

على الشكل:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [f(x+z)-f(x-0)] \qquad \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,\mathrm{d}z +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+z)-f(x+0)] \frac{\sin\frac{2n+1}{1}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,\mathrm{d}z$$

إذا كان التكاملان (12) موجودين فإن هذين العبارتين تؤولان إلى الصفر عندما يؤول n إلى ∞.

وهكذا نستنتج الشروط الـكافية للتقارب «الشـامل» لسلسلة فورييِ، وهي الشروط التي نجدها عادة في دروس التحليل.

ليكن f تابعاً دورياً محدوداً دورته 2π له تقطعات من النوع الأول فقط. عندئذٍ إذا كان للتابع f مشتق من اليسـار ومشتق من اليمين[1] عند كل نقطة

(1) نذكر أن المشتق من اليمين والمشتق من اليسـار عند نقطة تقطع من النوع الأول هما على التوالي:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} \quad \text{وَ} \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}$$

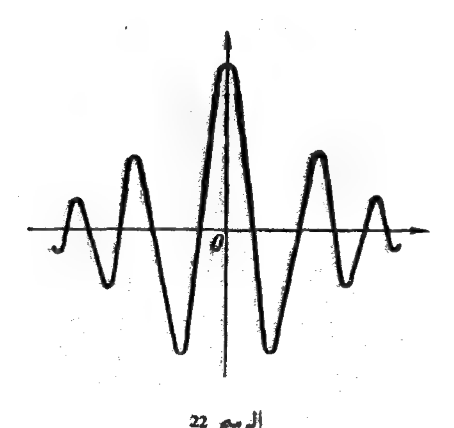
فإن سلسلة فوريي لِـ f متقاربة أنىا كان ومجموعها هو $f(x)$ عند كل نقطة استمرار، و: $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ عند كل نقطة تقطع لِـ f.

2. إن نواة ديركليت $D_n(z)$ التي لعبت دوراً أساسياً في إستدلالاتنا تابع يساوي $\frac{2n+1}{2\pi}$ من أجل $z = 0$ وله تذبذبات سريعة من أجل n كبير (الرسم 22). ولهذا فإن القسط الرئيسي لقيمة التكامل:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\, dz$$

من أجل n كبير يأتي من جوار صغير بالقدر الذي نريد للنقطة x. نلاحظ أن هذا القسط يؤول إلى $f(x)$ (إذا حقق هذا التابع شرط ديني) عندما يؤول n إلى ∞. وهكذا يمكن القول أن نوى ديركليت D_n تشكل متتالية تابعيات متقاربة، بمفهوم معين، نحو التابع δ على مجموعة التوابع f القابلة للنشر وفق سلسلة فوريي.

من الواضح أن المتتالية $\{D_n\}$ لاتتقارب نحو أية نهاية بمفهوم التقارب المعتاد، ولذلك فإننا نستطيع استخدام النظريات المعتادة حول الانتقال إلى النهاية تحت رمز التكامل لدى دراسة التكامل (7).



الرسم 22

3. يمكن استبدال شرط ديني الذي يضمن تقارب سلسلة فوريي بشروط أخرى، لكننا لا نستطيع إهمالها في النظرية 1. ذلك أنه من الممكن أن نحصل على سلسلة فوريي متباعدة في بعض النقاط حتى ولو كان التابع المعتبر مستمراً. توجد توابع قابلة للجمع مع أن سلاسل فوريي لهذه التوابع متباعدة أينما كان (أ.ن. كولموغوروف).

طرح ن.ن. لوزين سنة 1915 المسألة التالية: هل توجد توابع من L_2 لها سلاسل فوريي متباعدة على مجموعة ذات قياس موجب؟ وقد أجاب ل. كارلسون (Carleson) سنة 1966 عن هذا السؤال بالنفي.

يأتي وجود توابع مستمرة سلاسلها لفوريي غير متقاربة عند كل نقطة من النظريات العامة حول التقارب الضعيف للتابعيات. نلاحظ في البداية أن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|\, dz \to \infty \quad , \quad n \to \infty \tag{13}$$

ذلك أن بسط الكسر:

$$|D_n(z)| = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2\pi\, |\sin \frac{\pi}{2}|}$$

يساوي 1 عند النقاط التي تحقق:

$$\frac{2n+1}{2} z = (k + \frac{1}{2})\pi \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{14}$$

نحيط كل نقطة معرّفة بالشرط (14) بمجال:

$$\left| \frac{2n+1}{2} z - \frac{2k+1}{2} \pi \right| < \frac{\pi}{3} \tag{15}$$

من الواضح أن طول كل مجال من هذه المجالات يساوي $\frac{4\pi}{3(2n+1)}$. لدينا في كل مجال من هذه المجالات المتراجحة:

$$\sin \frac{2n+1}{2} z \geq \frac{1}{2}$$

لنقدر قيمة $\sin\frac{z}{2}$ على المجال ذي الرتبة k $(k = 0, 1, ..., n)$. لدينا:

$$\sin\frac{z}{2} < \frac{z}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{-1} < \frac{k+1}{2n+1}\pi$$

نستنتج من ذلك أن تكامل $|D_n(z)|$ المـأخوذ على المجالات المعرّفة بالشرط (15) أكبر من المجموع:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{k+1}{2n+1}\cdot\pi}\cdot\frac{4\pi}{3(2n+1)} = \frac{1}{3\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$$

بما أن هذا المجموع يؤول إلى ∞ عندما يؤول n إلى ∞ فإن لدينا العلاقة (13). تترجم هذه العلاقة كوْن نظيمات التابعيات D_n على فضاء التوابع المستمرة ليست محدودة (كمجموعة). وفي هذه الحالة نستنتج بفضل النظرية الخاصة بتقارب التابعيات الضعيف، أن هذه المتتالية لايمكن أن تكون متقاربة بضعف على فضاء التوابع المستمرة أي أنه توجد توابع مستمرة f تجعل النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

غير موجودة.

2. شروط التقارب المنتظم لسلسلة فوريي. وجدنا شروطاً كافية تجعل سلسلة فوريي لتابع f متقاربة عند كل نقطة. إن صنف التوابع التي تحقق تلك الشروط واسع جداً حيث أن تمثيل تابع بسلسلة فوريي متقاربة أينما كان لا يتطلب حتى استمرار هذا التابع. أما فيما يخص شروط التقارب المنتظم لسلسلة فوريي فالأمر يختلف عما سبق. من الواضح أنه إذا كان للتابع f نقطة تقطع على الأقل فإن سلسلة فوريي لـ f لا يمكن أن تتقارب نحو $f(x)$ لأن مجموع سلسلة متقاربة بانتظام حدها العام تابع مستمر، مجموع مستمر. وهكذا نرى أن استمرار التابع المعتبر f شرط لازم (لكنه، بطبيعة الحال، غير كافٍ) للتقارب المنتظم لسلسلة فوريي لـ f.

تقدم النظرية التالية شرطاً بسيطاً وكافياً:

نظرية 2. إذا كان التابع الدوري f، دورته 2π مستمراً مطلقاً ومشتقه f' ينتمي إلى $L_2[-\pi, \pi]$ فإن سلسلة فوريي لِـf متقاربة بانتظام نحو $f(x)$ على كل المستقيم العددي.

البرهان. نرمز بِـ a'_n وَ b'_n لمعاملات سلسلة فوريي للتابع f'. لما كان التابع f مستمراً مطلقاً فإننا نستطيع تطبيق دستور المكاملة بالتجزئة على التكامل:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$$

نحصل عندئذٍ على:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{b'_n}{n}$$

كما أن:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{a'_n}{n}$$

وبالتالي:

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|b'_n|}{n} + \frac{|a'_n|}{n}\right) \tag{16}$$

إن هذه السلسلة متقاربة لأن:

$$\frac{|b'_n|}{n} \le \frac{1}{2}\left(b'^2_n + \frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{|a'_n|}{n} \le \frac{1}{2}\left(a'^2_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

وَ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b'^2_n + a'^2_n\right) < \infty$$

وذلك بفضل متراجحة بسل. من البديهي أن السلسلة العددية (16) تحد من الأعلى سلسلة فوريي للتابع f. فإذا طبقنا مقياس فايرشتراس نجد حينئذٍ أن سلسلة فوريي للتابع f متقاربة بانتظام (ومطلقاً). يبقى أن نبيّن بأن مجموع

هذه السلسلة يساوي f. ليكن φ مجموع سلسلة فوريي لِـ f. عندئذٍ يكون لِـ φ وَ f نفس معاملات فوريي. بما أن التابعين f وَ φ مستمران نستنتج $f = \varphi$.

بمقدورنا تقديم شرط آخر يضمن التقارب المنتظم لسلسلة فوريي وهذا الشرط مماثل لشرط ديني:

نظرية 3. إذا كان تابع f قابل للجمع محدوداً على مجموعة $E \subset [-\pi, \pi]$، وكان شرط ديني محققاً بانتظام على E أي من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} \mathrm{d}z < \varepsilon$$

من أجل كل $x \in E$، فإن سلسلة فوريي لِـ f متقاربة نحو f بانتظام على E.

يعتمد برهان هذه النظرية على التوطئة التالية التي تعزز التوطئة 1، (الفصل 8، § 1، 1).

توطئة 2. إذا كانت B مجموعة توابع قابلة للجمع، شبه متراصة من أجل المسافة $L_1[-\pi, \pi]$، فإن من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $N = N(\varepsilon)$ بحيث:

$$\left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon$$

من أجل كل $\lambda > N(\varepsilon)$ ومن أجل كل $f \in B$.

لإثبات هذه التوطئة نأخذ في B $\frac{\varepsilon}{2}$ - شبكة منتهية: $\varphi_1, ..., \varphi_k$ ونختار N بحيث:

$$\left| \int_a^b \varphi_i(t) \sin \lambda t \, \mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad i = 1, 2, ..., k$$

وهذا من أجل $N \leq \lambda$. إذا كان f تابعاً كيفياً من B فإن لدينا:

$$\|f - \varphi_i\| < \varepsilon/2$$

حيث i عدد معين.

وبالتالي:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right| \leq \left|\int_a^b \varphi_i(t)\sin\lambda t\,dt\right| + \left|\int_a^b (f-\varphi_i)\sin\lambda t\,dt\right| < \varepsilon$$

انتهى برهان التوطئة.

يعتمد تطبيق هذه التوطئة على برهان النظرية 3، على كون مجموعة التوابع:

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

شبه متراصة (من السهل التأكد من ذلك). نترك تفاصيل هذا البرهان للقارئ.

تكلمنا لحد الآن عن التوابع المعرّفة على القطعة $[-\pi, \pi]$. من الواضح أن كل ما قيل أعلاه تمتد صلاحيته إلى أية قطعة طولها $2l$ كيفي.

أما فيما يخص التوابع ذات المتغيرات المتعددة فإننا نستطيع أيضاً تقديم شروط كافية تجعل سلسلة فوريي متقاربة عند كل نقطة، وشروط أخرى تجعلها متقاربة بانتظام. سوف لن نتعرض لهذه المسألة هنا.

§2. نظرية فيجير (Fejer)

1. نظرية فيجير. ليكن f تابعاً مستمراً ودورياً دورته 2π على المستقيم العددي. إن f معرّف بطريقة وحيدة بواسطة سلسلة فوريي:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

ذلك أنه إذا كان f_1 وَ f_2 تابعين مستمرين ولهما نفس معاملات فوريي فإن

الفرق $f_1 - f_2$ تابع مستمر يساوي 0 أينما كان تقريباً وبالتالي فهو منعدم. ورغم ذلك بما أن سلسلة فوريي لتابع مستمر ليست بالضرورة متقاربة فإننا لا نستطيع الحصول على مثل التابع f بمجرد حساب مجموع سلسلة فوريي لِـf. هناك طريقة تسمح بإيجاد تابع مستمر انطلاقاً من سلسلة فوريي لهذا التابع، وقد برهن فيجير على هذه النتيجة المعروضة في النظرية الموالية، سنة 1905.

ليكن:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \tag{2}$$

مجموعاً جزئياً لسلسلة فوريي لِـf. نضع:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} \tag{3}$$

تسمى العبارات σ_n (وهي المتوسطات الحسابية للمجاميع S_k) مجاميع فيجير للتابع f.

نظرية 1 (فيجير). إذا كان f مستمراً ودورياً دورته 2π فإن المتتالية $\{\sigma_n\}$ لمجاميع فيجير متقاربة بانتظام نحو f على كل المستقيم العددي.

برهان. نستخدم التمثيل التكاملي للمجاميع الجزئية لسلسلة فوريي، والتي حصلنا عليها في الفقرة السابقة:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz$$

بنقل هذه العبارات إلى المساواة (3) نحصل من أجل $\sigma_n(x)$ على العبارة التالية:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\right\} f(x+z)\,dz$$

التي يمكن تبسيطها بفضل الدستور[1] :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)z = \frac{\sin^2 nz}{\sin z}$$

فتصبح :

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \right) f(x+z)\,dz \tag{4}$$

ويسمى هذا التكامل تكامل فيجير. تسمى العبارة :

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \right)^2 \tag{5}$$

نواة فيجير. يكتب عندئذٍ الدستور (4) على الشكل :

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,\Phi_n(z)\,dz \tag{6}$$

علينا أن نثبت بأن هذه العبارة تؤول بانتظام إلى $f(x)$ عندما يؤول n إلى ∞ . نشير في البداية إلى الخاصيات التالية لنواة فيجير :

1) $\Phi_n(z) \geq 0$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz = 1$

3) من أجل كل $0 < \delta$ مثبت ومن أجل $n \to \infty$ لدينا :

$$\int_{\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)\,dz = \int_{0}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz = \eta_n(\delta) \to 0$$

---

(1) نحصل على هذا الدستور بالجمع على k في العلاقات :

$$2\sin(2k+1)z \cdot \sin z = \cos 2kz - \cos 2(k+1)z$$

إن الخاصية الأولى بديهية، أما الخاصية الثانية فتأتي من المساواة (6) وذلك بوضع $f \equiv 1$ وبملاحظة أن $\sigma_n(x) = 1$ مهما كان n من أجل هذا التابع؛ أخيراً تنتج الخاصية الثالثة مباشرة من كون $\sin\frac{z}{2} \geq \frac{2\delta}{\pi}$ عندما يكون $\delta < z \leq \pi$. وبالتالي:

$$\left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 \leq \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2$$

بمراعاة هذه الخاصيات لنواة فيجير يمكن بسهولة البرهان على النظرية. بما أن التابع f مستمر ودوري فإنه محدود ومستمر بانتظام على كل المستقيم العددي. بعبارة أخرى، يوجد ثابت M بحيث من أجل كل x لدينا:

$$|f(x)| \leq M \tag{7}$$

ومن أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث من المتراجحة:

$$|x'' - x'| < \delta$$

يأتي:

$$|f(x'')| - f(x')| < \varepsilon/2 \tag{8}$$

للبرهان على النظرية يجب تقدير الفرق:

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)]\,\Phi_n(z)\,dz$$

الذي يمكن تمثيله بواسطة مجموع التكاملات الثلاثة التالية:

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,dz$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,dz$$

$$J_+ = \int_{0}^{\pi} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,dz$$

بفضل (7) وَ (8) نحصل مباشرة على التقديرات التالية:

$$|J_-| \le 2M\,\eta_n(\delta)$$
$$|J_+| \le 2M\,\eta_n(\delta)$$
$$|J_0| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)\,dz < \frac{\varepsilon}{2}$$

نختار الآن n_0 بحيث، من أجل $n \geq n_0$ وَ δ معطى تكون المتراجحة:

$$2M\,\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}$$

محققة. عندئذٍ:

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

وبما أن ε صغير بصفة اختيارية فإننا نستنتج الوارد في النظرية. نشير إلى أننا لم نستعمل سوى الخاصيات 1)، 2)، 3) لنواة فيجير في هذا البرهان. ويسمح ذلك بالحصول على تعميمات مختلفة للنظرية 1 (راجع بصفة خاصة البند 3 من هذه الفقرة).

2. تمام الجملة المثلثية. نظرية فايرشتراس (Weierstrass)

من نظرية فيجير ينتج أن الجملة المثلثية تامة في الفضاء $L_2[-\pi, \pi]$. ذلك أن هذه النظرية تنص على أن كل تابع مستمر يساوي نهاية متتالية متقاربة بانتظام (وبالتالي، متقاربة أيضاً بالمتوسط) وعناصر هذه المتتالية كثيرات حدود مثلثية σ_n. يبقى أن نلاحظ بأن التوابع المستمرة تشكل مجموعة كثيفة أينما كان في L_2. يمكن اعتبار نظرية فيجير تعزيزاً لنظرية فايرشتراس حول تقريب التوابع المستمرة بواسطة كثيرات الحدود المثلثية: تنص النظرية الأخيرة أن من أجل تابع مستمر ودوري، توجد متتالية كثيرات حدود مثلثية متقاربة بإنتظام نحو f، أما نظرية فيجير فتعطي متتالية معينة تماما تحقق هذه الخاصية، وهذه المتتالية هي متتالية مجاميع فيجير (3). من نظرية فايرشتراس حول التقريب المنتظم لتابع مستمر ودوري

بواسطة كثيرات حدود مثلثية نستنتج بسهولة النظرية الثانية لفايرشتراس حول تقريب كل تابع مستمر على قطعة $[a, b]$ بواسطة كثيرات حدود جبرية.

فإذا كان $f(x)$ تابعاً من هذا الشكل، نضع $t = \frac{x - a}{b - a}\pi$ أي $x = \frac{t(b - a)}{\pi} + a$ فنحصل على تابع $\varphi(t)$ لِـ t معرّف على القطعة $[0, \pi]$. نمدد هذا التابع أولاً إلى المجال نصف المفتوح $[-\pi, 0)$ بوضع $\varphi(-t) = \varphi(t)$ ثم نستعمل خاصية دورية التابع على المستقيم العددي بأكمله. لننشئ بعد ذلك كثير حدود مثلثي T_n بحيث:

$$|T_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t$$

لكن يمكن نشر كل كثير حدود مثلثي وفق سلسلة تايلورية متقاربة بانتظام على كل مجال منته. ليكن P_m مجموعاً جزئياً لسلسلة تايلور لِـ T_n بحيث:

$$|T_n(t) - P_m(t)| < \varepsilon/2 \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$$

عندئذٍ:

$$|\varphi(t) - P_m(t)| < \varepsilon \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$$

بعد تحويل المتغير $t = \frac{x - a}{b - a}\pi$ في $P_m(t)$ نحصل على كثير حدود $Q_m(x)$ يحقق الشرط:

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon \quad , \quad a \leq x \leq b$$

3. نظرية فيجير في الفضاء L_1. نلاحظ في نظرية فيجير أن الفرض والنتيجة متناظران شيئاً ما. من كون التابع f ينتمي إلى الفضاء $C[-\pi, \pi]$ المؤلف من التوابع المستمرة نستنتج أن مجاميع فيجير الموافقة لِـ f متقاربة نحو f بمفهوم مسافة الفضاء $C[-\pi, \pi]$. بإمكاننا الحصول على نظريات مماثلة من أجل فضاءات تابعية أخرى، وبصفة خاصة من أجل الفضاء

$L_1(-\pi, \pi]$. لدينا على وجه التحديد النظرية التالية ومن الطبيعي أن تسمى نظرية فيجير من أجل التوابع القابلة للجمع .

إذا كان f تابعاً قابلاً للجمع على القطعة $[-\pi, \pi]$ ، فإن مجاميع فيجير لِـ f متقاربة نحو $f(x)$ بالنسبة لنظيم الفضاء $L_1[\pi, \pi]$.

يمكن الحصول على برهان هذه النظرية بواسطة استدلالات مشابهة لتلك التي وردت في البند 1 . سوف لن نقدمها هنا . نلاحظ بهذا الخصوص أمراً هاماً وهو نتيجة من نظرية فيجير من أجل التوابع القابلة للجمع :

إن كل تابع قابل للجمع معرّف بطريقة وحيدة (بتقدير تكافؤ) بواسطة معاملات فوريي لهذا التابع .

لرؤية ذلك نعتبر تابعين f وَ g لهما نفس معاملات فوريي ، عندئذٍ نجد أن معاملات فوريي للتابع $f - g$ منعدمة . وبالتالي فإن كل مجاميع فيجير لِـ $f - g$ منعدمة . ومنه يأتي أن نهاية هذه المجاميع في L_1 منعدمة أينما كان تقريباً ، ونحن نعلم أن هذه النهاية هي $f - g$.

§ 3. تكامل فوريي

1. نظرية اساسية . أثبتنا في § 1 الشروط التي تجعل تابعاً دورياً قابلاً للتمثيل بسلسلة فوريي متقاربة ، أي بتركيب تذبذبات توافقية .

نحاول الآن تمديد هذه النتيجة على التوابع غير الدورية . وسنرى أنه يكفي فرض شروط جد عامة لكي يمكن تحقيق هذا التمثيل الذي يصبح في هذه الحالة ليس في شكل سلسلة بل في شكل تكامل يدعى تكامل فوري .

نبدأ ببعض الاعتبارات الإيحائية . ليكن f تابعاً يحقق على كل مجال منته الشروط الكافية التي تجعله قابلاً للنشر وفق سلسلة فوريي . بعبارة أخرى

نفرض أن التابع f يقبل الجمع على كل مجال منته وأنه يحقق عند كل نقطة شرط ديني. إذا اعتبرنا التابع f على القطعة $[-l, l]$ مثلاً تمكنا من كتابة نشره وفق سلسلة فوريي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \tag{1}$$

نعوض هنا a_k وَ b_k بعباراتها:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt \quad , \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t\, dt$$

ومنه يأتي:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot \cos \frac{k\pi}{l} t\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot \sin \frac{k\pi}{l} t\, dt \right) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{l} x \cdot \cos \frac{k\pi}{l} t + \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot \sin \frac{k\pi}{l} t \right] dt$$

أي:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} (t - x)\, dt \tag{2}$$

نضيف إلى الشروط على التابع f شرطاً جديداً: نفرض أن هذا التابع يقبل المكاملة مطلقاً على كل المستقيم أي أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty \tag{3}$$

ننتقل الآن إلى النهاية (وذلك بصفة شكلية مؤقتاً) في المساواة (2) بجعل l يؤول إلى ∞ . نلاحظ عندئذٍ أن الحد الأول من الطرف الأيمن لِـ (2) يؤول إلى الصفر عندما $l \to \infty$ ، وهذا بفضل المساواة (3) . أما الحد الثاني فيمكن اعتباره كمجموع تكاملي (مأخوذ على مجال غير منته) للتابع :

$$F(\lambda) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos \lambda(t - x) \, dt$$

من أجل التكامل :

$$\int_{0}^{+\infty} F(\lambda) \, d\lambda$$

بوضع :

$$\Delta\lambda = \frac{\pi}{l} \text{ وَ } \lambda_k = \frac{k\pi}{l}$$

وبالتالي فإن الانتقال الشكلي إلى النهاية في (2) بجعل $l \to \infty$ يؤدي إلى المساواة التالية :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t - x) \, dt \tag{4}$$

وهو بالضبط التمثيل المطلوب . بتبني الرموز :

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt$$

$$b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt$$

يمكن كتابة المساواة (4) على الشكل التالي الذي يشبه سلسلة فوريي :

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) \, d\lambda \tag{5}$$

حصلنا على المساواة (4) المسماة دستور فوريي بواسطة انتقال شكلي إلى النهاية . باستطاعتنا تبرير هذا الانتقال (وهذا بالاعتماد على الفروض المتخذة

أعلاه على f) ، لـكنه من الأسهل أن نعطي برهاناً مباشراً للمسـاواة (4). وهكذا نبرهن على النظرية التالية :

نظرية 1. إذا كان f تابعاً قابلاً للمكاملة مطلقاً على كل المستقيم العددي ويحقق عند النقطة x شرط ديني ، فإن :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

البرهان. نضع :

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \tag{6}$$

علينا أن نبين بأن $\lim\limits_{A\to\infty} J(A)$ موجودة وتسـاوي $f(x)$. لما كان التابع f يقبل المكاملة مطلقاً فإن التكامل الداخلي في (6) متقارب والتكامل المضـاعف متقارب مطلقاً. بتطبيق نظرية فوبيني يمكننا تبديل التكاملين فيما بينهما في (6) :

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{A} f(t)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt$$

بفضل تحويل المتغير $t-x=z$ نبسط هذا التكامل فيصبح :

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+z)\frac{\sin Az}{z}\,dz \tag{7}$$

ثم إن المسـاواة المعروفة :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Az}{z}\,dz = 1 \qquad (A>0)$$

تسمح بكتابة الفرق $J(A)-f(x)$ على الشكل :

$$J(A)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\,dz \tag{8}$$

نفكك تكامل الطرف الأيمن إلى مجموع ثلاثة حدود بالطريقة التالية :

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \frac{f(x+z) - f(x)}{z}\sin Az\,dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|z|\geq N} \frac{f(x+z)}{z}\sin Az\,dz - \frac{f(x)}{\pi}\int_{|z|\geq N} \frac{\sin Az}{z}\,dz$$

إن التكاملين الأخيرين لهذا المجموع تكاملان متقاربان بإنتظام من أجل $A \leq 1$ ، وكل واحد منهما يمكن رده أصغر من $\frac{\varepsilon}{3}$، هذا إذا كان العدد N مختاراً كبيراً بكفاية . فيما يخص الحد الأول (من أجل N مثبت) فهو يؤول إلى الصفر لما $A \to \infty$ (وذلك بالاعتماد على التوطئة 1 ، 1 § ، وعلى شرط دينى) . وبالتالي لدينا :

$$\lim_{A\to\infty}\left(J(A) - f(x)\right) = 0$$

وهو المطلوب .

2. تكامل فوريي في شكله العقدي . نلاحظ في الدستور التكاملي (4) لفوريي أن التكامل الداخلي تابع زوجي لِـ λ، وهو ما يسمح بكتابة هذا الدستور على الشكل :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \tag{9}$$

من جهة أخرى فإن قابلية المكاملة المطلقة للتابع f تستلزم أن التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt$$

موجود ، ثم أنه تابع فردي لِـ λ. ولذا :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt = 0 \tag{10}$$

(وذلك عندما نعتبر التكامل بالنسبة لِـ λ بمفهوم القيمة الرئيسية أي بصفته : $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}$) .

بإضافة المساواة (10) إلى (9) بعد ضرب (10) في i – نحصل على :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

تسمى هذه المساواة الدستور العقدي لفوريي.

§4. تحويل فوريي، خاصيات وتطبيقات

1. تحويل فوريي ودستور القلب. يمكن تمثيل الدستور التكاملي لفوريي على شكل علاقتين. نضع :

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

حينئذٍ :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda \tag{2}$$

نلاحظ أن الدستور (1) له معنى من أجل كل التوابع القابلة للمكاملة مطلقاً f. ومن الواضح أن هذا الدستور يعرّف تطبيقاً يسمى تحويل فوريي من $f\in L_1(-\infty,\infty)$ فيعطي تابعاً معيناً g معرفاً على كل المستقيم العددي. يسمى التابع g محولة فوريي للتابع الابتدائي f.

أما الدستور (2) فهو يعبّر عن التابع f بدلالة محولته لفوريي، ويسمى دستور القلب لتحويل فوريي. نلاحظ هنا وجه التشابه بين الدستورين (1) وَ (2). ذلك أن الدستور الثاني لا يختلف عن الأول إلاّ في إشارة الأس وبوجود العامل $\frac{1}{2\pi}$ أمام التكامل. هذا وبإمكاننا الحصول على صيغة أكثر تناظراً وذلك بتعريف التابع g بالدستور :

$$g(\lambda)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x \tag{1'}$$

وبذلك يصبح دستور القلب من الشكل :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\, dx \qquad (2')$$

وهكذا نلاحظ أن الدستورين السابقين لايختلفان إلّا في إشارة أس e .

لكن رغم التشابه الواضح بين (1) وَ (2) إلّا أنهما يختلفان اختلافاً كبيراً : فالتكامل الأول موجود بالمفهوم المعتاد (لأن $f \in L_1(-\infty, \infty)$ ، أما في التكامل الثاني فهو موجود بالقيمة الرئيسية . من جهص أخرى فإن المساواة (1) تمثل تعريف التابع g ، أما المساواة (2) فتمثل كتابة أخرى لدستور فوريي التكاملي ، وتحتوي على النتيجة القائلة بأن التكامل الوارد في طرفها الأيمن يساوي التابع الإبتدائي . كنا رأينا أعلاه بأننا نضمن هذه المساواة عندما نفرض على f ، إضافة إلى قابلية المكاملة ، شروطاً أخرى ، كشرط ديني مثلاً .

ملاحظة . عرّفنا محولة فوريي g من أجل كل تابع f من $L_1(-\infty, \infty)$ وبيّنا أن التابع f الذي يحقق شرط دينى عند كل نقطة يكتب بواسطة دستور القلب بدلالة محولة فوريي لِـ g . نلاحظ أن هذه الوضعية هي الوضعية التي لاقتنا في حالة سلاسل فوريي . ذلك أن معاملات فوريي :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$$

معرّفة من أجل كل تابع $f \in L_1[-\pi, \pi]$ ، لكن تقارب سلسلة فوريي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

(الذي يلعب هنا دور دستور القلب) لايمكن ضمانه إلاّ بفرض شروط إضافية (شرط دينى) . من جهة أخرى لدينا بخصوص محولة فوريي (كما هو الحال بخصوص السلسلة : راجع نهاية 2 §) القضية التالية :

إذا كان التابع $f \in L_1(-\infty, \infty)$ بحيث :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}\, dx = 0$$

فإن $f(x) = 0$ أينما كان تقريباً.

ذلك أن المساواة الواردة أعلاه تبرهن على أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}\,dx = 0$$

وذلك مهما كان العددان الحقيقيان t وَ λ.

نضع الآن:

$$\varphi(x) = \int_0^{\xi} f(x+t)\,dt$$

حيث ξ حقيقي مثبت كيفي. بتطبيق نظرية فوبيني وباستخدام الشرط المفروض على التابع f، نرى بسهولة أن التابع φ (الذي ينتمي إلى $L_1(-\infty, \infty)$ مثل f) يتمتع بنفس الشرط، أي أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\lambda x}\,dx = 0$$

من أجل كل حقيقي λ. وقد رأينا أن التابع φ مستمر مطلقاً على كل قطعة منتهية وبالتالي فهو يقبل أينما كان تقريباً مشتقاً منتهياً. وبصفة خاصة، فإن هذا التابع يحقق أينما كان تقريباً شرط ديني، وبالتالي، نرى بفضل النظرية 1، § 3 أن التابع منعدم أينما كان تقريباً لأن محولة فوريي لهذا التابع مطابق للصفر. لما كان φ تابعاً مستمراً فإن $\varphi(x) \equiv 0$ وهذا يستلزم على وجه الخصوص أن:

$$\int_0^{\xi} f(t)\,dt = 0$$

من أجل كل ξ.

إذن $f(x) = 0$ أينما كان تقريباً.

نعتبر الآن بعض الأمثلة:

1. ليكن $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ ، $\gamma > 0$. لنبحث عن محولة فوريي لهذا التابع ، لدينا :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x)\, dx$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-\gamma x} \cos \lambda x\, dx$$

بالمكاملة بالتجزئة مرتين ، نحصل على :

$$g(\lambda) = \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}$$

2. ليكن :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ |x| \leq a \\ 0 & , \ |x| > a \end{cases}$$

لدينا :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}$$

(من المهم أن نلاحظ بأن التابع g لا ينتمي هنا إلى $L_1(-\infty, \infty)$) .

3. ليكن :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$$

عندئذٍ :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \cdot \frac{dx}{x^2 + a^2} \qquad (3)$$

من الأفضل أن نحسب هذا التكامل بطريقة الرواسب . ليكن أولاً $\lambda > 0$. نرسم تحت المحور الحقيقي الممثل لمجال مكاملة (3) نصف دائرة قطرها هو المحور الحقيقي . عندئذٍ يصبح التكامل (3) مساوياً لجداء $(-2\pi i)$ في مجموع رواسب التابع تحت التكامل التي تقع في النصف الأسفل من

المستوى. يقبل التابع $\frac{e^{-i\lambda x}}{x^2 + a^2}$ في النصف الأسفل من المستوى قطباً بسيطاً عند النقطة $x = -a_i$. نحصل على راسب هذه النقطة بالاعتماد على القاعدة المعروفة التالية:

إذا كان $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ وَ $\varphi(a) \neq 0$ وكان لِـ $\psi(z)$ صفر بسيط فإن راسب التابع f عند النقطة a يساوي $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. لدينا في هذه الحالة:

$$g(\lambda) = -2\pi i \cdot \frac{e^{-a\lambda}}{-2ai} = \frac{\pi e^{-a\lambda}}{a}$$

وهذا من أجل $\lambda > 0$.

إذا كان $\lambda < 0$ فإن الطريقة السابقة تثبت (حيث نعوض النصف الأسفل من المستوى بنصفه الأعلى) أن:

$$g(\lambda) = \frac{\pi e^{a\lambda}}{a}$$

إذن لدينا:

$$g(\lambda) = \frac{\pi e^{-a|\lambda|}}{a} \quad , \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

هذا ونستطيع الحصول على هذه النتيجة مباشرة بدستور القلب وذلك باستعمال المثال 1 والنظرية 1، § 3.

4. ليكن: $f(x) = e^{-ax^2}$. عندئذٍ:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} \, dx \tag{4}$$

إن التابع المطلوب مكاملته هنا تحليلي، وليس له شذوذ في الجزء المنتهي من المستوى، وهو يؤول إلى الصفر على طول كل المستقيم موازٍ للمحور الحقيقي، إذن، بفضل نظرية كوشي، نجد أن التكامل (4) لاتتغير قيمته إذا أخذنا هذا التكامل على مستقيم $z = x + iy$ (حيث y ثابت) موازٍ للمحور الحقيقي بدل أخذه على هذا المحور. وهكذا:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\lambda(x+iy)} \mathrm{d}x = e^{ay^2+\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-2aixy-i\lambda x} \mathrm{d}x$$

$$= e^{ay^2-\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\lambda)} \mathrm{d}x$$

نختار قيمة ثابتة لِـy بشكل يسمح بإزالة الجزء التخيلي لأس التابع الأسي الواقع تحت التكامل، أي أننا نضع $y = -\frac{1}{2a}$. عندئذٍ :

$$g(\lambda) = e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2} - \frac{\lambda^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

لأن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

بصفة خاصة إذا أخذنا $a = \frac{1}{2}$ فإننا نحصل على :

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$g(\lambda) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

أي أن التابع $e^{-\frac{x^2}{2}}$ يطابق محولته لفوريي (بتقدير ثابت) .

2. الخاصيات الأساسية لتحويل فوريي. نستنتج من الدستور (1)، الذي يعرف تحويل فوريي، قائمة خاصيات هذا التحويل نعالجها فيما يلي :

قصد الاختصار في الكتابة نرمز لمحولة فوريي لتابع f بالرمز $F[f]$. أي إننا نرمز بـF للمؤثر الخطي المعرّف على الفضاء $L_1(-\infty, \infty)$ الذي يلحق بكل تابع من هذا الفضاء محولة فوريي لنفس التابع[1] .

1. إذا كانت متتالية $\{f_n\}$ من توابع $L_1(-\infty, \infty)$ متقاربة من أجل مسافة الفضاء $L_1(-\infty, \infty)$ فإن متتالية فوريي $g_n = F[f_n]$ متقاربة بانتظام على كل المستقيم العددي .

(1) محولة فوريي لتابع في $L_1(-\infty, \infty)$ لاينتمي عموماً لهذا الفضاء .

ينتج ذلك من التقدير البديهي التالي :

$$|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx$$

2. إن محولة فوريي g لتابع f يقبل المكاملة مطلقاً تابع مستمر ومحدود يؤول إلى الصفر عندما يؤول $|\lambda|$ إلى ∞ .

لدينا بالفعل :

$$|g(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$$

ومنه نرى بسهولة أن التابع $g = F[f]$ محدود . إذا كان f هو التابع المميز للمجال (a, b) فإن محولة فوريي لِـ f هي :

$$g(\lambda) = \int_a^b e^{-i\lambda x} \, dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}$$

والتابع g هنا مستمر ويؤول إلى الصفر عندما $|\lambda| \to \infty$ ، بما أن العملية F التي تسمح بالإنتقال من f إلى g عملية خطية فإننا نستنتج أن محولة فوريي لكل تابع درجي (أي كل عبارة خطية لتوابع مميزة لمجالات) تابع مستمر يؤول إلى الصفر عندما : $\lambda \to \pm\infty$. نلاحظ من جهة أخرى أن مجموعة التوابع الدرجية كثيفة أينما كان في $L_1(-\infty, \infty)$ ؛ إذن إذا انتمى f إلى L_1 فإنه توجد متتالية $\{f_n\}$ من التوابع الدرجية المتقاربة نحو f في $L_1(-\infty, \infty)$.

لكن في هذه الحالة نرى بفضل الخاصية 1 أن متتالية التوابع : $g_n = F[f_n]$ متقاربة بانتظام على كل المستقيم العددي نحو التابع $g = F[f]$. وبالتالي فإن التابع النهاية g مستمر أيضاً ويؤول إلى الصفر لما $|\lambda| \to \infty$.

تمرينان . 1. أثبت أن محولة فوريي g لتابع يقبل المكاملة مطلقاً f تابع مستمر بانتظام على المستقيم العددي .

2. ليكن B فضاء التوابع المستمرة بانتظام على $(-\infty, \infty)$ التي تؤول إلى

الصفر عند اللانهاية. أثبت أن تحويل فوريي F مؤثر من $L_1(-\infty, \infty)$ في B ، نظيمه يساوي 1 ونواته هي $\{0\}$.

3. إذا كان f تابعاً مستمراً مطلقاً على كل مجال منته وَ: $f' \in L_1(-\infty, \infty)$ ، فإن:

$$F[f'] = i\lambda\, F[f]$$

إذن، يلحق تحويل فوريي بمشتق تابع (تحت الشروط المذكورة) جداء محولة فوريي للتابع (المعتبر) في $i\lambda$.

ذلك أنه يمكن كتابة كل تابع مستمر مطلقاً على مجال منته بالشكل:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$

من الفرض القائل أن التابع f يقبل المكاملة مطلقاً ينتج أن الطرف الأيمن في المساواة السابقة له نهاية عندما يؤول x إلى ∞ وَ x إلى $-\infty$. وهذه النهاية تساوي بالضرورة 0 ولولاه لما كان التابع f قابلاً للمكاملة على كل المستقيم العددي. بمراعاة هذه النتيجة وبالمكاملة بالتجزئة نحصل على:

$$F[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = f(x)\, e^{-i\lambda x}\Big]_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = i\lambda\, F[f](\lambda)$$

وهو المطلوب.

إذا كان التابع f له مشتق $f^{(k-1)}$ مستمر مطلقاً على كل مجال وَ $f, \dots, f^{(k)}$ توابع تنتمي إلى $L_1(-\infty, \infty)$ فإننا نحصل باستدلالات مماثلة للسابقة على:

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k\, F[f] \qquad (5)$$

4. علاقة رتبة الاشتقاق لتابع ما بسرعة التناقص عند اللانهاية لمحولة فوريي التابع.

إذا قسمنا طرفي (5) على $(i\lambda)^k$ وبمراعاة كوْن محولة فوريي تؤول إلى الصفر عند اللانهاية (الخاصية 2) ، ينتج أنه إذا كان $f^{(k)}$ قابلاً للمكاملة مطلقاً فإن :

$$|F[f]| = \frac{|F[f^{(k)}]|}{|\lambda|^k} \to 0$$

أي أن $F[f]$ ، في هذه الحالة ، يتناقص عند اللانهاية أسرع من $\frac{1}{|\lambda|^k}$ وبالتالي بقدر ما تزداد رتبة اشتقاق f على L_1 بقدر ما تزداد سرعة تناقص محولة فوريي لِـ f عند اللانهاية.

5. إذا كان f'' موجوداً ومنتمياً إلى $L_1(-\infty, \infty)$ فإن $F[f]$ يقبل المكاملة مطلقاً.

ذلك أن $F[f]$ ، في هذه الحالة ، محدود ويتناقص عند اللانهائية أسرع من $\frac{1}{\lambda^2}$. ومنه تأتي قابلية المكاملة.

أثبتنا في الخاصية 4 أنه بقدر ما يقبل التابع f مشتقات بقدر ما تزداد سرعة تناقص محولة فوريي عند اللانهاية. نلاحظ بهذا الخصوص أن القضية الثنوية للقضية السابقة صادقة أيضاً أي بقدر ما يزداد تناقص f بقدر ما تزداد مرونة محولة فوريي لِـ f؛ لدينا على وجه التحديد الخاصية التالية :

6. نفرض أن التابع $f(x)$ يقبل المكاملة مطلقاً ، وكذا $xf(x)$. عندئذٍ يكون التابع $g = F[f]$ قابلاً للاشتقاق وَ :

$$g'(\lambda) = F[-i\,x f(x)] \tag{6}$$

إذا أخذنا مشتق التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx$$

الذي يعرّف g بالنسبة للوسيط λ نحصل على التكامل :

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-i\lambda x}\, dx$$

الذي يتقارب بانتظام بالنسبة لِـ λ (بفضل قابلية المكاملة للتابع $xf(x)$) . إذن فإن مشتق التابع g موجود ولدينا (6).

إذا كان f تابعاً بحيث تكون التوابع : $f(x), x f(x), ..., x^p f(x)$ قابلة للمكاملة مطلقاً فإن استدلالات مماثلة للسابقة تثبت أن التابع g يقبل مشتقات متتالية حتى الرتبة p (بما فيها هذه الرتبة) وَ :

$$g^{(k)}(\lambda) = F[(-ix)^k f(x)], (k = 0, 1, ..., p)$$

7. إذا فرضنا أن التابع f يتناقص عند اللانهاية بسرعة أكبر، فإن التابع g يصير أكثر مرونة. فمن الفرض القائل أن $x^p f(x)$ ينتمي إلى $L_1(-\infty, \infty)$ من أجل كل p، ينتج أن التابع g يقبل الاشتقاق لانهائياً (أي من كل الرتب). نفرض الآن بأن $e^{\delta|x|} f(x)$ ينتمي إلى $L_1(-\infty, \infty)$ من أجل عدد $\delta > 0$ معين. حينئذٍ يمكن تمديد التابع $g(\lambda)$ تحليلياً من المحور الحقيقي إلى شريط من المستوى العقدي $\zeta = \lambda + i\mu$، ويزداد عرض هذا الشريط بقدر ما تكبر قيمة العدد δ. وعلى كل حال فبإمكاننا القول بأن g تابع تحليلي في حالة $|\mu| < \delta$. ذلك أن التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\zeta}\, dx$$

متقارب من أجل $|\mu| < \delta$ وهو يعرّف تابعاً مستمراً يطابق على المحور الحقيقي محولة فوريي للتابع f. نلاحظ أن البرهان على كون هذا التابع يقبل الاشتقاق بمفهوم نظرية التوابع التحليلية من أجل $|\mu| < \delta$، يتم مثل برهان الخاصية 6.

3. **تمام جملتي توابع هيرميت ولاغير**. باستخدام الاعتبارات الواردة في البند السابق يمكن أن نثبت بأنه إذا كان تابع قابل للقياس f مخالفاً للصفر أينما كان تقريباً على مجال (a, b)، حيث : $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ومحققاً على هذا المجال الشرط $|f(x)| \leq c\, e^{-\delta|x|}$ حيث $\delta > 0$ فإن جملة التوابع $\{x^n f(x)\}$ حيث $n = 0, 1, ...$ تامة في الفضاء $L_2(a, b)$. ومنه يأتي بصفة خاصة أن توابع هيرميت ولاغير تشكل جملتين تامتين في $L_2(-\infty, \infty)$ وفي $L_2(0, \infty)$ على التوالي (راجع الفصل 7، §3، 7، 8).

لنثبت القضية المتعلقة بالتمام الواردة آنفاً. نفرض أنّ الجملة $\{x^n f(x)\}$ غير

تامة . ومنه يأتي حسب النظرية 4 من الفصل 3 ، § 4 ، 5 أنه يوجد تابع غير منعدم h في $L_2(-\infty, \infty)$ بحيث :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) h(x) \, dx = 0 \, , \, n = 0, 1, \ldots$$

(في حالة ما إذا كان الفضاء المعتبر $L_2(a, b)$ عقدياً فبدل $h(x)$ يجب أن نكتب $\overline{h(x)}$) . من الواضح أن $f \cdot h$ تنتمي إلى $L_1(a, b)$ ولدينا أيضاً : $e^{\delta_1 |x|} f h \in L_1(a, b)$ من أجل $\delta_1 < \delta$. من المستحسن في المستقبل أن نفرض بأن التابعين $f(x)$ وَ $h(x)$ معرّفان على المستقيم العددي بأكمله وذلك بتمديدها ، إذا اقتضى الأمر ، بالصفر خارج (a, b). ليكن g محولة فوريي للتابع fh ، أي :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(x) \, e^{-i\lambda x} \, dx$$

يتبين مما سبق أن التابع g يمكن تمديده تحليلياً إلى الشريط $|Im \, \zeta| < \delta$. من جهة أخرى وبفضل الخاصية 6 ، فإن كل مشتقات هذا التابع تنعدم من أجل $\lambda = 0$ بحيث أن $g(\lambda) \equiv 0$. ثم من خاصية الوحدانية المبرهن عليها ضمن البند 1 نستنتج $h(x) = 0$ أينما كان تقريباً لأن $f(x)$ مخالف للصفر أينما كان تقريباً . ندرك أن ذلك يناقض الفرض القائل بأن h تابع غير منعدم . وهذا التناقض يثبت أن الجملة $\{x^n f(x)\}$ تامة .

4. تحويل فوريي للتوابع القابلة للاشتقاق لانهائياً والسريعة التناقص .

بما أن الانتقال من تابع f إلى محولة فوريي g لِـ f يجعل خاصيتيْ قابلية الاشتقاق والتناقص عند اللانهاية للتابع تَسْتَبدلان الواحدة بالأخرى ، فمن السهل إبراز صفوف طبيعية من التوابع بحيث يطبق تحويل فوريي هذه الصفوف في نفسها .

لتكن S_∞ مجموعة التوابع القابلة للإشتقاق لانهائياً على المستقيم العددي بحيث يقبل كل تابع منها جملة من الثوابت C_{pq} (تتعلق بالتابع f وبالعددين p وَ q) تحقق :

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{pq} \qquad (7)$$

لنثبت أنه إذا كان $f \in S_\infty$ فإن $g = F[f] \in S_\infty$. من المتراجحة (7) ينتج في البداية أن كل تابع من التوابع $x^p f^{(q)}(x)$ يقبل المكاملة مطلقاً. ذلك أن المتراجحة (7) المحققة من كل الأعداد p وَ q تعطي :

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \frac{C_{p+2,q}}{x^2}$$

أي أن التابع $x^{p-2} f^{(q)}(x)$ يتناقص على الأقل بسرعة تناقص $\frac{1}{x^2}$. ومنه يأتي أن التابع $F[f]$ يقبل الاشتقاق لا نهائياً. أخيراً ومن البند 2 نستخلص أن قابلية المكاملة لِـ $f^{(q)}(x)$ ، $q = 1, 2, \ldots$ تستلزم أن $g = F[f]$ يتناقص عند اللانهاية بسرعة أكبر من سرعة تناقص $\frac{1}{|\lambda|^q}$. نعتبر الآن التوابع :

$$(i\lambda)^q \; g^{(p)}(\lambda) = (-\, i)^q \; F\left[\left(x^p f(x)\right)^{(q)}\right]$$

إن كل واحد منها محدود من الأعلى بثابت D_{pq} بصفته محولة فوريي لتابع يقبل المكاملة. إذن إذا كان $f \in S_\infty$ فإن $g = F[f] \in S_\infty$. نعتبر بعد هذا القضية العكسية، ليكن $g \in S_\infty$ ، عندئذٍ ينتج مما سبق أن التابع :

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} \, dx$$

ينتمي إلى S_∞ . نضع : $f(x) = \frac{1}{2\pi} f^*(-\, x)$. من الواضح أن $f \in S_\infty$. من جهة أخرى يأتي من دستور القلب.

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{i\lambda x} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} \, dx$$

أي أن g هو محولة فوريي للتابع $f \in S_\infty$. وهكذا يتضح أن تحويل فوريي يطبق الصف S_∞ على نفسه. ثم إن هذا التطبيق تقابل.

تمرين. ليكن $f \in S_\infty$ وَ $\int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) \, dx = 0$ من أجل كل $p \geq 0$. هل ينتج من ذلك أن $f(x) \equiv 0$؟

5. تحويل فوريي والتزويج. ليكن f_1 وَ f_2 تابعين قابلين للمكاملة على كل المستقيم العددي. يسمح التابع:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi$$

(جداء) تزويج التابعين f_1 وَ f_2. إن التابع $f(x)$ معرّف من أجل تقريباً كل x، وهو يقبل المكاملة، ذلك لأن التكامل المضاعف:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\, f_2(x-\xi)\, d\xi\, dx$$

موجود لأن التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\xi)\, f_2(\eta)|\, d\xi\, d\eta$$

موجود (راجع الملاحظة المتعلقة بنظرية فوبيني ضمن الفصل 5، § 6، 4') وبالتالي فإن التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\, f_2(x-\xi)\, d\xi$$

موجود أيضاً. نرمز لِـ f بِـ $f_1 * f_2$. نبحث عن محولة فوريي لجداء تزويج تابعين من L_1. بتطبيق نظرية فوبيني وبوضع $x - \xi = \eta$ نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\, f_2(x-\xi)\, d\xi \right\} e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)\, e^{-i\lambda x}\, dx \right\} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)\, e^{-i\lambda\eta - i\lambda\xi}\, d\eta \right\} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)\, e^{-i\lambda\eta}\, d\eta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi$$

أي أن:

$$F(f_1 * f_2) = F[f_1] \cdot F[f_2]$$

وهكذا فإن تحويل فوريي يردّ عملية التزويج إلى عملية أبسط وهي عملية ضرب التوابع. تلعب هذه النتيجة دوراً هاماً في العديد من تطبيقات تحويل فوريي.

6. تطبيق تحويل فوريي على معادلة الحرارة. يعتمد تطبيق تحويل فوريي في المعادلات التفاضلية على كوْن (راجع البند 3) هذا التحويل يَردّ عملية الإشتقاق إلى عملية الضرب في المتغير المستقل. وهكذا تُرَدُّ معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = \varphi(x) \tag{8}$$

بواسطة تحويل فوريي إلى معادلة جبرية من الشكل:

$$(i\lambda)^n z + a_1 (i\lambda)^{n-1} z + \ldots + a_{n-1} i\lambda z + a_n z = \psi(z) \tag{9}$$

حيث $z = F[y]$ وَ $\psi = f[\varphi]$. إلاّ أن هـذه الطريقة لا تفتح أي مجـال جديد أسـاسي عندما يتعلق الأمر بالمعادلات التفاضلية العادية، لأن حل المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة هي نفسها مسـألة ليست ذات صعوبة كبيرة. نلاحظ إلى جانب ذلك أن الانتقال من (8) إلى (9) لايسمح به إلاّ إذا كان التابع المجهول $y(x) = y$ قابلاً للمكاملة على المستقيم العددي بأكمله، وهذا الشرط لايتوفر عموماً في المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة.

تبرز أهمية تحويل فوريي البالغة عندما يطبق هذا التحويل على المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية، فهو يسمح في هذه الحالة عند توفر بعض الشروط، بردّ حل مثل هذه المعادلات إلى حل معادلات تفاضلية عادية. لنبين ذلك من خلال المثال التالي لمسألة كوشي الخاصة بمعادلة الحرارة. نبحث عن حل معادلة الحرارة:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \tag{10}$$

المعرّف من أجل $-\infty < x < \infty$ وَ $t \geq 0$ والمطابق من أجل $t = 0$ لتابع معطى $u_0(x)$. أما المعنى الفيزيائي لهذه المسألة فيتمثل في البحث عن درجة حرارة قضيب حراري طوله غير منته، وذلك في كل لحظة $t > 0$ مع العلم أن درجة حرارته في اللحظة $t = 0$ هي $u_0(x)$ عند كل نقطة x .

لنفرض أن التوابع $u_0(x)$ ، $u'_0(x)$ ، $u''_0(x)$ تنتمي إلى $L_1(-\infty, \infty)$ ، ثم نبحث عن حل المسألة المطروحة من بين التوابع $u(x, t)$ التي تحقق الشرطين :

1) التوابع : $u(x, t)$ ، $u_x(x, t)$ ، $u_{xx}(x, t)$ قابلة للمكاملة مطلقاً على كل المحور x من أجل $t \geq 0$ مثبت .

2) التابع $u_t(x, t)$ يقبل في كل مجال منته $0 \leq t \leq T$ حاداً أعلى $f(x)$ مستقلاً عن t وقابلاً للمكاملة :

$$|u_t(x, t)| \leq f(x) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx < \infty$$

نطبق على المعادلة (10) تحويل فوريي بالنسبة لِ x . حينئذٍ نحصل في الطرف الأيمن على :

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\lambda^2 v(\lambda, t)$$

حيث : $v(\lambda, t) = F[u(x, t)]$ ؛ أما الطرف الأيسر لهذه المعادلة فيصبح بفضل الشرط 2) :

$$F[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\lambda x}\, dx = v_t(\lambda, t)$$

وهكذا تُردّ المعادلة (10) بواسطة تحويل فوريي إلى المعادلة التفاضلية العادية :

$$v_t(\lambda, t) = -\lambda^2 v(\lambda\ t)$$

وهي المعادلة التي ينبغي أن نجد حلها مع العلم أن هذا الأخير يطابق في اللحظة $t = 0$ التابع :

$$v_0(\lambda) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

ومنه يتضح أن الحل المطلوب هو :

$$v(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 t}\, v_0(\lambda)$$

وللحصول على حل مسألتنا الأولى يكفي إيجاد التابع $u(x, t)$ الذي له محولة فوريي مساوية لِـ $v(\lambda, t)$.

باستخدام المثال 4 من البند 1 نحصل على :

$$e^{-\lambda^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]$$

إذن :

$$v(\lambda, t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] \cdot F[u_0(x)] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right]$$

أي :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \cdot u_0(x - \xi)\, d\xi$$

يسمى التكامل الأخير تكامل بواسون لمعادلة الحرارة .

7. تحويل فوريي للتوابع المتعددة المتغيرات . يمتد مفهوم تحويل فوريي المعتبر أعلاه من التوابع ذات متغير واحد إلى التوابع المتعددة المتغيرات .

ليكن $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ تابعاً يقبل المكاملة على كل الفضاء $\mathbf{R}^n$ ذي البعد n . إن محولة فوريي لهذا التابع هي تعريفاً :

$$g(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, e^{-i(x_1\lambda_1 + ... + x_n\lambda_n)}\, dx_1 ... dx_n$$

نلاحظ أن هذا التكامل المضاعف n مرة موجود حتماً لأن التابع $f(x_1, ..., x_n)$ قابل للمكاملة، بفضل نظرية فوبيني يمكن أن نكتب هذا التكامل على الشكل:

$$g(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ ... \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) \ e^{-ix_1\lambda_1} \mathrm{d}x_1 \right\} x \right.$$

$$\left. x \, e^{-ix_2\lambda_2} \mathrm{d}x_2 \ ... \right\} e^{-ix_n\lambda_n} \mathrm{d}x_n \qquad (11)$$

بعبارة أخرى، فإن الإنتقال من تابع ذي n متغيراً إلى محولة فوريي لنفس التابع يمكن أن يتم بصفة متوالية بالنسبة لكل متغيّر (بدون مراعاة ترتيب المتغيرات). ثم بقلب الـ n عملية، بصفة متوالية، في الطرف الأيمن من (11) نحصل على:

$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ ... \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, ..., \lambda_n) \ e^{ix_n\lambda_n} \mathrm{d}\lambda_n \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \ e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}} \mathrm{d}\lambda_{n-1} \ ... \right\} e^{ix_1\lambda_1} \mathrm{d}\lambda_1$$

يمكن أن نكتب هذا الدستور على الشكل:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, ... \lambda_n) \ e^{i(x_1\lambda_1 + ... + x_n\lambda_n)} \ \mathrm{d}\lambda_1 ... \mathrm{d}\lambda_n \qquad (12)$$

لكن لما كان التابع $g(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ لايقبل دوماً المكاملة على الفضاء $\mathbf{R}^n$ بأكمله، يجب الإشارة إلى المفهوم الذي ننظر من خلاله إلى التكامل المضاعف n مرة (12) كما يجب الإشارة إلى الشروط التي تجعل التابع $f(x_1, ..., x_n)$ يقبل التمثيل بهذا التكامل.

من بين الأجوبة الممكنة عن هذه الأسئلة نقدم الجواب التالي:

نظرية 1. ليكن $f(x_1, ..., x_n)$ تابعاً قابلاً للمكاملة على كل الفضاء $\mathbf{R}^n$ ويحقق الشروط:

$$
(13)\quad \begin{cases}
|f(x_1 + t_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq C\,|t_1|^a \\
|f(x_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq C(x_1)\,|t_2|^a \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
|f(x_1, x_2, \ldots, x_n + t_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leq C(x_1, \ldots, x_{n+1})\,|t_n|^a \\
\text{حيث : } 0 < a \leq 1 \text{ ،} \quad \int_{-\infty}^{\infty} C(x_1)\,\mathrm{d}x_1 < \infty \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\int_{-\infty}^{-\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} < \infty
\end{cases}
$$

عندئذٍ يكون دستور القلب (12) محققا إذا كان المقصود بالتكامل الذي يحتوي عليه هذا الدستور هو :

$$
\frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \lim_{N_1 \to \infty} \int_{-N_1}^{N_1} \Big\{ \ldots \lim_{N_{n-1} \to \infty} \times
$$

$$
\times \int_{-N_{n-1}}^{N_{n+1}} \Big\{ \lim_{N_n \to \infty} \int_{-N_n}^{N_n} g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, e^{i x_n \lambda_n} \mathrm{d}\lambda_n \Big\} \times
$$

$$
\times\ e^{i x_{n-1} \lambda_{n-1}}\, \mathrm{d}\lambda_{n-1} \ \ldots \Big\}\ e^{i x_1 \lambda_1}\, \mathrm{d}\lambda_1
$$

لرؤية ذلك نلاحظ أن قابلية التابع $f(x_1, \ldots, x_n)$ للمكاملة على $\mathbf{R}^n$ تستلزم حسب نظرية فوبيني أنه يقبل المكاملة بالنسبة لِـ x_1 من أجل كل $x_2, \ldots, x_n$ تقريباً . إذن فإن التابع :

$$
f_1(\lambda_1,\ x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-i x_1 \lambda_1}\, \mathrm{d}x_1
$$

موجود . من (13) ينتج أن $f(x_1, \ldots, x_n)$ ، كتابع لِـ x_1 يحقق شروط النظرية 1 ، 3 § ؛ يمكن التعبير عن التابع $f(x_1, \ldots, x_n)$ بدلالة f_1 وذلك بواسطة دستور القلب :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_1}^{N_1} f_1(\lambda_1, x_2, ..., x_n)\, e^{ix_1\lambda_1}\, d_{\lambda_1}$$

إذا وضعنا بعد ذلك :

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2, x_3, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda_1, x_2, ..., x_n)\, e^{-ix_2\lambda_2}\, dx_2$$

فإن من (13) ينتج أن من أجل f_1 لدينا دستور القلب :

$$f_1(\lambda_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{N_2 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1, \lambda_2, ..., x_n)\, e^{ix_2\lambda_2}\, d\lambda_2$$

أي :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_1}^{N_1} \left\{ \lim_{N_2 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1, \lambda_2, ..., x_n) \cdot e^{ix_2\lambda_2}\, d\lambda_2 \right\} e^{ix_1\lambda_1}\, d\lambda_1$$

بتعريف $f_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., x_n)$ إلخ ، نحصل أخيراً على الدستور (12).

يُستعمل تحويل فوريي الخاص بالتوابع المتعددة المتغيرات بشكل واسع في نظرية المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية. نعتبر مثلاً المعادلة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{14}$$

التي تصف كيفية انتشار الحرارة في المستوى. نفرض أن درجة الحرارة في اللحظة $t = 0$ معطاة بـ :

$$u(0, x, y) = u_0(x, y)$$

إذا فرضنا على الحل المطلوب شروطاً مماثلة لتلك التي وردت في البند 6 ، يمكن في (14) إجراء تحويل فوريي بالنسبة لِـ x وَ y.

يقودنا ذلك إلى المعادلة التفاضلية العادية :

$$\frac{dv}{dt} = -(\lambda^2 + \sigma^2)v \tag{15}$$

حيث :

$$v(t, \lambda, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x, y)\, e^{-i(\lambda x + \sigma y)}\, dx\, dy$$

بعد حل المعادلة (15) يمكن إيجاد حل المعادلة الأُولى (14) بواسطة دستور القلب .

5§. تحويل فوريي في الفضاء $L_2(-\infty, \infty)$.

1. نظرية بلونشرال (Plancherel) . نعود في البداية إلى النتائج التي حصلنا عليها من خلال دراسة سلاسل فوريي . لكي نقترب أكثر من تحويل فوريي سنعتبر سلسلة فوريي في شكلها العقدي أي أننا نأخذ على القطعة $[-\pi, \pi]$ الجملة المتعامدة التامة المؤلفة من التوابع e^{inx} حيث ... $n = 0, \mp 1, \mp 2,$ ونلحق بكل تابع f قابل للجمع على $[-\pi, \pi]$ متتالية معاملات فوريي لِـ f :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \;\;,\;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

إذا كان التابع f قابلاً للجمع وفي نفس الوقت ذا مربع قابل للجمع فإن معاملات فوريي لِـ f تحقق الشرط :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

أي أن الانتقال من تابع ذي مربع قابل للجمع إلى مجموعة معاملات فوريي لهذا التابع تطبيق من الفضاء الإقليدي l_2 على الفضاء الإقليدي l_2 ؛ بالإضافة إلى ذلك فإن هذا التطبيق خطي ويحقق علاقة بارسفال :

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \tag{1}$$

(أي أن هذا الانتقال لا يختلف عن تطبيق يحتفظ بالنظيم إلاّ بتقدير عامل عددي) .

نعتبر الآن تحويل فوريي من أجل التوابع المعطاة على كل المستقيم العددي ولنر ما إذا كان بالإمكان اتخاذ هذا التحويل كمؤثر خطي في الفضاء العقدي $L_2(-\infty, \infty)$. تنحصر الصعوبة الرئيسية هنا في وجود توابع ذات مربعات قابلة للجمع على المستقيم العددي لا تنتمي إلى $L_1(-\infty, \infty)$ ، أي إن محولات فوريي لمثل هذه التوابع بمفهوم التعريف الوارد في § 4 قد تكون غير موجودة. وعلى الرغم من ذلك، يمكن من أجل كل تابع f في $L_2(-\infty \infty)$ تعريف محولة فوريي بمفهوم يختلف قليلاً عن المفهوم السالف الذكر. نحصل عندئذٍ على النظرية التالية التي يمكن أن تُعْبَر بمثابة النتيجة المماثلة لعلاقة بارسفال (1).

نظرية (بلونشرال، 1910). من أجل كل تابع f في $L_2(-\infty, \infty)$ فإن التكامل:

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

تابع لـ λ ينتمي إلى $L_2(-\infty, \infty)$ ، وذلك مهما كان N . وعندما يؤول N إلى ∞ فإن التابع g_N يتقارب من أجل مسافة الفضاء L_2 نحو تابع g ولدينا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\, d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \qquad (2)$$

يسمى هذا التابع g محولة فوريي للتابع $f \in L_2$. إذا انتمى f إيضاً إلى $L_1(-\infty, \infty)$ فإن التابع الموافق لـ g يطابق محولة فوريي لـ f بالمفهوم المعتاد.

البرهان. إن الفكرة الرئيسية التي يعتمد عليها البرهان تنحصر في البرهان على المساواة (2) أولاً من أجل كل التوابع المنتمية إلى الجماعة S_∞ المؤلفة من التوابع القابلة للإشتقاق لانهائياً والسريعة التناقص، وهي مجموعة كثيفة أينما كان في $L_2(-\infty, \infty)$ ؛ بعد ذلك نمدد صلاحية المساواة (2) إلى $L_2(-\infty, \infty)$ بواسطة الاستمرار. لنفصل هذه الفكرة.

1) ليكن f_1 وَ f_2 عنصرين من S_∞ . نرمز بِـ g_1 وَ g_2 على التوالي لمحولتي فورييِ لِـ f_1 وَ f_2 . عندئذٍ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(g_1(\lambda)\; e^{i\lambda x}\, d\lambda\right] \overline{f_2(x)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_1(\lambda) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\; e^{-i\lambda x}\, dx}\right] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\, \overline{g_2(\lambda)}\, d\lambda$$

إن التبديل السابق في التكاملات شرعي لأن التابع :

$$g_1(\lambda)\, \overline{f_2(x)}\, e^{-i\lambda x}$$

يقبل المكاملة مطلقاً على المستوى (x, λ) . بوضع $f_1 = f_2 = f$ وَ $g_1 = g_2 = g$ نستنتج أن الدستور (2) محقق من أجل كل تابع f في S_∞ .

2) ليكن الآن f كيفياً في $L_2(-\infty, \infty)$ ومنعدماً خارج مجال $(-a, a)$. حينئذٍ يُصبح f قابلاً للمكاملة على $(-a, a)$ (أي ينتمي إلى $L_1\ (-a, a)$) وبالتالي على كل المستقيم العددي . نستنتج من ذلك وجود محولة فورييِ لِـ f :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; e^{-i\lambda x}\, dx$$

لتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع من S_∞ منعدمة خارج $(-a, a)$ ومتقاربة من أجل نظيم $L_2(-\infty, \infty)$ نحو f . بما أن f وكل التوابع f_n تخالف الصفر على مجال منته فقط ، فإن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة نحو f من أجل نظيم $L_1(-\infty, \infty)$ أيضاً . ولذا (راجع 4§ ، 2) فإن المتتالية $\{g_n\}$ متقاربة بانتظام نحو g على كل المستقيم العددي .

وبالإضافة إلى ذلك نلاحظ أن $\{g_n\}$ متتالية لـكوشي في $L_2(-\infty, \infty)$. ذلك أن $g_n - g_m \in S_\infty$ ؛ وبالتالي وبفضل ما توصلنا إليه :

$$\int_{-\infty}^{\infty} | g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2\, d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx$$

ومنه يأتي أن $\{g_n\}$ متتالية لـكوشي . إن ذلك يستلزم .بأن هذه المتتالية

متقاربة في L_2 وأن لها نهاية تساوي التابع g ، وهو التابع الذي تؤول اليه المتتالية بانتظام . إذن يمكن في المساواة :

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_n\|^2$$

الانتقال إلى النهاية عندما يؤول n إلى ∞ . وهكذا فإن المساواة (2) محققة من أجل كل تابع $f \in L_2$ منعدم خارج مجال معين .

3) أخيراً ، ليكن f تابعاً كيفياً في L_2 . نضع :

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) \ , & |x| \leq N \\ 0 \ , & |x| > N \end{cases}$$

من الواضح أن :

$$\|f - f_N\| \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

إن التابع f_N ينتمي إلى $L_1(-\infty, \infty)$ وهو يستلزم وجود محولة فورييي المعتادة . وقيمة هذه الأخيرة هي :

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

كنا وجدنا في الجزء 2) من هذا البرهان أن :

$$\|f_N - f_M\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N - g_M\|^2$$

ولذا فإن التوابع g_N متقاربة في L_2 نحو نهاية نرمز لها بِـ g . وبالتالي يمكن في المساواة :

$$\|f_N\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N\|^2$$

الانتقال إلى النهاية من أجل $N \to \infty$ والحصول حينئذٍ على العلاقة (2) من أجل كل تابع $f \in L_2(-\infty, \infty)$.

يتم بذلك البرهان على الجزء الأول لنظرية بلونشرال .

إذا انتمى الآن التابع f إلى الفضاءين $L_1(-\infty, \infty)$ وَ $L_2(-\infty, \infty)$ في آن واحد فإن محولة فوريي لِـ f :

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

موجودة بالمفهوم المعتاد. تتقارب في هذه الحالة المتتالية $\{f_N\}$ نحو f في $L_1(-\infty, \infty)$ ، وبالتالي فإن محولات فوريي g_N لهذه التوابع تتقارب بانتظام نحو $\tilde{g}$. لدينا من جهة أخرى أن التوابع g_N متقاربة من أجل مسافة $L_2(-\infty, \infty)$ نحو تابع رمزنا له بِـ g . ومنه يأتي أن $\tilde{g} = g$. انتهى البرهان.

نتيجة. ينتج من العلاقة (2) مباشرة أن من أجل كل تابعين f_1 وَ f_2 من $L_2(-\infty, \infty)$ لدينا :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\, \overline{g_2(\lambda)}\, d\lambda$$

للبرهان على ذلك يكفي كتابة المساواة (2) من أجل التابع $f_1 + f_2$ ومقارنة العبارات التي نحصل عليها في الطرفين. إذا كان معنى المساواة (2) هو أن تحويل فوريي يحتفظ بنظيم L_2 فإن المساواة الأخيرة تعني أن هذا التحويل يحتفظ بالجداء السلمي.

2. تابع هيرميت. تبين نظرية بلونشرال المعروضة في البند السابق أن تحويل فوريي يمكن اعتباره كمؤثر خطي محدود F يطبق الفضاء $L_2(-\infty, \infty)$ على نفسه. إذا اختيرت في هذا الفضاء جملة متعامدة ومتجانسة وتامة فإن المؤثر F (كما هو الحال بخصوص كل مؤثر خطي) يمكن أن يكتب بواسطة مصفوفة غير منتهية. يتعلق شكل هذه المصفوفة، بطبيعة الحال، باختيار الأساس. إن المصفوفة الموافقة لمؤثر لها شكل بسيط جداً إذا كان الأساس المختار مؤلفاً من التوابع الذاتية للمؤثر المعتبر: نجد في هذه الحالة أن المصفوفة قطرية. السؤال المطروح هو معرفة ما إذا كان هذا الأساس موجوداً من أجل تحويل فوريي F . بعبارة أخرى فالأمر يتعلق بمعرفة التوابع المنتمية لِـ $L_2(-\infty, \infty)$ الذاتية من أجل تحويل فوريي F؟ بهذا الخصوص نشير إلى تطبيق تحويل فوريي على المعادلة :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - x^2 f = \mu f \tag{3}$$

يعطي معادلة مـن نفس الشكل[1] (لأن العملية $\frac{d^2 f}{dx^2}$ يوافقها الضرب في $-\lambda^2$ ، والضرب في $-x^2$ توافقه العملية $\frac{d^2}{d\lambda^2}$) . ولذا فمن الطبيعي أن نبحث عن التوابع الذاتية للمؤثر F بصفتها حلولاً للمعادلة (3) لنفتش عن حلول هذه المعادلة التي لها الشكل.

$$f = w e^{-\frac{x^2}{2}}$$

حيث w كثير حدود. بنقل هذه العبارة في (3) نحصل من أجل w على المعادلة :

$$w'' - 2x w' = (\mu + 1) w$$

إذا وضعنا :

$$w = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{4}$$

فإننا نصل إلى المعادلة :

$$(2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1})$$
$$= (\mu + 1)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$$

بمقارنة حدود طرفي هذه المسـاواة التي لها نفس قوى x نحصل على :

$$-2n a_n = (\mu + 1) a_n$$
$$-2(n-1) a_{n-1} = (\mu + 1) a_{n-1}$$

وهكذا على التوالي ؛ بصفة عامة :

$$k(k-1) a_k - 2(k-2) a_{k-2} = (\mu + 1) a_{k-2} \tag{5}$$

بما أننا فرضنا المعامل المسيطر a_n يخالف الصفر فيجب أن يكون :

---

(1) نفرض، طبعاً، أن التابع المجهول f يحقق الشروط اللازمة لقابلية الاشتقاق والتناقص عند اللانهاية.

$$\mu = -(2n+1)$$
$$a_{n-1} = 0$$

أي أن μ يجب أن يكون عدداً سالباً فردياً. تسمح العلاقة (5) بتعيين كل معاملات كثير الحدود w بتقدير عامل ثابت. بالإضافة إلى ذلك فإن المعاملات التي لها دليلات ذات زوجية تختلف عن زوجية n أي عن درجة w هي معاملات منعدمة؛ في حين ان المعاملات التي لها دليلات ذات زوجية تساوي زوجية n معاملات غير منعدمة. ونجد المعاملات الأخيرة بواسطة علاقة التدريج:

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4}\, a_k$$

(في حالة معرفة a_n). إذن نحصل على الدستور التالي:

$$w_n(x) = a_n\left(x^n - \frac{n(n-1)}{4}\, x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 8}\, x^{n-4} - \ldots\right)$$

وهكذا نكون قد أنشأنا جملة التوابع:

$$\varphi_n(x) = w_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

من الواضح أن كل تابع من هذه التوابع ينتمي إلى $L_2(-\infty, \infty)$ (وذلك بفضل تواجد العامل $e^{-\frac{x^2}{2}}$). بالإضافة إلى ذلك فإن هذه التوابع متعامدة مثنى مثنى. ذلك أن المعادلة (3) تعطي:

$$\varphi''_n(x) - x^2\varphi_n(x) = -(2n+1)\,\varphi_n(x)$$
$$\varphi''_m(x) - x^2\varphi_m(x) = -(2m+1)\,\varphi_m(x)$$

بضرب المساواة الأولى في φ_m والثانية في φ_n والبحث عن الفرق بينهما نحصل على

$$\varphi''_n\, \varphi_m - \varphi''_m\, \varphi_n = 2(n-m)\,\varphi_n\, \varphi_m$$

أو:

$$[\varphi'_n \varphi_m - \varphi'_m \varphi_n]' = 2(n-m)\varphi_n \varphi_m$$

إذا كان $m \neq n$ فإن مكاملة هذه المسـاواة تعطي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \frac{1}{2(n-m)} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'_n \varphi_m - \varphi'_m \varphi_n]'\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(n-m)} \left. \varphi'_n \varphi_m - \varphi'_m \varphi_n \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

وهكذا برهنا على التعامد .

إن كل عنصر φ_n من الجملة المتعامدة المحصل عليها كثير حدود درجته n مضروباً في $e^{-\frac{x^2}{2}}$. وبالتالي فإن عناصر هذه الجملة مطابقة ، بتقدير عوامل ثابتة ، لتوابع هيرميت التي أنشأناها ضمن 3§ من الفصل 7 وذلك بمعامدة المتتالية :

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ x\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \ldots, x^n\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \ldots$$

في الفضـاء $L_2(-\infty, \infty)$.

لنثبت الآن بأن المتتالية $\{\varphi_n\}$ توابع ذاتية لتحويل فوريي :

$$F\varphi_n = c_n\, \varphi_n \tag{6}$$

وهذا ناتج مما يلي :

1. المعادلة (3) لامتغيرة بالنسبة للتحويل F .

2. من أجل كل n ، تقبل المعادلة (3) ، بتقدير عامل ثابت ، حلاً وحيداً من الشكل $P_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ ، حيث P_n كثير حدود من الدرجة n .

3. يعطي تحويل فوريي المطبق على $x^n\, e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$\left(i\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} = Q_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

حيث Q_n كثير حدود من الدرجة n (يمكن بسهولة التأكد من هذه الخاصية وذلك بالتدريج).

من المساواة (6) ينتج من أجل كل k طبيعي أن:

$$F^k \varphi_n = c_n^k \varphi_n$$

ثم إن تحويل فوريي عند تطبيقه أربع مرات، يحول كل تابع إلى نفسه مضروباً في $4\pi^2$. إذن:

$$c_n^4 = 4\pi^2$$

أي أن c_n لايمكن أن يأخذ سوى القيم $\pm\sqrt{2\pi}$ وَ $\pm i\sqrt{2\pi}$.

وهكذا يتبين أن تحويل فوريي F في الفضاء $L_2(\infty, \infty)$ مؤثر خطي تمثله مصفوفة قطرية عناصرها القطرية من الشكل $\pm\sqrt{2\pi}$ وَ $i\sqrt{2\pi}$[1]، وذلك في الأساس المؤلف من توابع هيرميت.

6 §. تحويل لابلاس (Laplace)

1. تعريف لابلاس وخاصياته الأساسية. نلاحظ بخصوص تطبيق تحويل فوريي على المعادلات التفاضلية أنه يقتصر أساساً على التوابع القابلة للمكاملة على كل المستقيم العددي. بصفة خاصة فإن تحويل فوريي غير معرّف من أجل التوابع المتزايدة عندما $x \to \infty$، أو $x \to -\infty$، في حين أننا نجد هذه التوابع في كثير من الأحيان عند حل المعادلات التفاضلية. يمكن إزالة هذه الصعوبة بتعميم تحويل فوريي إلى التوزيعات؛ سندرس ذلك بإيجاز ضمن 8 § من هذا الفصل. هناك طريقة أخرى لا تخرج من إطار المفهوم التقليدي

(1) إذا عرفنا تحويل فوريي بالدستور: $F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\,dx$ (أي بالدستور (1′) الوارد في 4 § وليس بالدستور (1)) فإن رفعه إلى القوة 4 يعطي المؤثر المطابق وهكذا تصبح مصفوفة F القطرية ذات عناصر قطرية هي ± 1 وَ $\pm i$ في الأساس المؤلف من توابع هيرميت.

للتابع وتندرج في إطار الطرق التقليدية في التحليل، وهي تمثل في تعويض تحويل فوريي بتحويل ثان يسمى تحويل لابلاس.

ليكن f تابعاً (غير قابل للمكاملة على كل المستقيم العددي، عموماً) يصبح قابلاً للمكاملة عند ضربه في $e^{-\gamma x}$، حيث γ عدد حقيقي. عندئذٍ يكون التكامل:

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\lambda}\, e^{x\mu}\, dx$$

متقارباً من أجل قيم عقدية: $s = \lambda + i\mu$؛ بصفة خاصة فهو متقارب على المستقيم $\mu = -\gamma$. ذلك أن هذا التكامل يطابق تحويل فوريي للتابع $f(x)\, e^{x\mu}$ على هذا المستقيم.

من وجهة النظر التطبيقية فإن أهم حالة تكون فيها شروطنا حول قابلية التابع: $f(x)\, e^{-\gamma x}$ المكاملة محققة هي الحالة التي يكون فيها f محققاً للشرطين:

$$\begin{cases} |f(x)| < C\, e^{\gamma_0 x} & , x \geq 0 \\ f(x) = 0 & , x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

(حيث γ_0 وَ C ثابتان). إن التكامل:

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx \tag{2}$$

موجود من أجل كل المستقيم $s = \lambda + i\mu$ بحيث $\mu < -\gamma_0$، أي على نصف المستوى المحدود بالمستقيم: $Im\, s = -\gamma_0$؛ فهذا التكامل يمثل تحويل فوريي للتابع $f(x)\, e^{\mu x}$. ويمكن الحصول على التابع الأخير انطلاقاً من g بواسطة دستور القلب (نفرض أن f يحقق الشروط التي تجعل هذا الدستور قابلاً للتطبيق).

$$f(x)\, e^{\mu x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

ومنه :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} g(s)\, e^{isx}\, ds \qquad (s = \lambda + i\mu) \tag{3}$$

بما أن التابع $f(x)\, e^{\mu x}$ يتناقص من أجل $\mu < -\gamma$ مثل تابع أسي (وذلك بفضل (1)) فإن محولة فوريي g ، كما هو الحال لِـ: $g(s)\, e^{isx}$ ، تابع تحليلي على نصف المستوى $Im\, s < -\gamma_0$.

نجري الآن تبديلاً للمتغير في الدستورين (2) وَ (3) وهذا بوضع $p = is$ وبالرمز لِـ $g(s)$ بِـ $\Phi(p)$. فيأتي :

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx \tag{2'}$$

وَ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty} \Phi(p)\, e^{px} \cdot \frac{dp}{i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty} \Phi(p)\, e^{px}\, dp \tag{3'}$$

إن التابع Φ معرّف وتحليلي على نصف المستوى $\mathrm{Re}\, p > \gamma_0$ ؛ ويسمى محولة لابلاس للتابع f (الذي يحقق الشرط (1)) . ويسمى التطبيق المعرّف بالدستور (2') تحويل لابلاس .

إن تحويل لابلاس لايختلف كثيراً في خاصياته عن تحويل فوريي . إلاّ أن صنف التوابع التي يعرّف من أجلها تحويل لابلاس يختلف كثيراً عن $L_1(-\infty, \infty)$ ، الذي تقبل عناصره محولات لفوريي .

2. تطبيق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية (الطريقة المؤثرية) .

يمكن تطبيق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية . لنعتبر معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة :

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n\, y = b(x) \tag{4}$$

ونبحث عن حل لها يحقق الشروط الابتدائية :

$$y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_1, \ \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \tag{5}$$

نطبق من أجل هذا الغرض، على المعادلة (4)، تحويل لابلاس[1] أي أننا نضرب هذه المعادلة في e^{-px} ونكاملها من 0 إلى ∞. ليكن :

$$Y(p) = \int_0^\infty y(x)\, e^{-px}\, dx$$

محولة لابلاس لِـ y. بالمكاملة بالتجزئة نحصل على محولة لابلاس لمشتقه y'.

$$\int_0^\infty y'(x)\, e^{-px}\, dx = y(x)\, e^{-px} \Big]_0^\infty + p \int_0^\infty y(x)\, e^{-px}\, dx = pY(p) - y_0$$

بتطبيق هذا الدستور بصفة متوالية نحصل على :

$$\int_0^\infty y^{(n)}(x)\, e^{-px}\, dx = p(p^{n-1}\, Y(p) - y_{n-2} - py_{n-3} - \dots - p^{n-2}y_0) - y_{n-1} =$$

$$= p^n \ Y(p) - y_{n-1} - py_{n-2} - \dots - p^{n-1}y_0 = p^n\, Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k}\, y_k$$

ليكن أخيراً :

$$B(p) = \int_0^\infty b(x)\, e^{-px}\, dx$$

وهكذا نجد أن المعادلة التفاضلية (4) (بمراعاة الشروط الإبتدائية (5)) وقد عُوضت، بفضل تحويل لابلاس، بالمعادلة الجبرية :

$$Q(p) + R(p)\ Y(p) = B(p)$$

حيث B تمثل محولة لابلاس لِـ b وَ Q كثير حدود من الدرجة $n - 1$ في p يتعلق بمعاملات المعادلة (4) وبالشروط الابتدائية. أخيراً يمثل :

(1) من السهل أن نثبت بأن تطبيق هذا التحويل على المعادلة (4) مسموح به إذا كان $|b(x)|$ لا يتزايد بسرعة كبيرة جداً.

$$R = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} p^k \quad , \quad a_0 = 1$$

كثير الحدود المميز للمعادلة (4).

من المعادلة المحصل عليها يأتي:

$$Y(p) = \frac{B(p) - Q(p)}{R(p)}$$

نحصل على الحل y من المساواة السابقة بواسطة دستور القلب:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mu - i\infty}^{-\mu + i\infty} \frac{B(p) - Q(p)}{R(p)} e^{px} \, dp$$

نحسب عادة هذا التكامل بواسطة نظرية الرواسب.

هناك طريقة معروفة لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة هي الطريقة المؤثرية. وتتمثل هذه الطريقة في اعتبار الطرف الأول للمعادلة:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(x)$$

كصورة للتابع المجهول y بواسطة المؤثر:

$$A\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n \tag{6}$$

ونعتبر حينئذٍ حل المعادلة كصورة للطرف الثاني لهذه المعادلة، بواسطة المؤثر المقلوب للمؤثر (6). يمكن بالحساب المباشر تعيين صورة التوابع البسيطة بواسطة مثل هذا المؤثر، كالتوابع المثلثية والتابع الأسي وتابع القوة وعباراتها. يسمح ذلك بالحصول على حل معادلة خطية ذات معاملات ثابتة بسهولة تامة في الحالة التي يكون فيها الطرف الثاني عبارة من تلك التوابع. من الواضح أن الطريقة المؤثرية تمثل في الحقيقة تطبيق تحويل لابلاس بشكل ضمني (وينشئ هذا التحويل صلة بين جبر المؤثرات التفاضلية ذات الشكل

(6) وجبر كثيرات الحدود) . نستطيع اعتبار ذلك تبريراً لهذه الطريقة التي تُطَبَّق عادة بصفة تلقائية في الـكتابات التقنية .

7 § تحويل فوريـي - ستيلجاس

1. تعريف تحويل فوريي - ستيلجاس. نرجع إلى تحويل فوريي في الفضـاء $L_1(-\infty, \infty)$:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\, dx$$

يمكن كتابة هذا الدستور على شكل تكامل ريمان - ستيلجاس :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x})\, dF(x) \tag{1}$$

حيث :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

تـابع مستمر مطلقاً وذو تغيّر محـدود (يسـاوي $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$) على كـل المستقيم العددي . لكن التكامل (1) له معنى ليس فحسب من أجل التوابع ذات الشكل (2) بل أيضـاً من أجل كل التوابع ذات التغير المحدود على كل المستقيم العددي . يسمى التكامل :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, dF(x)$$

حيث F تـابع كيفي ذو تغّير محـدود على المستقيم العـددي ، يسمى محولة فوريي - ستيلجاس للتابع F ؛ ويسمى التطبيق الذي تعرفه هذه المحولة تحويل فوريي - ستيلجاس . يتمتع هذا التحويل ببعض الخاصيات التي سبق لنا عرضها من خلال دراسة تحويل فوريي ، مثلاً : التابع g المعرّف بالتكامل (1) مستمر ومحدود على كل المستقيم العددي . ذلك أن :

$$|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)| \leq \int_{-N}^{N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}| \cdot \mathrm{d}F(x) +$$

$$+ \int_{|x|>N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}| \, \mathrm{d}F(x)$$

نستطيع ردّ الحد الثاني من الطرف الثاني صغيراً بصفة اختيارية (وذلك من أجل λ_1 وَ λ_2 كيفيين) بأخذ N كبيراً بكفاية ؛ أما الحد الأول فهو يؤول إلى الصفر عندما $\lambda_1 - \lambda_2 \to 0$ وهذا من أجل N مثبت .

ورغم ذلك فإن بعض الخاصيات التي يتمتع بها تحويل فوريي غير قائمة بالنسبة لتحويل فوريي – ستيلجاس . من بين هذه الخاصيات نجد أن محولة فوريي – ستيلجاس لتابع F لايؤول حتماً إلى 0 عندما $|\lambda| \to \infty$. نضع مثلاً :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \leq 0 \\ 1 \ , \ x > 0 \end{cases}$$

عندئذٍ :

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \, \mathrm{d}F(x) = 1$$

كما أن محولة فوريي – ستيلجاس لتابع يساوي 0 من أجل $x \leq x_0$ ويساوي 1 من أجل $x > x_0$ ، هي $e^{ix_0\lambda}$ أي أنها تابع لِـ λ دوري . إذا كان F تابع قفزات نقاط تقطعه :

$$n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \dots$$

وقيم قفزاته عند هذه النقاط هي :

$$\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \qquad \left(\sum_n |a_n| < \infty\right)$$

فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \, \mathrm{d}F(x) = \sum_n a_n \, e^{-in\lambda}$$

تابع دوري دورته 2π. إذا كانت القفزات a_n لِـ F عند النقاط x_n تشكل متتالية كيفية من الأعداد (لاقياسية عموماً) فإن محوّلة فوريي – ستيلجاس لِـ F تكتب على الشكل :

$$\sum_{n} a_n e^{-ix_n\lambda}$$

تنتمي هذه التوابع إلى صنف التوابع المسماة شبه الدورية .

2. تطبيقات تحويل فوريي - ستيلجاس في نظرية الاحتمالات . أدخلنا في 4 § بخصوص التوابع القابلة للمكاملة على $(-\infty, \infty)$ مفهوم التزويج :

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi) f_2(\xi) \, d\xi \tag{3}$$

نضع :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt \ , \ F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t) \, dt \ , \ F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(t) \, dt$$

بمكاملة المساواة (3) نكتبها على الشكل :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\xi) f_2(\xi) \, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x} f_1(t-\xi) \, dt \right\} f_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi) \, d F_2(\xi)$$

(يمكن هنا تبديل رمزيْ المكاملة بفضل نظرية فوبيني ولأن التابع f يقبل المكاملة مطلقاً) .

إن العلاقة المحصل عليها بهذه الطريقة :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi) \, d F_2(\xi)$$

تلحق بالتابعين F_1 وَ F_2 التابع F . لكن التكامل الظاهر في الطرف الثاني هنا موجود بصفته تكاملاً للوبيغ - ستيلجاس ، ليس من أجل التوابع المستمرة مطلقاً فحسب بل أيضاً من أجل كل تابعين تغيرهما محدود على كل المستقيم العددي . تسمى العبارة :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi) \, d F_2(\xi) \tag{4}$$

حيث F_1 وَ F_2 تابعان كيفيان تغيرهما محدود على المستقيم العددي، نسمي (جداء) تزويج هذين التابعين ونرمز له بـ $F_1 * F_2$. لنثبث بأن العبارة (4) تابع معرّف من أجل كل قيم x وأن تغيّره محدود على كل المستقيم العددي[1].

ذلك أن F_1 تابع تغيره محدود، إذن فهو يقبل القياس بمفهوم بوريل؛ وبالتالي فإن التكامل (4) موجود من أجل كل x. لدينا إذن:

$$\left|F(x_1) - F(x_2)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(F_1(x_1 - \xi) - F_1(x_2 - \xi)\right) d F_2(\xi)\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|F_1(x_1 - \xi) - F_1(x_2 - \xi)\right| d \left(\text{var } F_2(\xi)\right)$$

ومنه يأتي:

$$V[F] \leq V[F_1] \cdot V[F_2]$$

وهذا يعني أن F تابع تغيّره محدود.

نظرية 1. إذا كان F هو جداء تزويج التابعين F_1 وَ F_2 وكان تغيّر F_1 وَ F_2 محدود، نرمز بـ g، g_1، g_2 لمحولات فوريي - ستيلجاس لـ F، F_1، F_2 على التوالي، عندئذ:

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)\, g_2(\lambda)$$

البرهان. ليكن $F = F_1 * F_2$ ولتكن:

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$$

تجزئة للمستقيم $[a, b]$. حينئذٍ من أجل كل λ نجد أن:

$$\int_a^b e^{-i\lambda x} \, d F(x) = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda x_k} \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right) =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda(x_k - \xi)} \left(F_1(x_k - \xi) - F_1(x_{k-1} - \xi)\right) e^{-i\lambda\xi} \, d F_2(\xi)$$

(1) يعرض كتاب غليفنكو «تكامل ستيلجاس» V. I. GLIVENKO
«Intégrale de Stieltjes», Gostehizdat, 1936
انشاء بسيطاً يسمح بإعطاء معنى للدستور (4) وذلك دون استخدام مفهوم القياس.

أي :

$$\int_a^b e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a-\xi}^{b-\xi} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}F_1(x)\right\} e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}F_2(\xi)$$

ننتقل من هذه المساواة إلى النهاية $a \to -\infty$ وَ $b \to \infty$ فنحصل على :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}F_1(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi}\,\mathrm{d}F_2(\xi)$$

أي :

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)\cdot g_2(\lambda)$$

إن النظرية القائلة بأن تحويل فوريي - ستيلجاس يعوض جداء تزويج تابعين بجدائهما كثير الاستعمال في نظرية الاحتمالات (طريقة التوابع المميزة) . إذا كان ξ وَη متغيرين عشوائيين مستقلين وكان F_1 وَ F_2 تابعيْ توزعهما، فإن تابع التوزع الموافق لِـ$\eta + \xi$ هو :

$$F = F_1 * F_2$$

إن اعتبار مجاميع متغيرات عشوائية مستقلة كثيراً ما يكون ضرورياً في نظرية الاحتمالات. يسمح الانتقال من توابع التوزع إلى محولات فوريي - ستيلجاس لهذه التوابع التي تسمى أيضاً التوابع المميزة، بتعويض عملية التزويج بعملية أبسط منها وهي عملية الضرب.

تمارين . 1. برهن على أن تحويل فوريي -ستيلجاس يتمتع بخاصية الوحدانية : إذا كان التابع F مستمراً من اليسار ومحولة فوريي - ستيلجاس لِـF منعدماً فإن F تابع ثابت.

2. أثبت أن عملية تزويج التوابع ذات التغير المحدود عملية تبديلية وتجميعية.

§ 8. تحويل فوريـي للتوزيعات

كنا لاحظنا أن تطبيق تحويل فوريي بالمفهوم المعتاد في حل المعادلات التفاضلية وفي بعض المسـائل الأخرى محدود لأن هذا التحويل معرّف فقط من أجل التوابع القابلة للمكاملة على كل المستقيم العددي. يمكن توسيع تطبيق تحويل فوريي بصفة معتبرة بإدخال مفهوم تحويل فوريي للتوزيعات. نعرض هنا الأفكار الرئيسية لمثل هذا الإنشـاء.

نعتبر من جديد الفضـاء S_∞ المؤلف من التوابع القابلة للإشتقاق لا نهائياً على كل المستقيم العددي والمتناقصة مع مشتقاتها عند اللانهاية بسرعة تفوق سرعة كل قوة لِـ$\frac{1}{|x|}$ وكذا مشتقاتها (راجع § 4، الفصل 4).

بأخذ الفضـاء S_∞ كفضـاء توابع الأسـاس، نعتبر فضـاء التوزيعات S^*_∞ الموافق لِـ S_∞.

نعرف الآن تحويل فوريي في الفضـاء S^*_∞. نذكر بهذا الصدد في البداية بأن تحويل فوريي بالمفهوم المعتاد يطبق S_∞ في نفسه: إذا كان $\varphi \in S_\infty$ فإن $F[\varphi] \in S_\infty$، زيادة على ذلك فإن F تطبيق تقابلي من الفضـاء S_∞ على نفسه. ندخل بعد ذلك التعريف التالي:

تحويل فوريي توزيع $f \in S^*_\infty$ هو تعريفاً التابعية الخطية $g \in S^*_\infty$ المعرفة بالدستور:

$$(g, \psi) = 2\pi(f, \varphi) \tag{1}$$

حيث $\psi = F[\varphi]$.

يمكن كتابة هذا الدستور أيضـاً على النحو:

$$(Ff, \psi) = 2\pi(f, \varphi) = 2\pi(f, F^{-1}\psi)$$

وبالتالي فإن محولة فوريي لتابعية $f \in S^*_\infty$ هي تابعية قيمتها من أجل كل عنصر $\psi \in S_\infty$ هي قيمة التابعية f (مضروبة في 2π) من أجل العنصر $\varphi = F^{-1}\psi$ حيث يمثل F^{-1} مقلوب تحويل فوريي.

بما أن $\psi = F[\varphi]$ يرسم الفضـاء S_∞ بأكمله عندما يرسم φ الفضـاء S_∞ فإن المسـاواة (1) تعرّف بالفعل تابعية على الفضـاء S_∞ بأكمله. أما خاصية الخطية والاستمرار لهذه التابعية فنتأكد منها بسهولة.

من بين عناصر S_∞^* نجد كل التوابع القابلة للمكاملة مطلقاً. بخصوص هذه التوابع فإن مفهوم محولة فوريي الوارد في التعريف أعلاه يطابق التعريف المقدم سـابقاً. ذلك أنه إذا كان $f \in S_\infty$ وَ $\varphi \in S_\infty$ وَ $g = F[f]$ وَ $\psi = F[\varphi]$ فإن نظرية بلونشرال تعطي:

$$2\pi(f, \varphi) = (g, \psi) \tag{2}$$

إضـافة إلى ذلك، من أجل f معطى يوجد (بتقدير تكافؤ) تابع وحيد g يحقق هذه المسـاواة مِن أجل كل $\varphi \in S_\infty$. بالانتقال إلى النهاية نتأكد بسهولة من أن المسـاواة (2) محققة من أجل كل تابع $f \in L_1(-\infty, \infty)$. وهكذا فإن تحويل فوريي للتوزيعات عبارة عن تعميم للمفهوم التقليدي الموافق لصفـ سع من العناصر.

أمثلة. 1. ليكن $f(x) = c =$ ثابتاً. عندئذٍ:

$$2\pi(f, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c\,\varphi(x)\,dx = 2\pi c\,\psi(0) \qquad (\psi = F[\varphi])$$

أي أن محولة فوريي لثابت تسـاوي هذا الثابت مضروباً في 2π وفي التابع δ.

2. ليكن $f(x) = e^{iax}$. عندئذٍ:

$$2\pi(f, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax}\,\varphi(x)\,dx = 2\pi\,\varphi(-a)$$

أي أن محولة فوريي لِـ e^{iax} هو التابع δ المسحوب $\delta(x+a)$ مضروباً في 2π.

3. ليكن $f(x) = x^2$. بوضع: $x = 0$ في المسـاواة:

$$\psi''(\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

وبضربها في 2π، نحصل على:

$$2\pi\left(x^2, \varphi(x)\right) = -2\pi\,\psi''(0)$$

وبالتالي فإن محولة فوريي لـx^2 تساوي المشتق الثاني للتابع δ مضروباً في -2π.

نقدم في الختام الملاحظات التالية:

عرّفنا تحويل فوريي للتوزيعات على S_∞. ورغم هذا يمكننا أخذ فضاء آخر كفضاء أساس، مثلاً الفضاء K المؤلف من التوابع القابلة للإشتقاق ذات الحوامل المحدودة. من أجل كل تابع $\varphi \in K$ فإن محولة فوريي (بالمفهوم المعتاد) موجودة، وهي (نتأكد من ذلك بسهولة) تابع تحليلي صحيح ذو تزايد أسي. بعبارة أدق، فإن تحويل فوريي مؤثر خطي يطبق الفضاء K في الفضاء Z المؤلف من التوابع التحليلية الصحيحة ψ التي تحقق المتراجحات:

$$|s|^q \cdot |\psi(s)| \leq C_q \cdot e^{a|\tau|} \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

حيث $\tau = \operatorname{Im} s$، C_q وَ a ثوابت تتعلق بِـψ. ندخل كما هو الحال في الفضاء K مفهوم التقارب، يعرّف التطبيق F من K في Z مفهوم تقارب في Z: تكون متتالية $\{\psi_n\}$ متقاربة في Z نحو ψ إذا كانت العلاقة $\varphi_n \to \varphi$ محققة من أجل الصور العكسية الموافقة لتلك التوابع. بإمكاننا عرض مفهوم هذا التقارب بشكل أبسط وذلك دون اللجوء إلى الفضاء K[1].

ليكن الآن f عنصراً كيفياً من K^*. نلحق به تابعية خطية g على Z بوضع:

$$(g, \psi) = 2\pi(f, \varphi)$$

حيث $\psi = F[\varphi]$.

---

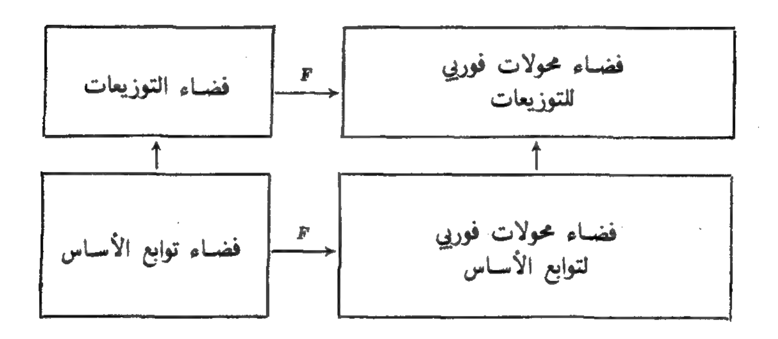
(1) بعبارة أدق: تكون $\psi_n \to 0$ في Z إذا تحققت، من أجل C_q $(q = 1, 2, \ldots)$ وَ a مثبتاً، المتراجحات:

$$|s^q\, \psi_n(s)| \leq C_q\, e^{a|\tau|}$$

وإذا آلت ψ_n إلى 0 بانتظام على كل مجال منته من المحور الحقيقي.

تُسمى التابعية g محولة فوريي للتابعية f. وهكذا فإن محولة فوريي لتوزيع f على فضاء الأساس K توزيع على Z، أي على فضاء الصور في K بواسطة تحويل فوريي بالمفهوم المعتاد.

نشير إلى أن نفس الإنشاء يبقى صالحاً أيضاً من أجل توزيعات على فضاءات أخرى من توابع الأساس. ونحصل في جميع الأحوال على رسم فيه أربعة فضاءات وهي: الفضاء الابتدائي المؤلف من توابع الأساس، ثم مجموعة محولات فوريي لهذه التوابع (أي فضاء ثانٍ مؤلف من توابع الأساس) وأخيراً فضاءين ثنويين:



إذا اعتبرنا S_∞ كفضاء أساس، يصبح الرسم السابق مكوناً من فضاءين فقط، لأن تحويل فوريي يطبق الفضاء S_∞ على نفسه.

نشير إلى أن تحويل فوريي للتوزيعات كثير الاستعمال في نظرية المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية. يمكن للقارئ أن يرجع بهذا الخصوص إلى كتاب[1] ج.ا.شيلوف [52] (Chilov).

(1) يترجم هذا الكتاب حالياً إلى العربية من طرف ديوان المطبوعات الجامعية بالجزائر. (المترجم)

الفصل التاسع

المعادلات التكاملية الخطية

§ 1. التعاريف الرئيسية . بعض المسائل المؤدية إلى المعادلات التكاملية .

1. أنواع المعادلات التكاملية .

نقول عن معادلة إنها معادلة تكاملية إذا كانت تحوي التابع المجهول تحت رمز المكاملة ، كالمعادلة التالية مثلاً :

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(s) \tag{1}$$

حيث f وَ K تابعان مستمران وَ φ هو التابع المجهول . أما المتغير s وَ t فيرسمان هنا القطعة المستقيمة المعطاة $[a, b]$.

تمتاز المعادلة (1) بخاصية : إنها خطية بالنسبة للتابع المجهول φ . هناك العديد من المسائل التي تؤدي إلى معادلات تكاملية غير خطية مثل المعادلات ذات الشكل :

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(\varphi(t), t)\mathrm{d}t$$

حيث K وَ g تابعان معطيان . ورغم ذلك فإننا سنقتصر في المستقبل على دراسة المعادلات التكاملية الخطية .

سبق وأن اعتبرت بعض المعادلات التكاملية في بداية القرن الماضي . وهكذا اعتبر آبل (Abel) المعادلة التالية التي تحمل اسمه :

$$f(s) = \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}\mathrm{d}t \ , (0 < \alpha < 1, f(0) = 0)$$

وحدث ذلك سنة 1823 . التابع f في هذه المعادلة معطى، أما φ فهو التابع المجهول . أثبت آبل أن حل هذه المعادلة هو :

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi a}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

إلّا أن نظرية المعادلات التكاملية الخطية لم تشيد إلّا في أواخر القرن الماضي وبداية هذا القرن، وتم ذلك أساساً بفضل أعمال فولتيرا وفريدولم وهيلبرت .

تُسمى المعادلة (1) معادلة فريدولم من النوع الثاني (راجع الفصل 2، §4، 4) ؛ وتُسمى المعادلة :

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt + f(s) = 0 \tag{2}$$

(التي تحوي التابع المجهول φ فقط تحت رمز المكاملة) معادلة فريدولم من النوع الأول .

أما معادلة آبل الوارد ذكرها أعلاه فهي معادلة من معادلات فولتيرا (Volterra) ؛ والشكل العام لهذه المعادلات هو :

$$\int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{3}$$

(معادلة فولتيرا من النوع الأول) أو :

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s,t)\,\varphi(t)dt + f(s) \tag{4}$$

(معادلة فولتيرا من النوع الثاني) . من الواضح انه يمكن اعتبار معادلة فولتيرا بمثابة معادلة فريدولم حيث نفرض على التابع K الشرط :

$$K(s,t) = 0 \ , \ \forall\, t > s$$

لكنه من الأفضل أن نضع معادلات فولتيرا في صنف خاص من المعادلات لأنها تتمتع بخاصيات لا تتوفر في معادلات كيفية من نوع فريدولم .

إذا كان التابع f منعدماً في المعادلات (1) أو (2) أو (3) نقول عندئذٍ أن المعادلة متجانسة. وإذا كان الأمر غير ذلك نقول أن المعادلة غير متجانسة.

2. أمثلة لبعض المسائل المؤدية إلى معادلات تكاملية.

نُقدم في الفقرات الموالية من هذا الفصل الخاصيات الأساسية للمعادلات التكاملية، أما الآن فنعتبر بعض المسائل التي تؤدي إلى مثل هذه المعادلات.

1. توازن وتر مثقل. نعتبر وتراً (أي خيطاً) قابلاً للتمديد والالتواء طوله l، يواجه كل ثقل بمقاومة متناسبة مع قيمة هذا الثقل. نفرض أن حدي هذا الوتر مثبتان في النقطتين $x = 0$ وَ $x = l$. حينئذٍ يكون الوتر في حالة توازنه مطابقاً للقطعة المستقيمة $0 \leq x \leq l$ من المحور x. نفرض الآن أن الوتر خاضع لقوة $P = P_\xi$ شاقولية عند النقطة $x = \xi$. وبالتالي ينحرف الوتر عن موقع توازنه بحكم وجود هذه القوة ويصبح شكله، بطبيعة الحال، شكل خط منكسر (أنظر الرسم 23).

لنبحث عن الانحراف δ لهذا الوتر عند النقطة ξ تحت تأثير القوة P_ξ. إذا كانت القوة P_ξ صغيرة بالنسبة للإشتداد T_0 للوتر غير المثقل فإن اشتداد الوتر المثقل يمكن افتراضه مساوياً أيضاً لِـT_0. نحصل عندئذٍ انطلاقاً من شرط توازن الوتر، على:

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l - \xi} = P_\xi$$

ومنه:

$$\delta = \frac{(l - \xi)\xi}{T_0\, l} P_\xi$$

نرمز بِـ$u(x)$ لانحراف الوتر عند نقطة كيفية x تحت تأثير القوة P_ξ. أي أن:

$$u(x) = P_\xi \,.\, G(x, \xi)$$

حيث :

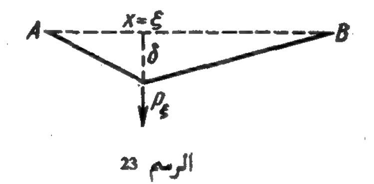
$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x(l-\xi)}{T_0\, l}, & 0\le x\le \xi\\[2mm] \dfrac{(l-x)\xi}{T_0\, l}, & \xi\le x\le l\end{cases}$$

ومنه نرى مباشرة أن $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

نفرض الآن بأن الوتر خاضع لقوة موزعة بانتظام على طول الوتر بكثافة $P(\xi)$. إذا كانت هذه القوة صغيرة فإن تغيّر شكل الوتر تتعلق، هنا أيضاً، خطياً بالقوة التي يخضع لها الوتر، أما الشكل الذي يأخذه الوتر المثقل فيُعينه التابع :

$$u(x)=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi \tag{5}$$

إذن، إذا كانت القوة التي يخضع لها الوتر معروفة، يسمح الدستور (5) بتعيين الشكل الذي يأخذه الوتر تحت تأثير هذه القوة.



الرسم 23

نعتبر الآن المسألة العكسية : عيّن توزيع الثقل p الذي يجعل الوتر يأخذ الشكل المعطى u . نرى في هذه الحالة ان لدينا معادلة لا تختلف إلاّ في الرموز عن المعادلة (2) أي معادلة تكاملية لفريدولم من النوع الأول، وبها يتم تعيين p انطلاقاً من معرفة u .

2. التذبذب الحر والتذبذب المقيّد للوتر. نفرض الآن أن الوتر في حالة تذبذب كيفي. ليكن $u(x,t)$ موقع نقطة الوتر التي فاصلتها x في اللحظة t ، ولتكن ϱ الكثافة الخطية للوتر[1]. إن قوة القصور التي يخضع لها عنصر dx من الوتر تساوي :

(1) نفرض ϱ ثابتة رغم ان ذلك ليس ذا أهمية فيما سيأتي.

$$-\frac{\partial^2 u\ (x, t)}{\partial t^2} \varrho\, dx$$

إذن :

$$p(\xi) = -\frac{\partial^2 u\ (\xi, t)}{\partial t^2} \varrho$$

نعوض $p(\xi)$ بعبارتها السابقة في الدستور (5) فنجد :

$$u(x, t) = -\int_0^l G(x, \xi)\, \varrho\, \frac{\partial^2 u\ (\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \tag{6}$$

لنفرض أن الوتر ينتج تذبذبات توافقية ترددها ω ثابت وسعتها $u(x)$ متعلقة بـ x . أي ليكن :

$$u(x, t) = u(x) \sin \omega t$$

بنقل هذه العبارة إلى (6) وبعد اختصار $\sin \omega t$ نحصل من أجل u على المعادلة التكاملية التالية :

$$u(x) = \varrho\, \omega^2 \int_0^l G(x, \xi)\, u(\xi) d\xi \tag{7}$$

إذا تدخلت قوة خارجية جعلت تذبذب الوتر غير حرّ فإن معادلة التذبذبات التوافقية للوتر تأخذ، كما يثبت ذلك الحساب، الشكل الموالي :

$$u(x) = \varrho\, \omega^2 \int_0^l G(x, \xi)\, u(\xi) d\xi + f(x)$$

وهذه معادلة لفريدولم غير متجانسة ومن النوع الثاني .

3. رَدّ معادلة تفاضلية إلى معادلة تكاملية . يُفضّل أحياناً ردّ حل معادلة تفاضلية إلى حل معادلة تكاملية . فقد رأينا (الفصل 2) مثلاً ان البرهان على وجود ووحدانية حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x, y)$$

مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ قد أدى بنا إلى اعتبار المعادلة التكاملية (غير الخطية) :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y) d\xi$$

نُلاحظ ان هذا الردّ يُمكن القيام به أيضاً في المعادلات التفاضلية التي لها رتب أكبر من واحد. نعتبر مثلاً المعادلة ذات الدرجة الثانية :

$$y'' + f(x)y = 0$$

بوضع : $f(x) = \varrho^2 - \delta(x)$ حيث ϱ ثابت تصبح المعادلة على الشكل :

$$y'' + \varrho^2 . y = \delta(x)y \tag{8}$$

نحن نعلم أن حل المعادلة :

$$y'' + \varrho^2 y = g(x)$$

يُمكن أن يكتب على النحو :

$$y(x) = \cos \varrho(x - a) + \frac{1}{\varrho}\int_a^x \sin \varrho(x - \xi) g(\xi) d\xi$$

وبالتالي فإن البحث عن حل المعادلة (8) يرجع إلى البحث عن المعادلة التكاملية :

$$y(x) - \frac{1}{\varrho}\int_a^x \delta(\xi) \sin \varrho(x - \xi)\, y(\xi) d\xi = \cos \varrho(x - a)$$

§ 2. معادلات فريدولم التكاملية

1. مؤثر فريدولم التكاملي.

ندرس في هذه الفقرة معادلات فريدولم من نوع الثاني، أي المعادلات ذات الشكل :

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t) dt + f(s) \tag{1}$$

نلاحظ أن كل التوابع المعتبرة هنا والتي سنعتبرها مستقبلاً هي عموماً ذات

قيم عقدية. نفرض ان التابع K المسمى نواة المعادلة تابع قابل للقياس وينتمي إلى L_2 على المربع $a \leq s, t \leq b$:

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt < \infty \tag{2}$$

نعتبر في المعادلة (1) أن التابع f معطى و φ تابع مجهول، وان كليهما ينتميان إلى $L_2[a, b]$. تسمى النوى المنتمية إلى الصف L_2 نوى هيلبرت - شميت Hilbert – Schmidt .

نلحق بالمعادلة (1) المؤثر A المعرف بالمساواة:

$$A \varphi = \psi$$

التي تمثل المعادلة:

$$\int_a^b K(s, t) \; \varphi(t) dt = \psi(s) \tag{3}$$

يسمى كل مؤثر من الشكل (3) مؤثر فريدولم. إذا حققت النواة $K(s, t)$ ، زيادة على ذلك، الشرط (2) فإن A يسمى مؤثر هيلبرت - شميت. من الواضح ان دراسة المعادلة (1) تتمثل في دراسة خاصيات هذا المؤثر.

نظرية 1. تعرف المساواة (3)، حيث $K(s, t)$ تابع مربعه يقبل المكاملة، في الفضاء $L_2[a, b]$ مؤثراً خطياً متراصاً A نظيمه يحقق المتراجحة:

$$\|A\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt} \tag{4}$$

البرهان. نلاحظ في البداية أن التكامل:

$$\int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt$$

موجود من أجل كل s تقريباً بفضل نظرية فوبيني والشرط (2). بعبارة أخرى فإن $K(s, t)$، بصفته تابعاً لِـ t ، ينتمي من أجل كل s تقريباً إلى $L_2[a, b]$. بما أن جداء تابعين من L_2 تابع يقبل المكاملة فإن تكامل الطرف

الأيسر من (3) موجود من أجل كل s تقريباً، أي أن التابع ψ معرّف اينما كان تقريباً. لنثبت أن $\psi \in L_2[a, b]$. بفضل متراجحة كوشي - بونياكوفسكي لدينا، من أجل كل s تقريباً:

$$|\psi(s)|^2 = |\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t|^2 \leq \int_a^b |K(s, t)|^2\,\mathrm{d}t \int_a^b |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t =$$

$$= \|\varphi\|^2 \cdot \int_a^b |K(s, t)|^2\,\mathrm{d}t$$

بالمكاملة بالنسبة لِـ s وبتعويض التكامل المكرر لِـ: $|K(s, t)|^2$ بالتكامل المضاعف مرتين نحصل على المتراجحة:

$$\|A\varphi\|^2 = \int_a^b |\psi(s)|^2\,\mathrm{d}s \;\leq\; \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

التي تضمن في آن واحد قابلية المكاملة لِـ $|\psi(s)|^2$ والمتراجحة (4) الخاصة بنظيم المؤثر A . يبقى أن نبين بأن A مؤثر متراص. لتكن $\{\psi_n\}$ جملة متعامدة وتامة في $L_2[a, b]$. حينئذٍ تشكل مجموعة الجداءات $\psi_m(s)\psi_n(t)$ جملة تامة في الفضاء $L_2([a, b] \times [a, b])$ وبالتالي يكتب $K(s, t)$ على النحو:

$$K(s, t) = \sum_{m, n = 1}^{\infty} a_{mn}\,\psi_n(s)\,\psi_n(t)$$

نضع الآن:

$$K_N(s, t) = \sum_{m, n = 1}^{N} a_{mn}\,\psi_n(s)\,\psi_n(t)$$

وليكن A_N المؤثر المعرّف بالنواة $K_N(s, t)$. إن هذا المؤثر متراص لأنه يطبق الفضاء $L_2[a, b]$ بأكمله على فضاء جزئي بعده منته (سميت هذه المؤثرات في الفصل 4 المؤثرات ذات البعد المنتهي). لرؤية ذلك نعتبر تابعاً ψ من $L_2[a, b]$. عندئذٍ:

$$A_N\,\varphi = \int_a^b K_N(s, t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t = \sum_{m, n = 1}^{N} a_{mn}\,\psi_m(s) \int_a^b \varphi(t)\,\psi_n(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{m = 1}^{N} \psi_m(s) \sum_{n = 1}^{N} a_{mn}\;b_n$$

حيث :

$$b_n = \int_a^b \varphi(t) \psi_n(t) \mathrm{d}t$$

أي ان كل عنصر $\varphi \in L_2[a, b]$ يتحول بواسطة المؤثر A_N إلى عنصر من الفضاء الجزئي ذي البعد المنتهي المولد عن الأشعة $\psi_1, ..., \psi_N$. من جهة أخرى فإن $K_N(s, t)$ مجموع جزئي لسلسلة فوريي للتابع $K(s, t)$ ؛ ولذا :

$$\int_a^b \int_a^b \left(K(s, t) - K_N(s, t)\right)^2 \to 0$$

عندما يؤول N إلى ∞ . بتطبيق المتراجحة (4) على المؤثر $A - A_N$ ينتج :

$$\|A - A_N\| \to 0$$

عندما : $N \to \infty$.

ثم بفضل النظرية القائلة أن نهاية متتالية متقاربة من المؤثرات المتراصة تساوي مؤثراً متراصاً نستنتج أن المؤثر A متراص. انتهى برهان النظرية.

ملاحظة. 1. أثبتنا خلال البرهان السابق أنه يمكن اعتبار كل مؤثر لهيلبرت – شميت نهاية (بمفهوم التقارب بالنظيم) متتالية مؤثرات تكاملية ابعادها منتهية.

2. ليكن A_1 وَ A_2 مؤثرين من الشكل (3)، وليكن $K_1(s, t)$ وَ $K_2(s, t)$ النواتين الموافقتين لهما. إذا كان المؤثران A_1 وَ A_2 متساويين أي إذا كان $A_1 \varphi = A_2 \varphi$ من أجل كل $\varphi \in L_2[a, b]$ ، فإن :

$K_1(s, t) = K_2(s, t)$ اينما كان تقريباً. ذلك أنه إذا كان :

$$A_1 \varphi - A_2 \varphi - \int_a^b \left(K_1(s, t) - K_2(s, t)\right) \varphi(t) \mathrm{d}t = 0$$

من أجل كل $\varphi \in L_2[a, b]$ ، فإن لدينا :

$$\int_a^b |K_1(s, t) - K_2(s, t)|^2 \mathrm{d}t = 0$$

وهذا من أجل كل $s \ni [a, b]$ تقريباً. إذن:

$$\int_a^b \int_a^b |K_1(s,t) - K_2(s,t)|^2 \, ds \, dt = 0$$

ومنه يأتي تأكيدنا السابق. وبالتالي إذا لم نفرق، كالمعتاد، بين تابعين متكافئين قابلين للمكاملة فإنه يُمكننا القول بأن الصلة بين المؤثرات التكاملية والنوى تطبيق تقابلي.

نظرية 2. ليكن A مؤثراً لهيلبرت - شميت معرّفاً بالنواة $K(s, t)$. عندئذٍ يكون قرينه A^* معرفاً بالنواة «القرينة» $\overline{K(t, s)}$.

البرهان. باستخدام نظرية فوبيني نحصل على:

$$(Af, g) = \int_a^b \left\{\int_a^b K(s,t) f(t) dt\right\} \overline{g(s)} ds =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(s,t) f(t) \overline{g(s)} dt \, ds = \int_a^b \left\{\int_a^b K(s,t) \overline{g(s)} ds\right\} f(t) dt =$$

$$= \int_a^b f(t) \left\{\int_a^b \overline{\overline{K(s,t)} g(s) ds}\right\} dt$$

ومنه يأتي تأكيد النظرية.

بصفة خاصة فإن كل مؤثر من الشكل (3) يكون مؤثراً قريناً لنفسه في $L_2[a, b]$ أي $A^* = A$ إذا وفقط إذا كان $\overline{K(s, t)} = K(t, s)$. أما في الحالة التي يكون فيها فضاء هيلبرت المعتبر حقيقياً (وبالتالي تكون النوى أيضاً حقيقية) فإن هذا الشرط يكتب على الشكل $K(s, t) = K(t, s)$.

ملاحظة. اعتبرنا لحد الآن مؤثرات تكاملية في $L_2[a, b]$. نشير بهذا الخصوص أن كل ما قلناه اعلاه وكل النتائج التي ستعرض أسفله تمتد، دون أي تغيير، إلى الحالة التي نعتبر فيها بدل القطعة $[a, b]$ فضاء مقيساً كيفياً.

2. المعادلات ذات النوى المتناظرة. نعتبر معادلة فريدولم التكاملية من النوع الثاني:

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t) \mathrm{d}t + f(s) \tag{5}$$

ونفرض أن النواة تحقق الشرطين:

1) $$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t < \infty$$

2) $$K(s, t) = \overline{K(t, s)}$$

نقول عندئذٍ أن المعادلة (5) ذات نواة متناظرة. نستنتج مما ورد في النظريتين 1 وَ 2 من البند السابق أن مؤثر فريدولم الموافق لِـ(5):

$$A\, \varphi = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t) \mathrm{d}t \tag{6}$$

متراص وقرين لنفسه. وبالتالي فهو يحقق شروط نظرية هيلبرت - شميت (الفصل 4، § 6، 5). لنطبق هذه النظرية لإيجاد حل المعادلة (5). إن المهم بالنسبة لنا هو خاصية المؤثر (6) المتمثلة في كونه متراصاً وقريناً لنفسه وليس لكونه يكتب على شكل تكامل؛ ولذا من الطبيعي أن نكتب المعادلة (5) على الشكل الرمزي التالي:

$$\varphi = A\, \varphi + f \tag{7}$$

توجد، حسب نظرية هيلبرت - شميت عند تطبيقها على المؤثر A، جملة متعامدة ومتجانسة من التوابع الذاتية $\{\psi_n\}$ الموافقة للقيم الذاتية غير المنعدمة $\{\lambda_n\}$ بحيث يمكن كتابة كل عنصر ξ من L_2 على الشكل:

$$\xi = \sum_n a_n\, \psi_n + \xi'$$

حيث $A\xi' = 0$. نضع:

$$f = \sum_n b_n\, \psi_n + f' \qquad (Af' = 0) \tag{8}$$

ونبحث عن الحل φ للمعادلة (7) على الشكل:

$$\varphi = \sum_n x_n \psi_n + \varphi' \qquad (A\varphi' = 0) \tag{9}$$

بنقل عبارتي (8) وَ (9) إلى (7) نحصل على:

$$\sum_n x_n \psi_n + \varphi' = \sum_n x_n \lambda_n \psi_n + \sum_n b_n \psi_n + f'$$

نلاحظ أن هذه المساواة تكون محققة إذا وفقط إذا كان:

$$f' = \varphi'$$

وَ:

$$x_n(1 - \lambda_n) = b_n \qquad (n = 1, 2, ...)$$

أي إذا كان:

$$\begin{cases} f' = \varphi' \\ x_n = \dfrac{b_n}{1 - \lambda_n} & , \quad \lambda_n \neq 1 \\ b_n = 0 & , \quad \lambda_n = 1 \end{cases}$$

تعطي المساواة الأخيرة الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة (7) قابلة للحل. نلاحظ أن الإحداثيات x_n الموافقة للأعداد n التي من أجلها تتحقق المساواة $\lambda_n = 1$ احداثيات اختيارية. وهكذا نحصل على النتيجة التالية:

نظرية 3. إذا لم يكن العدد 1 قيمة ذاتية للمؤثر A فإن المعادلة (7) تقبل من أجل كل f حلاً (وحيداً). أما إذا كان العدد 1 قيمة ذاتية للمؤثر A فإن المعادلة (7) تقبل حلاً إذا وفقط إذا كان التابع f متعامداً على كل التوابع الذاتية للمؤثر A الموافقة للقيمة الذاتية 1. وإذا كان الشرط الأخير محققاً فإن المعادلة (7) تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول.

3. نظريات فريدولم. حالة النوى المنحلة. ننتقل الآن إلى دراسة معادلات فريدولم من النوع الثاني التي لها نوى تحقق:

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, ds \, dt < \infty$$

(وهو الشرط الذي يحقق تراص المؤثر) ؛ لن نفرض هنا شرط التناظر.
نعتبر في البداية المعادلة :

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)dt + f(s) \tag{10}$$

ونفرض أن نواتها منحلة أي انها تكتب على الشكل :

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\,Q_i(t) \tag{11}$$

حيث P_i وَ Q_i توابع من L_2 . يلحق المؤثر المعرّف بنواة من الشكل (11) بكل تابع $\varphi \in L_2$ المجموع :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)dt$$

أي عنصراً من الفضاء الجزئي ذي البعد المنتهي المولد عن التوابع P_i $(i = 1, 2, ..., n)$. نلاحظ في (11) أنه يمكن اعتبار التوابع : $P_1, ..., P_n$ مستقلة خطياً . لأنه لو لم يكن الأمر كذلك لتمكنا ، بعد وضع كل تابع من التوابع P_i على شكل عبارة خطية لتوابع مستقلة خطية ، من تمثيل نفس النواة $K(s,t)$ على شكل مجموع حدود ذات الشكل $\bar{P}_j(s)\bar{Q}_j(t)$ حيث $\bar{P}_j$ توابع مستقلة خطية ، وعدد حدود هذا المجموع أصغر من عدد حدود المجموع (11) . والأمر كذلك بالنسبة للتوابع Q_j . من السهل حينئذٍ أن نرى بأننا نحصل على نواة تكون فيها التوابع P_i مستقلة خطياً ، وكذا التوابع Q_j .

ندرك إذن أن الأمر يتعلق بحل المعادلة (10) باعتبار النواة المنحلة (11) حيث $P_1, ..., P_n$ (وكذا $Q_1, ..., Q_n$) توابع مستقلة خطياً . بتعويض $K(s,t)$ بالمجموع المساوي له ، في المعادلة (10) نحصل على :

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)dt + f(s) \tag{12}$$

بإدخال الرموز :

$$q_i = \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

نكتب المعادلة (12) على الشكل :

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i(s) + f(s)$$

بتعويض φ بعبارتها السابقة في المعادلة (10) يأتي :

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i(s) + f(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\left[\sum_{j=1}^{n} q_j\, P_j(t) + f(t)\right]\mathrm{d}t + f(s) \qquad (13)$$

نضع :

$$a_{ij} = \int_a^b Q_i(t)\, P_j(t)\mathrm{d}t$$

$$b_i = \int_a^b Q_i(t) f(t)\mathrm{d}t$$

ونكتب المساواة (13) على الشكل :

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j + b_i\right]$$

بما أن التوابع P_i مستقلة خطياً فرضاً ، نستنتج تساوي المعاملات :

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot q_j + b_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (14)$$

حصلنا بذلك على جملة معادلات خطية بالنسبة للمعاملات q_i . بحل هذه الجملة نحصل على التابع :

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i\, P_i(s) + f(s)$$

إن هذا التابع يحقق المعادلة التكاملية (10) لأن كل الحسابات التي قمنا بها من أجل الانتقال من المعادلة (10) إلى الجملة (14) يمكن القيام بها في الاتجاه المعاكس، وهكذا:

يردّ حل معادلة تكاملية ذات نواة منحلة إلى حل الجملة الموافقة لها (14) المؤلفة من معادلات جبرية خطية.

نلاحظ فيما يخص جمل المعادلات الخطية أن شروط وجود ووحدانية الحل معروفة جيداً.

I. تكون جملة معادلات جبرية وخطية:

$$Tx = y \ , \ (T = \|a_{ik}\|, x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n))$$

قابلة للحل إذا وفقط إذا كان الشعاع y متعامداً على كل حل للجملة المتجانسة القرينة:

$$T^*z = 0 \ , \ (T^* = \| \overline{a_{ki}} \|)$$

II. إذا كان معين المصفوفة T مخالفاً للصفر فإن للجملة $Tx = y$ حلاً (وحيداً) من أجل كل y. اما إذا كان معين المصفوفة T مساوياً للصفر فإن للجملة المتجانسة $Tx = 0$ حلولاً غير منعدمة.

III. بما أن للمصفوفة T والمصفوفة القرينة T^* نفس المرتبة فإن للجملتين المتجانستين $Tx = 0$ وَ $T^*z = 0$ نفس عدد الحلول المستقلة خطياً.

بفضل العلاقة الموجودة، والموضحة اعلاه، بين المعادلات التكاملية ذات النوى المنحلة وجمل المعادلات الجبرية الخطية فإن النتائج السابقة يمكن اعتبارها كنتائج تتعلق بالمعادلات التكاملية ذات النوى المنحلة. سنبين في البند الموالي أن لدينا نفس النتائج حتى ولو كانت النوى غير منحلة. نلاحظ بهذا الخصوص أن مفهوم مرتبة مصفوفة والمعين ليس له معنى في حالة المؤثرات التكاملية غير المنحلة ولذا ينبغي صياغة النتائج السابقة في هذه الحالة بشكل لا تدخل فيه هذه المفاهيم.

4. نظريات فريدولم في حالة المعادلات ذات النوى غير المنحلة. نعتبر من جديد المعادلة :

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t) \mathrm{d}t + f(s) \tag{15}$$

ونفرض أن نواتها تخضع للشرط الوحيد (شرط هيلبرت - شميت) :

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t < \infty$$

(وهو الشرط الذي يضمن تراص المؤثر) ، ولا نفرض هنا أن النواة منحلة أو متناظرة. نوجه اهتمامنا بعد ذلك نحو خاصيات حلول المعادلة (15) ووجودها ؛ والمهم بالنسبة لنا هنا هو خاصية تراص المؤثر الموافق للمعادلة (15) وليس تمثيله التكاملي . ولذا يعتمد استدلالنا الموالي على المعادلة المؤثرية :

$$\varphi = A\, \varphi + f \tag{16}$$

وذلك بفرض أن A مؤثر متراص كيفي في فضاء H لهيلبرت. بوضع $T = I - A$ (حيث يرمز I للمؤثر المطابق) نكتب المعادلة (16) على الشكل :

$$T\, \varphi = f \tag{17}$$

نعتبر، إلى جانب هذه المعادلة، المعادلة المتجانسة :

$$T\, \varphi_0 = 0 \tag{18}$$

والمعادلتين القرينتين :

$$T^* \psi = g \tag{19}$$

$$T^* \psi_0 = 0 \tag{20}$$

$(T^* = I - A^*)$. تصاغ العلاقة الموجودة بين خاصيات حلول هذه المعادلات الأربع في شكل نتائج تدعى نظريات فريدولم.

I. تكون المعادلة $T\varphi = f$ قابلة للحل إذا وفقط إذا كان f متعامداً على كل حل للمعادلة المتجانسة القرينة لها : $T^*\psi_0 = 0$.

II. (متناوبة فريدولم) . إما أن يكون للمعادلة $T\varphi = f$ حل وحيد من أجل كل $f \in H$ ، واما ان يكون للمعادلة المتجانسة $T\varphi_0 = 0$ حلول غير منعدمة .

III. إن عدد (وهو عدد منته) الحلول المستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة (18) هو عدد الحلول المستقلة خطياً للمعادلة المتجانسة (20) .

قبل الانتقال الى البرهان على هذه النظريات نلاحظ انها (حسب ما قلناه في البند 2) محققة من أجل المعادلات ذات النوى المتناظرة . بما أن $A = A^*$ في هذه الحالة فإن النظرية III تُصبح بديهية .

من جهة أخرى ، إذا كان A مؤثراً تكاملياً منحلاً فإن المعادلات التكاملية الموافقة له تردّ ، كما بيّنا أعلاه ، إلى جمل معادلات جبرية خطية ؛ وعندئذٍ ترد نظريات فريدولم إلى النظريات الخاصة بالجمل الخطية الوارد ذكرها في البند السابق .

بما أن كل مؤثر متراص يساوي نهاية متتالية متقاربة من المؤثرات المنحلة أي مؤثرات بعدها منته نستطيع البرهان على نظريات فريدولم بواسطة الانتقال إلى النهاية (أي بواسطة الانتقال من المؤثرات المنحلة إلى المؤثرات غير المنحلة) . إلاّ أننا سنقدم هنا برهاناً على هذه النظرية دون اللجوء إلى المؤثرات المنحلة .

برهان نظريات فريدولم . نذكر أن $\mathrm{Ker}\, B$ يرمز لمجموعة اصفار المؤثر الخطي المستمر B أي مجموعة كل العناصر $x \in H$ التي تحقق $Bx = 0$. من الواضح أن $\mathrm{Ker}\, B$ يساوي دائماً فضاء جزئياً شعاعياً مغلقاً . لتكن $\mathrm{Im}\, B$ ساحة قيم المؤثر B أي مجموعة الأشعة ذات الشكل $y = Bx$. إن المجموعة $\mathrm{Im}\, B$ هي أيضاً منوعة خطية لكنها غير مغلقة عموماً . سنبين ان المنوعة الموافقة للمؤثر $T = I - A$ مغلقة .

توطئة 1. إن المنوعة $\operatorname{Im} T$ مغلقة .

البرهان . لتكن $y_n \in \operatorname{Im} T$ وَ $y_n \to y$. توجد فرضاً اشعة $x_n \in H$ بحيث

$$y_n = Tx_n = x_n - Ax_n \tag{21}$$

يمكن افتراض الأشعة x_n متعامدة على $\operatorname{Ker} T$ ذلك اننا نستطيع ، إذا اقتضى الأمر ، طرح من x_n مسقطه على $\operatorname{Ker} T$. كما يمكننا فرض ان العناصر $\|x_n\|$ تشكل مجموعة محدودة لأن لو كان الأمر غير ذلك لوجدنا (بعد الانتقال إلى متتالية جزئية) : $\|x_n\| \to \infty$ ، ثم بالقسمة على $\|x_n\|$ نحصل بفضل (21) على : $\frac{x_n}{\|x_n\|} - A\frac{x_n}{\|x_n\|} \to 0$. الا أن المؤثر A متراص ، ولذا فإن الانتقال من جديد إلى متتالية جزئية يجعل بإمكاننا افتراض المتتالية $\left\{A\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ متقاربة . حينئذٍ تصبح المتتالية $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ أيضاً متقاربة نحو عنصر z من H . من الواضح في هذه الحالة أن $\|z\| = 1$ وَ $Tz = 0$ أي $z \in \operatorname{Ker} T$. غير أننا افترضنا بأن الأشعة x_n متعامدة على $\operatorname{Ker} T$ وعليه فإن الشعاع z متعامد أيضاً على $\operatorname{Ker} T$. يبين التناقض المحصل عليه هنا أننا نستطيع افتراض بأن العناصر $\|x_n\|$ تشكل مجموعة محدودة . من جهة أخرى يمكن في هذه الحالة افتراض بأن المتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربة ، وعندئذٍ تصبح المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة أيضاً كما هو واضح من خلال (21) . لنرمز بِـ x لنهاية $\{x_n\}$ ينتج حينئذٍ من (21) أن $y = Tx$. انتهى برهان التوطئة .

توطئة 2. إن الفضاء H يساوي المجموع المباشر للفضاءين الجزئيين المغلقين والمتعامدين $\operatorname{Ker} T$ وَ $\operatorname{Im} T$ ، أي أن :

$$\operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T^* = H \tag{22}$$

كما أن :

$$\operatorname{Ker} T^* \oplus \operatorname{Im} T = H \tag{23}$$

البرهان. نحن نعلم أن الفضاءين الجزئيين الواردين في الطرف الأول من المساواة (22) مغلقان. ثم انهما متعامدان لأنه إذا كان $h \in \text{Ker } T$ فإن $(h, T^*x) = (Th, x) = 0$ من أجل كل $x \in H$. يبقى ان نبين عدم وجود أي شعاع غير منعدم ومتعامد في آن واحد على $\text{Ker } T$ وَ $\text{Im } T^*$. لكن إذا كان شعاع z متعامداً على $\text{Im } T^*$ فإن: $(Tz, x) = (z, T^*x) = 0$ من أجل كل $x \in H$ أي $z \in \text{Ker } T$. انتهى برهان التوطئة.

تنتج من التوطئة 2، مباشرة، نظرية فريدولم الأولى، ذلك أن $f \perp \text{Ker } T^*$ يكافئ $f \in \text{Im } T$ أي يكافئ وجود φ بحيث $T\varphi = f$.

نضع الآن من أجل كل عدد طبيعي k: $H^k = \text{Im}(T^k)$، بصفة خاصة: $H^1 = \text{Im } T$. من الواضح أن الفضاءات الجزئية H^k تشكل متتالية متناقصة:

$$H \supset H^1 \supset H^2 \supset \ldots \tag{24}$$

تبين التوطئة 1 أن كل هذه الفضاءات الجزئية مغلقة. لدينا بالإضافة إلى ذلك: $T(H^k) = H^{k+1}$.

توطئة 3. يوجد عدد j بحيث $H^{k+1} = H^k$ من أجل كل $j \leq k$.

البرهان. إذا لم يكن العدد j موجوداً فمن الواضح أن كل الفضاءات H^k مختلفة. ويمكن عندئذٍ انشاء متتالية متعامدة ومتجانسة $\{x_k\}$ بحيث $x_k \in H_k$ وَ $x_k \perp H^{k+1}$. ليكن $k < l$. حينئذٍ:

$$Ax_l - Ax_k = -x_k + (x_l + Tx_k - Tx_l)$$

وبالتالي $\|Ax_l - Ax_k\| \geq 1$ لأن: $x_l + Tx_k - Tx_l \in H^{k+1}$. إذن يستحيل استخراج من المتتالية $\{Ax_k\}$ متتالية جزئية متقاربة وهو ما يناقض تراص المؤثر A. انتهى برهان التوطئة.

توطئة 4. إذا كان $\text{Ker } T = \{0\}$ فإن $\text{Im } T = H$.

البرهان. إذا كان $\text{Ker } T = \{0\}$ فإن المؤثر T تقابلي، وبالتالي إذا كان زيادة على ذلك، $\text{Im } T \neq H$ فإن المتتالية (24) مؤلفة من فضاءات جزئية مختلفة وهذا يناقض التوطئة 3 . إذن $\text{Im } T = H$. كما أن المساواة $\text{Ker } T^* = \{0\}$ تستلزم $\text{Im } T^* = H$.

توطئة 4. إذا كان $\text{Im } T = H$ فإن $\text{Ker } T = \{0\}$.

البرهان. بما أن $\text{Im } T = H$ فإن التوطئة 2 تستلزم $\text{Ker } T^* = \{0\}$ ، لكن التوطئة 4 تؤدي في هذه الحالة إلى $\text{Im } T^* = H$ وبالتالي $\text{Ker } T = \{0\}$ وذلك حسب التوطئة 2 .

نلاحظ أن التوطئة 4 وَ 5 تشكلان بالضبط النظرية الثانية (المتناوبة) لفريدولم . بذلك ينتهي برهان النظرية .

نثبت اخيراً نظرية فريدولم الثالثة .

لنفرض أن الفضاء الجزئي $\text{Ker } T$ ذو بعد غير منته . توجد حينئذٍ في هذا الفضاء الجزئي جملة متعامدة ومتجانسة غير منتهية $\{x_k\}$. زيادة على ذلك $Ax_k = x_k$ ، وبالتالي لدينا : $\|Ax_k - Ax_l\| = \sqrt{2}$ من أجل $k \neq l$. لكنه من المستحيل أن نستخرج من المتتالية $\{Ax_k\}$ متتالية جزئية متقاربة ، وهذا يناقض تراص المؤثر A .

لنرمز بِـ μ لبعد $\text{Ker } T$ وبِـ ν لبعد $\text{Ker } T^*$. لنفرض ان $\nu > \mu$. ليكن $\{\varphi_1, ..., \varphi_\mu\}$ أساساً متعامداً ومتجانساً في $\text{Ker } T$ وَ $\{\psi_1, ..., \psi_\nu\}$ أساساً متعامداً ومتجانساً في $\text{Ker } T^*$. نضع :

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j$$

بما اننا نحصل على المؤثر S باضافة مؤثر بعده منته إلى المؤثر T فإن كل النتائج المثبتة أعلاه بخصوص المؤثر T صالحة أيضاً بالنسبة للمؤثر S .

لنثبت أن المعادلة $Sx = = 0$ ليس لها حل يخالف الحل البديهي. من أجل ذلك نفرض أن:

$$Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = 0 \tag{25}$$

بما أن التوطئة 2 تبين أن الأشعة ψ_j متعامدة على كل الأشعة ذات الشكل Tx فإنه ينتج من (25) أن:

$$Tx = 0$$

وَ

$$(x, \varphi_j) = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq \mu$$

ولذا يجب من جهة أن يكون الشعاع x عبارة خطية للأشعة φ_j ومن جهة أخرى يجب أن يكون متعامداً على هذه الأشعة. وبالتالي $x = 0$. إذن فإن الحل الوحيد للمعادلة $Sx = 0$ هو الحل البديهي. ثم إن النظرية الثانية تثبت وجود شعاع y بحيث:

$$Ty + \sum_{j=1}^{\mu} (y, \varphi_j)\psi_j = \psi_{\mu+1}$$

بضرب طرفي هذه المساواة سلّمياً في ψ_{n+1} نحصل على القيمة 1 في الطرف الأيمن و 0 في الطرف الأيسر ذلك لأن: $Ty \in \operatorname{Im} T$ وَ $\operatorname{Im} T \perp \operatorname{Ker} T^*$. إن هذا التناقض ناتج من الفرض $\nu > \mu$. وبالتالي: $\nu \geq \mu$. بتعويض المؤثر T بِـ T^* نحصل على $\nu \leq \mu$. ومنه $\nu = \mu$. انتهى بذلك برهان النظرية الثالثة.

ملاحظة. 1. تتعلق نظريات فريدولم في الحقيقة بخاصية القلب للمؤثر $A - I$. تثبت هذه النظريات أن القيمة $\lambda = 1$ تمثل بالنسبة للمؤثر A إما

قيمة نظامية وإما قيمة ذاتية منتهية التضاعف. ثم انه من المؤكد أن مقولات هذه النظريات صحيحة أيضاً بالنسبة للمؤثر $A - \lambda I$ في حالة $\lambda \neq 0$. وهكذا يتضح أن كل نقطة مخالفة لِـ0 من طيف مؤثر متراص قيمة ذاتية منتهية التضاعف لهذا المؤثر. نحن نعلم إلى جانب ذلك ان مجموعة تلك القيم الذاتية مجموعة قابلة للعد، على الأكثر. نذكّر بهذا الخصوص أن النقطة 0 تنتمي دوماً إلى طيف مؤثر متراص في فضاء ذي بعد غير منته، لكنها لا تمثل بالضرورة قيمة ذاتية لهذا المؤثر. تسمى المؤثرات المتراصة التي لا يضم طيفها سوى النقطة 0 مؤثرات فولترا (المجردة).

2. كنا اثبتنا نظريات فريدولم من أجل معادلة ذات الشكل: $\varphi = A\varphi + f$، حيث A مؤثر متراص في فضاء لهيلبرت. نلاحظ أنه يمكن تعميم هذه النظريات دون تغييرات معتبرة إلى فضاء كيفي من نوع باناخ E. عندئذٍ نرى بطبيعة الحال أن المعادلة القرينة: $\psi = A^*\psi + g$ هي معادلة في الفضاء E^*، ويعني شرط التعامد: $(f, \psi_0) = 0$ أن العنصر $f \in E$ يعدم كل تابعية في الفضاء الجزئي $E^* \supset \text{Ker}\, T^*$ المؤلف من حلول المعادلة $T^*\psi_0 = 0$، الخ. يجد القارئ عرضاً لنظريات فريدولم المتعلقة بمعادلات في فضاء من نوع باناخ، مثلاً، في كتاب ل. لوسترنيك (L. Lusternik) و ف. سوبولاف (V. Sobolev) «مبادئ التحليل التابعي» (بالروسية).

5. معادلات فولترا. معادلة فولترا (من النوع الثاني) هي تعريفاً المعادلة التكاملية:

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{26}$$

حيث $K(s, t)$ تابع قابل للقياس ومحدود: $|K(s, t)| \leq M$. بما أننا نستطيع اعتبار هذه المعادلة كحالة خاصة من معادلة فريدولم (حيث يكفي اعدام النواة من أجل $t > s$) فإن نظريات فريدولم محققة أيضاً من أجل المعادلة (26). الا أننا نستطيع صياغة تلك النظريات بالطريقة التالية في حالة معادلة فولترا.

من أجل كل $f \in L_2$ تقبل معادلة فولترا (26) حلاً وحيداً.

ذلك اننا نستطيع إعادة استدلال البند 4، § 4، الفصل 2، حرفياً ونرى عندئذٍ وجود قوة للمؤثر:

$$A\,\varphi = \int_a^s K(s,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

تمثل مؤثراً مقلصاً، وبالتالي فإن للمعادلة المتجانسة حلاً وحيداً (هو الحل البديهي). نستنتج بعد ذلك مقولتنا السابقة بالاعتماد على نظريات فريدولم.

تمرين. نعتبر معادلة تكاملية لفريدولم من النوع الثاني، معطاة على قطعة مستقيمة، ذات نواة مستمرة. برهن على نظريات فريدولم في فضاء التوابع المستمرة باعتبار المعادلة المذكورة. نأخذ هنا المعادلة التكاملية ذات النواة المنقولة بمثابة «المعادلة القرينة»، أما التعامد فهو بمفهوم L_2.

6. المعادلات التكاملية من النوع الأول. معادلة فريدولم المجردة، من النوع الأول هي تعريفاً معادلة من الشكل:

$$A\varphi = f \tag{27}$$

أي معادلة لا تحوي التابع المجهول إلاّ تحت رمز مؤثر متراص.

إن حل مثل هذه المعادلة مسألة معقدة، عموماً، أكثر من مسألة حل معادلة من النوع الثاني؛ والمعادلة (27) لا يمكن حلها من أجل أي طرف ثان.
نعتبر في البداية، كمثال بسيط، المعادلة:

$$f(s) = \int_a^s \varphi(t)\mathrm{d}t$$

أي المعادلة التي لها النواة:

$$K(s,t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \leq s \\ 0 & , \quad t > s \end{cases}$$

إن لهذه المعادلة حلاً بديهياً هو $\varphi(s) = f'(s)$ في الحالة التي يكون فيها f مستمراً مطلقاً ومشتقه ينتمي إلى L_2 ؛ وإذا كان الأمر غير ذلك فإن المعادلة المعتبرة لا تقبل أي حل.

لنثبت في الحالة العامة أن المعادلة (27) لا تقبل الحل من أجل كل $f \in H$. إن قابلية المعادلة $A\varphi = f$ للحل من أجل كل $f \in H$ يعني أن هذا المؤثر يطبق H على H بأكمله. لنبين أن ذلك مستحيل. يمكن اعتبار الفضاء H بأكمله كاتحاد قابل للعد من الكرات S_n (مثلاً ، كرات انصاف اقطارها 1 ، 2 ، ... ، n، ... متمركزة في النقطة 0) . يُطبق المؤثر المتراص A كل كرة من هذه الكرات في مجموعة متراصة ، وبالتالي فإن AH يساوي اتحاداً قابلاً للعد من المجموعات المتراصة. لكننا نعلم أن كل متراص في H غير كثيف في أي مكان ومن جهة أخرى فإن كل فضاء متري تام لا يمكن أن يمثل باتحاد قابل للعد من المجموعات غير الكثيفة في أي مكان. إذن $AH \neq H$ ؛ بعبارة أخرى ، من أجل كل مؤثر متراص A في H ، فإن المعادلة $A\varphi = f$ لا يمكن حلها من أجل كل $f \in H$.

هناك نتيجة هامة أخرى تتمثل في كون مقلوب مؤثر متراص مؤثراً غير محدود. إذن إذا كان f_1 وَ f_2 عنصرين متجاورين منتميان إلى H وكانت المعادلتان :

$$A\varphi_1 = f_1$$
$$A\varphi_2 = f_2$$

قابلتين للحل فإن حليهما : $\varphi_1 = A^{-1} f_1$ وَ $\varphi_2 = A^{-1} f_2$ يمكن أن يختلفا عن بعضهما اختلافاً كبيراً. بعبارة أخرى ، فإن أي خطأ – مهما كان صغيراً – في الطرف الثاني يمكن أن يقودنا إلى خطإ كبير جداً في الحل. تسمى المسائل التي يعطى فيها تغيير صغير في المعطيات الأولى تغييراً صغيراً في الحل (يختلف مفهوم «الصغر» هنا باختلاف المسائل) مسائل مضبوطة. إن حل معادلة تكاملية من النوع الأول (خلافاً لحل معادلة من النوع الثاني) مسألة غير مضبوطة. عَرَفت العديد من المسائل غير المضبوطة وكذا طرق تسويتها (أي

ردّها إلى مسائل مضبوطة بمفهوم معين) في المدة الأخيرة تطوراً معتبراً. لكن عرض هذا الموضوع يتجاوز إطار هذا الكتاب.

§3. المعادلات التكاملية المتعلقة بوسيط. طريقة فريدولم

1. طيف مؤثر متراص في H. نعتبر المعادلة:

$$\varphi = \lambda A\varphi + f$$

التي تكتب أيضاً على الشكل:

$$(I - \lambda A)\varphi = f \tag{1}$$

حيث A مؤثر متراص في فضاء هيلبرتي H وحيث λ وسيط عددي. لدينا بفضل متناوبة فريدولم حالتان ممكنتان لا أكثر وتلغي الواحدة الأخرى:

1. من أجل كل $f \in H$ وَ λ معطى تقبل المعادلة (1) حلاً، وهذا الحل وحيد.

2. تقبل المعادلة المتجانسة $\varphi = \lambda A\varphi$ حلولاً غير منعدمة.

يطبق المؤثر $I - \lambda A$ في الحالة الأولى H على H تقابلياً. ومنه يأتي وجود المؤثر المقلوب والمحدود $(I - \lambda A)^{-1}$. وهذا يكافئ القول بأن المؤثر $(A - \frac{1}{\lambda} I)^{-1}$ محدود ومعرف على H بأكمله؛ أي أن $\frac{1}{\lambda}$ لا ينتمي في هذه الحالة إلى طيف المؤثر A.

لنفرض الآن بأن الحالة الثانية محققة، أي أنه يوجد عنصر غير منعدم φ_λ في H بحيث:

$$\varphi_\lambda = \lambda A\varphi_\lambda$$

أو:

$$A\varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda}\varphi_\lambda$$

حينئذٍ يكون $\frac{1}{\lambda}$ قيمة ذاتية للمؤثر A.

لدينا بالتالي النتيجة التالية:

يكون العدد $\mu = \frac{1}{\lambda} \neq 0$ إما قيمة ذاتية للمؤثر المتراص A وإما قيمة نظامية. أي أن الطيف المستمر لمؤثر متراص اما أن يكون خالياً أو مؤلفاً من النقطة $\mu = 0$ لا غير.

بضم ما قلناه آنفاً إلى ما جاء في النظرية 4، 6§، الفصل 4 نحصل على الوصف التالي لمؤثر متراص في H. يتألف طيف كل مؤثر متراص A في H من النقطة 0[1] ومن عدد منته أو من مجموعة قابلة للعد من القيم الذاتية غير المنعدمة: $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...$ تضاعف كل واحدة منها منته. والنقطة الوحيدة التي يمكن أن تكون نقطة تراكم للمتتالية $\{\mu_n\}$ هي النقطة 0. كما يمكن أن تكون النقطة 0 نفسها قيمة ذاتية تضاعفها منته أو غير منته، ويمكنها إلى جانب ذلك الاّ تنتمي إلى مجموعة القيم الذاتية. نشير، كما بيّنا في البند 5، 2§ بخصوص المعادلة:

$$\varphi = \lambda B \varphi + f$$

حيث B مؤثر تكاملي من نوع فولترا، إلّا أن الحالة الأولى من متناوبة فريدولم هي التي تتحقق دوماً (أي وجود الحل من أجل كل $f \in L_2$). بعبارة أخرى فإن طيف مؤثر تكاملي من نوع فولترا يتألف من نقطة واحدة هي 0. من جهة أخرى كنا قد أطلقنا في نهاية البند 4، 2§ اسم مؤثر فولترا المجرد على كل مؤثر متراص يتألف طيفه من النقطة 0 لا غير، وبالتالي يمكن القول أن كل مؤثر تكاملي لفولترا هو أيضاً مؤثر مجرد لفولترا، وهو ما يبرر كل هذه الاصطلاحات.

2. البحث عن الحل على شكل سلسلة قوى لـλ. معينات فريدولم. يمكن أن يكتب حل المعادلة:

$$(\mathrm{I} - \lambda A)\varphi = f$$

من الناحية الشكلية على النحو:

$$\varphi = (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1} f \qquad (2)$$

(1) تنتمي النقطة $\mu = 0$ بالضرورة إلى طيف المؤثر A لأن A^{-1} لا يمكن أن يكون محدوداً في H.

يعرف هـذا الدستور، بالفعل، الحل في الحـالة التي يكون فيها: $\|\lambda A\| < 1$ أي إذا كان $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$ لأن المؤثر $(I - \lambda A)^{-1}$ موجود في هذه الحالة وهو معرف على H بأكمله ومحدود (راجع البند 7، 5§، الفصل 4) . بالإضـافة إلى ذلك يمكن اعتبار المؤثر $(I - \lambda A)^{-1}$ كمجموع للسلسلة الصحيحة (سلسلة القوى) :

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \dots + \lambda^n A^n + \dots$$

والتي تتقارب (بالنظيم) بفضل الشرط $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$. ولذا يمكن كتابة الحل (2) للمعادلة (1) على الشكل :

$$\varphi = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \dots + \lambda^n A^n f + \dots \tag{3}$$

نحصل على نفس النتيجة إذا ما بحثنا عن حل المعادلة (1) على الشكل :

$$\varphi_\lambda = \varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \dots + \lambda^n \varphi_n + \dots$$

(حيث φ_n لا يتعلق الآن بـλ) . بتعويض φ بهذه السلسلة في طرفي المعادلة $\varphi = \lambda A \varphi + f$ ومطابقة المعاملات التي لها نفس قوى λ نحصل على :

$$\varphi_0 = f \ , \ \varphi_1 = Af, \dots, \varphi_n = A \varphi_{n-1} = A^n f, \dots$$

أي أننا نحصل على السلسلة (3) .

لنثبت أنه إذا كان A مؤثراً تكاملياً لهيلبرت - شميت أي إذا كان A مؤثراً معرفاً بنواة $K(s, t)$ ذات مربع قابل للمكاملة فإن المؤثر $(I - \lambda A)^{-1}$ يمكن تمثيله من أجل قيم λ الصغيرة بكفاية، بالمجموع $I + \lambda \Gamma(\lambda)$ للمؤثر المطابق والمؤثر تكاملي لهيلبرت - شميت $\lambda \Gamma(\lambda)$ نواته ذات مربع قابل للمكاملة، ومتعلق بالوسيط λ. نبحث في البداية كيف نكتب نواتيْ المؤثرين A^2 وَ A^3، الخ . . . من أجل هذا الغرض نعتبر مسـألة أعم وهي : ليكن المؤثرين التكامليين :

$$A \varphi = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad , \quad B \varphi = \int_a^b Q(s, t) \varphi(t) dt$$

حيث :

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, ds \, dt = k^2 < \infty$$

$$\int_a^b \int_a^b |Q(s,t)|^2 \, ds \, dt = q^2 < \infty$$

أوجد نواة المؤثر AB . لدينا :

$$AB\varphi = \int_a^b \left\{ K(s,u) \int_a^b Q(u,t)\,\varphi(t)\,dt \right\} du =$$

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,u)\, Q(u,t)\,du \right\} \varphi(t)\,dt$$

نلاحظ أن تبديل رمزي المكاملة فيما بينهما هنا تبرره نظرية فوبيني لأن التابع الذي نكامله :

$$K(s,u)\, Q(u,t)\, \varphi(t)$$

يقبل الجمع بالنسبة لِـ u وَ t في آن واحد بصفته جداء تابعين :

$$K(s,u)\,\varphi(t) \quad \text{وَ} \quad Q(u,t)$$

مربع كل واحد منهما يقبل الجمع . نضع :

$$R(s,t) = \int_a^b K(s,u)\, Q(u,t)\,du \tag{4}$$

تبيّن متراجحة كوشي - بونياكوفسكي أن لدينا :

$$|R(s,t)|^2 \leq \int_a^b |K(s,u)|^2 du \int_a^b |Q(u,t)|^2 du$$

ومنه يأتي :

$$\int_a^b \int_a^b |R(s,t)|^2 \, ds \, dt \leq k^2 q^2$$

وهكذا يتضح أن جداء مؤثرين تكامليين من نوع هيلبرت - شميت مؤثر من نفس النوع نواته معرفة بالدستور (4) . بصفة خاصة إذا وضعنا $A = B$ فإننا نرى بأن A^2 مؤثر تكاملي نواته :

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, u)\, K(u, t) \mathrm{d}u$$

تحقق الشرط :

$$\int_a^b \int_a^b |K_2(s, t)|^2 \,\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \,\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t\right]^2 = k^4$$

ومنه يأتي :

$$\|A^2\| \leq k^2$$

حيث :

$$K^2 = \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \,\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t$$

وبالمثل يمكن أن نثبت بأن كل مؤثر A^n معرف بالنواة :

$$K_n(s, t) = \int_a^b K_{n-1}(s, u)\, K(u, t) \mathrm{d}u \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

التي تحقق الشرط :

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(s, t)|^2 \,\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \leq k^{2n} \tag{5}$$

تسمى النوى $K_n(s, t)$ النوى المكررة .

من أجل $|\lambda| < \frac{1}{k}$ فإن السلسلة :

$$K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(s, t) + \ldots$$

متقاربة في الفضاء $L_2([a, b] \times [a, b])$ ، وهذا بفضل المتراجحة (5) ، نحو تابع $\Gamma(s, t; \lambda)$ مربعه قابل للمكاملة بالنسبة لِـ s وَ t من أجل $|\lambda| < \frac{1}{k}$. إن المؤثر التكاملي $\Gamma(\lambda)$ المعرف بالنواة $\Gamma(s, t; \lambda)$ يساوي مجموع السلسلة المتقاربة :

$$A + \lambda A^2 + \ldots + \lambda^{n-1} A^n + \ldots \tag{6}$$

التي حدها العام مؤثر متراص ؛ وبالتالي فإن المجموع نفسه متراص .

بضرب هذا المجموع في λ وبإضافة إليه المؤثر المطابق I نحصل على المؤثر $(I - \lambda A)^{-1}$. إذن من أجل $|\lambda| < \frac{1}{k}$ نلاحظ أن المؤثر $(I - \lambda A)^{-1}$ يساوي بالفعل مجموع المؤثر المطابق I والمؤثر $\lambda\Gamma(\lambda)$ المعرف بالنواة:

$$\lambda\, \Gamma(s, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\ K_n(s, t)$$

إن الشرط $|\lambda| < \frac{1}{k}$ كاف لكنه غير لازم لكي تتقارب السلسلة (6). تكون هذه السلسلة في بعض الحالات متقاربة من أجل كل قيم λ. إذا كان A مثلاً مؤثراً من نوع فولترّا نواته تحقق الشرط:

$$|K(s, t)| \leq M$$

فإن لدينا من أجل النوى المكررة $K_n(s, t)$، كما يثبت ذلك الحساب المباشر، المتراجحة:

$$|K_n(s, t)| \leq \frac{M^n (b - a)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

ومنه يأتي أن السلسلة (6) متقاربة من أجل كل λ.

نشير إلى أن نصف قطر تقارب السلسلة (6) منته عموماً. من جهة أخرى فإن المعادلة $\varphi = \lambda A \varphi + f$ تقبل الحل من أجل كل قيم λ ما عدا من أجل عدد منته أو مجموعة قابلة للعد منها؛ وبعبارة أكثر دقة نقول، ما عدا من أجل القيم λ التي تجعل $\frac{1}{\lambda}$ قيمة ذاتية للمؤثر A. بيّن فريدولم بخصوص مؤثر تكاملي A معرف بنواة محدودة ومستمرة $K(s, t)$ أن حل المعادلة: $\varphi = \lambda A \varphi + f$ يمكن ان نجده بالطريقة التالية. ندخل الرمز:

$$K\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) \ldots K(s_1, t_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(s_n, t_1) \ldots K(s_n, t_n) \end{vmatrix}$$

ونعرف التابعين $D(\lambda)$ وَ $D(s, t; \lambda)$، يسمى أولهما معّين فريدولم وثانيهما أصغري فريدولم، بالدستورين:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_1\end{pmatrix} d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_1 & \xi_2\end{pmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1 \ldots \xi_n\\ \xi_1 \ldots \xi_n\end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \ldots \tag{7}$$

$$D(s, t, \lambda) = K\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix} - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix}s & \xi_1\\ t & \xi_2\end{pmatrix} d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix}s\ \xi_1 & \xi_2\\ t\ \xi_1 & \xi_2\end{pmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 +$$
$$+ \ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix}s\ \xi_1 \ldots \xi_n\\ t\ \xi_1 \ldots \xi_n\end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \ldots \tag{8}$$

حينئذٍ تعرف النواة الحالة للمعادلة التكاملية :

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t) dt + f(s)$$

بالدستور :

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \lambda \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

ويكتب حل هذه المعادلة على الشكل :

$$\varphi(s) + f(s) + \lambda \int_a^b \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} f(t) dt \tag{9}$$

وذلك من أجل كل قيم λ التي تجعل $\frac{1}{\lambda}$ غير مساوية لقيمة ذاتية للمؤثر A الموافق للنواة $K(s, t)$. بالإضافة إلى هذا فإن $D(\lambda)$ وَ $D(s, t; \lambda)$ تابعان تحليليان صحيحان للوسيط λ، ويكون $D(\lambda) = 0$ إذا وفقط إذا كانت $\frac{1}{\lambda}$ قيمة ذاتية للمؤثر التكاملي A . وقد أثبت ت . كارلمان (T. Carleman) سنة 1921 ان الدساتير (7) وَ (8) وَ (9) التي حصل عليها فريدولم بافتراض النواة $K(s, t)$ مستمرة، صالحة أيضاً من أجل كل نواة مربعها يقبل المكاملة . لن نعرض هنا البرهان على الدساتير (7) وَ (8) وَ (9)[1] .

(1) راجع ت . كارلمان T. Carleman, Zur Theorie der Integralgleichungen

Math. Zeitschr. 9(1921), 196 – 217

وكذلك ف . سميثس

F. Smithies, The Fredholm theory of integral equations, Duke Math Journal, 8(1941), 107 – 130

«نظرية فريدولم في المعادلات التكاملية» .

بخصوص البرهان على الدساتير المذكورة راجع أيضاً [35] وَ [36] .

الفصل العاشر

مبادئ في الحساب التفاضلي في فضاء شعاعي

كان المفهومان الرئيسيان المتناولان في مسائل التحليل التابعي ضمن الفصول السابقة هما مفهوم التابعية الخطية ومفهوم المؤثر الخطي. في حين أن بعض المسائل المطروحة في التحليل التابعي هي أساساً غير خطية، ولذا وجبت دراسة التحليل التابعي «غير الخطي» إلى جانب التحليل التابعي «الخطي» أي دراسة التابعيات غير الخطية والمؤثرات غير الخطية في فضاءات ذات أبعاد غير منتهية. من جملة ما يتضمن التحليل التابعي غير الخطي نستطيع ذكر مثلاً فرع قديم في الرياضيات وهو فرع حساب التغيرات الذي وضعت أسسه خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر وذلك بفضل أعمال بارنولي وأولر ولوجاندر. ورغم هذا فإن التحليل التابعي غير الخطي يشكل فرعاً جديداً نسبياً في الرياضيات بعيداً عن أن يكون قد وصل منتهاه. نعرض في هذا الفصل بعض المبادئ الأولى المنتسبة للتحليل التابعي غير الخطي وخاصة تلك التي تتعلق بنظرية المفاضلة كما نقدم بعض التطبيقات لهذه المفاهيم.

1. § المفاضلة في فضاء شعاعي

1. التفاضلية القوية (تفاضلية فريشي Fréchet). ليكن X وَ Y فضاءين شعاعيين نظيميين وَ F تطبيقاً من مفتوح $\mathcal{O} \subset X$ في Y. نقول عن هذا التطبيق أنه يقبل المفاضلة عند نقطة معطاة $x \in \mathcal{O}$ إذا وجد مؤثر خطي محدود $L_x \in \mathcal{L}(X, Y)$ بحيث:

$$F(x+h) - F(x) = L_x h + \alpha(x, h) \quad (1)$$

حيث :

$$\frac{\|\alpha(x, h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \to 0} 0 \qquad (2)$$

تسمى العبارة $L_x h$ (التي تمثل بطبيعة الحال عنصراً من الفضاء Y ، من أجل كل $h \in X$) التفاضلية القوية (أو تفاضلية فريشي) للتطبيق F عند النقطة x . يسمى المؤثر L_x المشتق ، أو بعبارة أدق ، المشتق القوي للتطبيق F عند النقطة x . نرمز لهذا المشتق بـ $F'(x)$

إذا كان التطبيق F قابلاً للمفاضلة عند النقطة x فإن المشتق الموافق له معرف بطريقة وحيدة. لرؤية ذلك نفرض أن :

$$F(x+h) - F(x) = L_x^{(1)} h + \alpha_1(x, h) = L_x^{(2)} h + \alpha_2(x, h)$$

عندئذ :

$$L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h = \alpha_2(x, h) - \alpha_1(x, h)$$

وبفضل العلاقة (2) يأتي :

$$\frac{\|L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \to 0} 0 \qquad (3)$$

فإذا كان $L_x^{(1)} \neq L_x^{(2)}$ فإنه يوجد h بحيث :

$$\frac{\|L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h\|}{\|h\|} = \lambda \neq 0$$

وعندئذ من أجل كل $\varepsilon \neq 0$ نجد أن :

$$\frac{\|L_x^{(1)} (\varepsilon h) - L_x^{(2)} (\varepsilon h)\|}{\|(\varepsilon h)\|} = \lambda$$

ومنه يتضح أن العلاقة (3) مستحيلة .

نعرض الآن بعض النتائج الأولية التي تأتي مباشرة من تعريف المشتق .

1. إذا كان $F(x) = y_0 =$ ثابتاً فإن $F'(x) = 0$ (أي أن المؤثر $F'(x)$ هو المؤثر المنعدم) .

2. إن مشتق تطبيق خطي ومستمر L يساوي التطبيق L ذاته .

ذلك أن التعريف يعطي في هذه الحالة:

$$L(x+h) - L(x) = L(h)$$

3. (مشتق تابع مركب). لتكن X ، Y ، Z ثلاثة فضاءات نظيمية، وليكن $\mathbf{U}(x_0)$ جواراً للنقطة $x_0 \in X$ ، وَ F تطبيقاً مستمراً من هذا الجوار في Y ، نضع $y_0 = F(x_0)$ ، وليكن $V(y_0)$ جواراً للنقطة $y_0 \in Y$ وَ G تطبيقاً مستمراً من هذا الجوار في Z . عندئذ إذا كان التطبيق F قابلاً للمفاضلة عند x_0 وَ G قابلاً للمفاضلة عند y_0 فإن التطبيق $H = GF$ (المعرف والمستمر على جوار للنقطة x_0) يقبل المفاضلة عند النقطة x_0 ولدينا:

$$H'(x_0) = G'(y_0)\, F'(x_0) \tag{4}$$

ذلك أن الافتراضات السابقة تعطي[1]:

$$F(x_0 + \xi) = F(x_0) + F'(x_0)\xi + 0_1(\xi)$$

وَ:

$$G(y_0 + \eta) = G(y_0) + G'(y_0)\eta + 0_2(\eta)$$

ثم إن $F'(x_0)$ وَ $G'(y_0)$ مؤثران خطيان ومحدودان. وبالتالي:

$$H(x_0 + \xi) = G\big(y_0 + F'(x_0)\,\xi + 0_1(\xi)\big) = G(y_0) + G'(y_0)\big(F'(x_0)\xi + 0_1(\xi)\big) + 0_2\big(F'(x_0)\,\xi + 0_1(\xi)\big) = G(y_0) + G'(y_0)\, F'(x_0)\xi + 0_3(\xi)$$

إذا كانت F وَ G وَ G توابع عددية فإن الدستور (4) يصبح بمثابة القاعدة المعتادة الخاصة باشتقاق تابع مركب.

4. ليكن F وَ G تطبيقين مستمرين من X في Y . إذا كان F وَ G قابلين للمفاضلة عند النقطة x_0 فإن التطبيقين $F + G$ وَ aF (حيث a عدد) يقبلان أيضاً المفاضلة عند هذه النقطة ولدينا:

(1) ترمز العبارات $0(\xi)$ هنا وفي المستقبل لمقادير (في فضاء نظيمي أو عددي) تحقق الشرط: $\frac{\|0(\xi)\|}{\|\xi\|} \xrightarrow[\|\xi\| \to 0]{} 0$.

$$(F + G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0) \tag{5}$$

وَ :

$$(aF)'(x_0) = aF'(x_0) \tag{6}$$

ذلك أنه ينتج من عمليتي جمع مؤثرين وجداء مؤثر في عدد أن :

$$(F + G)(x_0 + h) = F(x_0 + h) + G(x_0 + h) =$$

$$= F(x_0) + G(x_0) + F'(x_0)h + G'(x_0)h + o_1(h)$$

وَ :

$$aF(x_0 + h) = aF(x_0) + aF'(x_0)h + o_2(h)$$

ومنه تأتي العلاقتان (5) وَ (6) .

2. التفاضلية الضعيفة (تفاضلية غاتو Gâteaux) . نعتبر من جديد تطبيقاً F معرفاً على جزء من X قيمه في Y . التفاضلية الضعيفة أو تفاضلية غاتو للتطبيق F عند النقطة x (من أجل التزايد h) هي تعريفاً النهاية :

$$DF(x, h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x + th)|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t}$$

حيث نعتبر هنا التقارب بالنسبة لنظيم الفضاء Y .

قد تكون التفاضلية الضعيفة $DF(x, h)$ غير خطية بالنسبة لِـ h . لكن إذا كانت خطية أي إذا كان :

$$DF(x, h) = F'_f(x)\, h$$

حيث $F'_f(x)$ مؤثر خطي محدود فإننا نسمي هذا المؤثر المشتق الضعيف (أو مشتق غاتو) .

نلاحظ أن النظرية الخاصة باشتقاق تابع مركب خاطئة عموماً بالنسبة للمشتقات الضعيفة . (أوجد مثالاً !)

3. دستور التزايدات المنتهية. ليكن O مجموعة مفتوحة في X ولتكن $[x_0, x]$ قطعة مستقيمة محتواة بأكملها في O. أخيراً، ليكن F تطبيقاً معرفاً على O قيمه في Y وله عند كل نقطة من القطعة $[x_0, x]$ مشتق ضعيف F'_f. نضع $\Delta x = x - x_0$ ونعتبر التابع العددي:

$$f(t) = \varphi\big(F(x_0 + t\Delta x)\big)$$

المعرف من أجل $0 \leq t \leq 1$، حيث φ تابعية اختيارية في Y^*. إن هذا التابع يقبل المفاضلة بالنسبة لِـ t. ذلك أنه يمكن في العبارة:

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \varphi\left(\frac{F(x_0 + t\Delta x + \Delta t\, \Delta x) - F(x_0 + t\Delta x)}{\Delta t}\right)$$

الانتقال إلى النهاية تحت رمز التابعية الخطية المستمرة φ. فنحصل بعد ذلك على:

$$f'(t) = \varphi\,\big(F'_f(x_0 + t\Delta x)\,\Delta x\big)$$

بتطبيق دستور التزايدات المنتهية على التابع f في $[0, 1]$ يأتي:

$$f(1) - f(0) = f'(\theta)$$

حيث $0 \leq \theta \leq 1$، أي:

$$\varphi\big(F(x) - F(x_0)\big) = \varphi\big(F'_f(x_0 + \theta\,\Delta x)\Delta x\big) \tag{7}$$

إن هذه المساواة محققة من أجل كل تابعية $\varphi \in Y^*$ (وتتعلق قيمة θ، بطبيعة الحال، بِـ φ). من (7) ينتج أن:

$$|\varphi\big(F(x) - F(x_0)\big)| \leq \|\varphi\| \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'_f\,(x_0 + \theta\,\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \tag{8}$$

نختار الآن التابعية غير المنعدمة φ بحيث يكون:

$$\varphi\big(F(x) - F(x_0)\big) = \|\varphi\| \cdot \|\,F(x) - F(x_0)\|$$

(إن التابعية φ موجودة وذلك بفضل نظرية هان-باناخ) . من (8) نحصل على :

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \sup \|F'_f(x_0 + \theta \Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \quad (9)$$

حيث $\Delta x = x - x_0$

يمكن اعتبار هذا الدستور بمثابة مماثل دستور التزايدات المنتهية المتعلق بالتوابع العددية .

بتطبيق الدستور (9) على التطبيق :

$$x \rightarrow F(x) - F'_f(x_0)\Delta x$$

نحصل على المتراجحة التالية :

$$\|F(x) - F(x_0) - F'_f(x_0)\Delta x\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'_f(x_0 + \theta \Delta x) - F'_f(x_0)\| \cdot \|\Delta x\| \quad (10)$$

4. علاقة مفهوم التفاضلية القوية بمفهوم التفاضلية الضعيفة. إن مفهومي التفاضلية القوية والتفاضلية الضعيفة مفهومان مختلفان حتى في حالة الفضاءات ذات الأبعاد المنتهية. فنحن نعرف من خلال دروس التحليل أن وجود المشتق :

$$\frac{d}{dt} f(x + th)$$

من أجل كل h مثبت ، لتابع عددي :

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

لا يستلزم وجود تفاضلية لهذا التابع أي لايستلزم إمكانية وضع التزايد $f(x + h) - f(x)$ على شكل مجموع يحوي جزءه الرئيسي (الخطي بالنسبة لـ h) وحداً لا متناهي الصغر من رتبة عليا بالنسبة لـ h . مثال ذلك التابع التالي :

$$(11) \qquad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

إن هذا التابع مستمر عند كل نقطة من المستوى بما في ذلك النقطة $(0, 0)$. عند هذه النقطة يقبل f تفاضلية ضعيفة تساوي 0 لأن :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + th) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2} = 0$$

على الرغم من أن هذه التفاضلية لاتمثل الجزء الرئيسي لتزايد التابع (11) عند النقطة $(0, 0)$. ذلك أننا إذا وضعنا $h_2 = h_1^2$ نحصل على :

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0)}{\|h\|} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1^5}{2h_1^4 \sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

إلّا إنه إذا كان لتطبيق F مشتق قوي فإن له أيضاً مشتقاً ضعيفاً وهذان المشتقان متطابقان. بالفعل، إذا كان التطبيق F يقبل المفاضلة بقوة فإن :

$$F(x + th) - F(x) = F'(x)\,(th) + 0(th) = tF'(x)h + 0(th)$$

وَ :

$$\frac{F(x + th) - F(x)}{t} = F'(x)h + \frac{0(th)}{t} \to F'(x)h$$

لنبحث الآن عن الشروط التي تجعل المفاضلة الضعيفة للتطبيق F تستلزم المفاضلة القوية.

نظرية 1. إذا كانت التفاضلية الضعيفة $F'_f(x)$ للتطبيق F موجوداً في جوار U للنقطة x_0 وكانت تمثل في هذا الجوار تابعاً (مؤثرياً) لـ x مستمراً عند x_0 فإن التطبيق F يقبل عند x_0 مشتقاً قوياً $F'(x_0)$ يطابق المشتق الضعيف.

البرهان. يقبل التطبيق F فرضاً مشتقاً ضعيفاً أي : $DF(x_0, h) = F'_f(x_0)h$. باختيار h بحيث : $x_0 + th \in U$ من أجل كل $t \in [0, 1]$ نعتبر المقدار :

$$\omega(x_0, h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - F'_f(x_0)h \tag{12}$$

إذا كان y^* عنصراً اختيارياً من الفضاء Y^* الثنوي لِـ Y فإن لدينا بالاعتماد على (12) :

$$\big(\omega(x_0, h), y^*\big) = \big(F(x_0 + h) - F(x_0), y^*\big) - \big(F'_f(x_0)h, y^*\big) \tag{13}$$

نعتبر التابع $f(t) = \big(F(x_0 + th), y^*\big)$ للمتغير العددي t . أنه تابع قابل للمفاضلة بالنسبة لِـ t ولدينا :

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{F(x_0 + th + \Delta th) - F(x_0 + th)}{\Delta t}, y^*\right) = \big(F'_f(x_0 + th)h, y^*\big)$$

بتطبيق دستور التزايدات المنتهية على f يمكن كتابة المساواة (13) على الشكل :

$$\big(\omega(x_0, h), y^*\big) = \Big([F'_f(x_0 + \tau h) - F'_f(x_0)]h, y^*\Big) \tag{13'}$$

حيث τ عدد متعلق بِـ h ، $0 \leq \tau \leq 1$. من أجل h مثبت يمكن اختيار العنصر $y^* \in Y^*$ بطريقة تحقق المساواة : $\|y^*\| = 1$ والمتراجحة :

$$\Big|\big(\omega(x_0, h), y^*\big)\Big| \geq \frac{1}{2}\ \|\omega(x_0, h)\| \cdot \|y^*\| = \frac{1}{2}\ \|w(x_0, h)\|h\|$$

ومنه ، ومن المساواة (13') ، نحصل على التقدير :

$$\|\omega(x_0, h)\|\ \| \leq 2\,\|f'_f\ (x_0 + \tau h) - F'_f\ (x_0)\| \cdot \|h\|$$

لكن الفرض يقول بأن $F'_f(x)$ تابع مؤثري لِـ x مستمر عند النقطة x_0 ؛ وبالتالي :

$$\lim_{h \to 0}\ \|\ F'_f\ (x_0 + \tau h) - F'_f\ (x_0)\| = 0$$

وهذا يعني بأن $\|\omega(x_0, h)\|$ مقدار متناهي الصغر من رتبة عليا بالنسبة

لِـ$\|h\|$، أي أن $F'_f(x_0)h$ يمثل الجزء الرئيسي للفرق $F(x_0 + h) - F(x_0)$. وهذا يثبت وجود المشتق القوي $F'(x_0)$ وتطابقه مع المشتق الضعيف . سنعتبر مستقبلا تطبيقات قابلة لمشتقات قوية وبالتالي ضعيفة، إلّا إذا أشرنا لعكس ذلك .

5. التابعيات التفاضلية. كما أدخلنا مفهوم تفاضلية تطبيق معرف على جزء من فضاء نظيمي X قيمه في فضاء نظيمي آخر Y . إن المشتق $F'(x)$ لمثل هذا التابع عند كل نقطة x، مؤثر خطي من X في Y أي عنصر من الفضاء $\mathcal{L}(X, Y)$. بصفة خاصة إذا كان Y هو المستقيم العددي فإن F تابع عددي على X ، أي تابعية . إن مشتق مثل هذا التابع عند نقطة x_0 تابعية خطية (متعلقة بِـx_0) أي عنصر من الفضاء X^* .

مثال. نعتبر في فضاء H حقيقي لهيلبرت التابعية : $F(x) = \|x\|^2$. حينئذ :

$$\|x + h\|^2 - \|x\|^2 = 2(x, h) + \|h\|^2 \cdot$$

يمثل $2(x, h)$ الجزء الرئيسي (الخطي بالنسبة لِـ h) لهذه العبارة؛ وبالتالي :

$$F'(x) = F'_f = 2x$$

تمرين. عين مشتق التابعية $\|x\|$ في فضاء لهيلبرت . (الجواب : $\frac{x}{\|x\|}$ في حالة $x \neq 0$ ، أما إذا كان $x = 0$ فالمشتق غير موجود) .

6. التوابع المجردة. نفرض الآن بأن فضاء الانطلاق X هو المساوي للمستقيم العددي وليكن Y فضاء لباناخ . يسمى التابع $F(x)$ الذي يلحق بعدد x عنصراً من Y تابعاً مجرداً . إن المشتق $F'(x)$ لتابع مجرد (إن وجد) هو (من أجل كل x) عنصر من الفضاء Y ؛ إنه شعاع المماس للمنحني $F(x)$ عند النقطة x . بما أن التابع المجرد تابع لمتغير عددي واحد فإن التفاضلية الضعيفة لمثل هذا التابع تطابق تفاضليته القوية .

7. التكامل. ليكن F تابعاً مجرداً لمتغير حقيقي t قيمه في فضاء Y لباناخ. إذا كان F معرفاً على قطعة مستقيمة $[a, b]$ فمن الممكن تعريف تكامل التابع F على $[a, b]$. ونعني بهذا التكامل نهاية المجاميع التكاملية:

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

الموافقة للتجزئات:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \quad , \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

عندما يؤول $\max(t_{k+1} - t_k)$ إلى 0. نرمز لهذا التكامل (وهو عنصر من Y) بـ:

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t$$

باتباع استدلالات تماثل في العديد من النقاط، الاستدلالات المتبعة في حالة التوابع ذات القيم العددية، نثبت أن تكامل تابع مستمر على قطعة مستقيمة موجود؛ وهو يتمتع زيادة على ذلك بنفس الخاصيات التي يتمتع بها تكامل ريمان المعتاد. من بين هذه الخاصيات نذكر:

1. إذا كان U تطبيقاً خطياً مستمراً معطى من الفضاء Y في الفضاء Z فإن:

$$\int_a^b \mathrm{U}\, F(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{U} \int_a^b F(t)\mathrm{d}t$$

2. إذا كان $F(t)$ من الشكل $f(t)y_0$ حيث $f(t)$ تابع عددي وَ y_0 عنصراً معطى من Y فإن:

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = y_0 \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

.3

$$\left\| \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \| F(t) \|\,\mathrm{d}t$$

نعتبر من جديد فضاءين نظيميين X وَ Y وليكن $BC(X, Y)$ الفضاء

الشعاعي المؤلف من التطبيقات المستمرة والمحدودة[1] من X في Y . يمكن أن ندخل في الفضاء $BC(X, Y)$ طوبولوجيا باعتبار المجموعات التالية كجوارات للصفر :

$$\cup_{n,\varepsilon} = \{F : \sup_{\|x\| \leq n} \|F(x)\| < \varepsilon\}$$

نلاحظ أن هذه الطوبولوجيا تطابق على الفضاء الجزئي : $\mathcal{L}(X, Y)$ من $BC(X, Y)$ ، وهو المؤلف من التطبيقات الخطية المستمرة من X في Y ، تطابق الطوبولوجيا المعتادة على $\mathcal{L}(X, Y)$ المعرفة بالنظيم المؤثري . لتكن $J = [x_0, x_0 + \Delta x]$ قطعة مستقيمة في X . نفرض أن لدينا تطبيقاً مستمراً من هذه القطعة في الفضاء $BC(X, Y)$ أي أننا ألحقنا بكل نقطة $x \in J$ تطبيقاً $F(x) \in BC(X, Y)$ يتعلق باستمرار بالوسيط $x \in J$. حينئذ يمكن تعريف تكامل $F(x)$ على القطعة J بوضع :

$$\int_{x}^{x_0+\Delta x} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x_0 + t\,\Delta x)\,\Delta x \cdot \mathrm{d}t \tag{14}$$

(يمثل هنا : $F(x_0 + t\,\Delta x)\Delta x$ من أجل كل $t \in [0, 1]$ عنصراً من الفضاء Y ؛ إنه صورة العنصر $\Delta x \in X$ بواسطة التطبيق $(F(x_0 + t\Delta x)$. من الواضح أن التكامل الوارد في الطرف الثاني من (14) موجود وأنه عنصر من الفضاء Y .

لنستخدم هذا المفهوم لإيجاد تطبيق إنطلاقاً من مشتقه . نعتبر تطبيقاً F من X في Y له مشتق قوي $F'(x)$ على القطعة $[x_0, x_0 + \Delta x]$ يتعلق باستمرار بِـ x . حينئذ يكون التكامل $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\mathrm{d}x$ موجوداً . لنثبت أن لدينا المساواة :

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\mathrm{d}x = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \tag{15}$$

التي تعمم دستور نيوتن ليبنيز . لدينا تعريفاً :

---

(1) نقول عن تطبيق $F : X \to Y$ إنه محدود إذا كانت المجموعة $F(Q)$ محدودة في Y من أجل كل مجموعة محدودة $Q \subset X$. قد يكون تطبيق مستمر غير خطي تطبيقاً غير محدود .

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_0 + t_k \Delta x) \ (\Delta x) \ (t_{k+1} - t_k) \ \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)(\Delta x_k)$$

حيث :

$$\tilde{x}_k = x_0 + t_k \Delta x \quad , \quad \Delta x_k = (t_{k+1} - t_k)\Delta x$$

و :

$$\delta = \max_k (t_{k+1} - t_k)$$

من جهة أخرى، من أجل كل تجزئة للقطعة $0 \leq t \leq 1$، لدينا :

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_0 + t_{k+1}\Delta x) - F(x_0 + t_k \Delta x)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)]$$

بفضل الدستور (10) نحصل على :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)\Delta x_k] \right\| \leq \tag{16}$$

$$\leq \|\Delta x\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sup_\theta \|F'(x_k + \theta \Delta x_k) - F'(\tilde{x}_k)\|$$

بما أن المشتق $F'(x)$ مستمر وبالتالي مستمر بانتظام على القطعة $[x_0, x_0 + \Delta x]$ فإن الطرف الثاني من المتراجحة (16) يؤول إلى الصفر عندما نقص أطوال المجالات بصفة لامتناهية في تجزئة القطعة $[x_0, x_0 + \Delta x]$. وهذا يثبت المساواة (15).

8. المشتقات ذات الرتب العالية. ليكن F تطبيقاً قابلاً للمفاضلة من X في Y. إن المشتق $F'(x)$ يمثل من أجل كل $x \in X$ عنصراً من $\mathcal{L}(X, Y)$ أي أن F' تطبيق من الفضاء X في فضاء المؤثرات الخطية $\mathcal{L}(X, Y)$. إذا كان هذا التطبيق قابلاً للمفاضلة فإنه يسمى المشتق الثاني للتطبيق F ونرمز له بـ F''. إذن $F''(x)$ عنصر من الفضاء $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ المؤلف من المؤثرات الخطية من X في $\mathcal{L}(X, Y)$. لنثبت أن عناصر هذا الفضاء يمكن أن تمثّل بطريقة أكثر سهولة وحدسية، وذلك كتطبيقات ثنائة الخطية.

نقول أن لدينا تطبيقاً ثنائي الخطية من الفضاء X في الفضاء Y إذا ألحقنا بكل ثنائية مرتبة (x, x') من X عنصراً $y = B(x, x') \in Y$ بحيث يكون الشرطان التاليان محققان:

1. من أجل كل العناصر x_1, x_2, x'_1, x'_2 من X ومن أجل العددين α وَ β لدينا:

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, x'_1) = \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_2, x'_1)$$

$$B(x_1, \alpha x'_1 + \beta x'_2) = \alpha\, B(x_1, x'_1) + \beta\, B(x_1, x'_2)$$

2. يوجد عدد حقيقي M بحيث:

$$\|B(x, x')\| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|x'\| \tag{17}$$

وهذا من أجل كل x وَ x' في X.

يعني الشرط الأول من هذين الشرطين أن التطبيق B خطي بالنسبة لكل متغير من المتغيرين x وَ x'؛ ومن الواضح أن الشرط الثاني يكافىء استمرار B بالنسبة لمجموعة المتغيرين.

يسمى أصغر الأعداد M المحققة للشرط (17) نظيم التطبيق الثنائي الخطية B ونرمز له بـ $\|B\|$.

تعرف العمليات الخطية على التطبيقات الثنائية الخطية كالمعتاد وتتمتع بالخاصيات المعتادة. وبالتالي فإن التطبيقات الثنائية الخطية من X في Y تشكل هي ذاتها فضاء شعاعياً نظيمياً نرمز له بـ: $B(X^2, Y)$. إذا كان الفضاء Y تاماً فإن $B(X^2, Y)$ تام أيضاً.

يمكن أن نلحق بكل عنصر A من الفضاء $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ عنصراً من $B(X^2, Y)$ بوضع :

$$B(x, x') = (Ax)x' \tag{18}$$

من الواضح أن التطبيق المعرف بهذه الطريقة خطي . لنثبت أنه ايزومتري أيضاً وأنه يطبق $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ على الفضاء $B(X^2, Y)$ بأكمله . ذلك أنه إذا كان $y = B(x, x') = (Ax)x'$ فإن لدينا :

$$\|y\| \leq \|Ax\| \cdot \|x'\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|x'\|$$

ومنه :

$$\|B\| \leq \|A\| \tag{19}$$

من جهة أخرى إذا كان تطبيق ثنائي الخطية B معطى فإن التطبيق $x' \to (Ax)x' = B(x, x')$ هو ، من أجل كل $x \in X$ مثبت ، تطبيق خطي من X في Y .

وهكذا نلحق بكل $x \in X$ عنصراً Ax من الفضاء $\mathcal{L}(X, Y)$ ؛ من الواضح أن Ax يتعلق خطياً بـ x وهو ما يجعل التطبيق الثنائي الخطية B يعرف عنصراً A من الفضاء $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$. يتضح بالإضافة إلى ذلك أن التطبيق B يمكن إيجاده ثانية انطلاقاً من A بواسطة الدستور (18) وأن :

$$\|Ax\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \|(Ax)x'\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \| B(x, x') \| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

ومنه :

$$\|A\| \leq \|B\| \tag{20}$$

بمقارنة (19) وَ (20) نستخلص $\|B\| = \|A\|$. وهكذا فإن التطبيق بين $B(X^2, Y)$ وَ $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ المعرف بالدستور (18) تطبيق خطي وايزومتري وبالتالي تقابلي . بالإضافة إلى ذلك فإن صورة الفضاء $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ هي $B(X^2, Y)$ بأكمله .

كنا رأينا بأن المشتق الثاني $F''(x)$ عنصر من الفضاء $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$. مما سبق نلاحظ أنه يمكن اعتبار $F''(x)$ كعنصر من الفضاء $B(X^2, Y)$.

نعتبر مثالاً بسيطاً. ليكن X وَ Y فضاءين إقليديين بعداهما m وَ n على التوالي. في هذه الحالة يمكن إعطاء كل تطبيق خطي من X في Y في شكل مصفوفة ذات n سطراً وm عموداً. إذن فإن المشتق $F'(x)$ للتطبيق F من X في Y مصفوفة (تتعلق لِـ $x \in X$). إذا اخترنا أساسين لِـ X وَ Y، مثلاً:

$$e_1, \dots, e_m \text{ في } X \text{ وَ } f_1, \dots, f_n \text{ في } Y$$

نحصل على:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m \quad , \quad y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n$$

وبالتالي نستطيع كتابة التطبيق $y = F(x)$ على الشكل:

$$\begin{aligned} y_1 &= F(x_1, \dots, x_m) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= F_n(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

وَ:

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

ويكون المشتق الثاني $F''(x)$ معرفاً في هذه الحالة بالجملة المؤلفة من $n \times m \times m$ مقداراً: $a_{k,ij} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \, \partial x_j}$. يمكن اعتبار هذه الجملة كتطبيق خطي من الفضاء X في الفضاء $\mathcal{L}(X, Y)$ معرف بالدستور:

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{k,ij} \, x_i$$

أو كتطبيق ثنائي الخطية من X في Y معرف بالدستور:

$$y_k = \sum_{i,j=1}^{m} a_{k,ij} \, y_i \, x'_j$$

من الطبيعي أن ندخل مفهوم المشتق الثالث والرابع وبصفة عامة المشتق من الرتبة n لتطبيق F من X في Y وذلك بتعريف المشتق من الرتبة n بالتدريج كمشتق للمشتق من الرتبة $(n-1)$. وبالتالي يتضح أن المشتق من الرتبة n لِـF عنصر من الفضاء $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, ..., \mathcal{L}(X, Y) ...))$. باتباع الاستدلالات المعتبرة في دراسة المشتق الثاني نستطيع أن نلحق بصفة طبيعية بكل عنصر من هذا الفضاء عنصراً من الفضاء $N(X^{(n)}, Y)$ المؤلفة من التطبيقات الـn- خطية من X في Y. ونعني بتطبيق n - خطي تطبيقاً $y = N(x', x'', ..., x^{(n)})$ بين الجملة المرتبة $(x', x'', ..., x^{(n)})$ عناصرها في X وبين عناصر Y، يتمتع بالخاصيتين التاليتين:

1) يجب أن يكون هذا التطبيق خطيا بالنسبة لكل متغير x^i عند تثبيت المتغيرات الأخرى.

2) $$\| N(x', x'', ..., x^{(n)}) \| \leq M \|x'\| \cdot \|x''\| ... \|x^{(n)}\|$$

وهكذا يتضح أن المشتق من الرتبة n لهذا التطبيق F يمكن اعتباره عنصراً من الفضاء $N(X^n, Y)$.

9. التفاضليات ذات الرتب العالية. كنا عرفنا التفاضلية (القوية) لتطبيق F كصورة لعنصر $h \in X$ بواسطة المؤثر الخطي $F'(x)$، أي $dF = F'(x)h$. نعرف التفاضلية من الرتبة الثانية لِـF بالدستور: $d^2F = F''(x)(h, h)$ أي بمثابة العبارة التربيعية الموافقة للتطبيق $F'(x) \in B(X^2, Y)$. بصفة عامة نسمي تفاضلية من الرتبة n لِـF العبارة $d^n F = F^{(n)}(x)(h, h, ..., h)$ أي الصورة في Y لعنصر $(h, h, ..., h) \in X^n = X \times ... \times X$ بواسطة التطبيق $F^{(n)}(x)$.

10. دستور تايلور. تعني قابلية تطبيق F للمفاضلة القوية أن الفرق $F(x+h) - F(x)$ يمكن تفكيكه إلى مجموع حدين أولهما خطي بالنسبة لِـh وثانيهما لا متناهي الصغر من رتبة عليا بالنسبة لِـ$\|h\|$. تعمم هذه النتيجة في شكل دستور مماثل لدستور تايلور الخاص بالتوابع العددية.

نظرية 2. ليكن F تطبيقاً من مفتوح $\mathcal{O} \subset X$ في Y بحيث يكون $F^{(n)}(x)$ موجوداً ويمثل تابعاً لِـ x مستمراً بانتظام على $\mathcal{O}$. عندئذ تتحقق المساواة:

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)\,h + \frac{1}{2!}F''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,\dots,h) + \omega(x,h) \tag{21}$$

حيث: $\|\omega(x,h)\| = 0(\|h\|^n)$

البرهان. نعتمد البرهان بالتدريج على n. من أجل $n = 1$ نرى أن المساواة (21) بديهية. نعتبر قيمة كيفية لِـ n ونفرض أن الدستور الذي نحصل عليه من (21)، بتعويض n بِـ $n-1$ صحيح من أجل كل التطبيقات التي تحقق شروط النظرية بعد استبدال n بِـ $n-1$. حينئذ باعتبار التطبيق F' يكون لدينا:

$$F'(x+h) = F'(x) + F''(x)\,h + \frac{1}{2!}F'''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h,\dots,h) + \omega_1(x,h) \tag{22}$$

حيث: $\|\omega_1(x,h)\| = 0(\|h\|^{n-1})$. بمكاملة طرفي (22) على القطعة $[x, x+h]$، وبتطبيق دستور نيوتن-ليبنيز (15) نحصل على:

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)h\,dt = \tag{23}$$

$$= \int_0^1 \{F'(x) + tF''(x)\,h + \frac{1}{2!}t^2F'''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}F^{(n)}(x)(h,\dots,h)\}h\,dt + R_n$$

حيث: $R_n = \int_0^1 \omega_1(x,th)h\,dt$.

من (23) نستنتج أن :

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!} F''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(x)(h, \dots, h) + R_n$$

حيث :

$$\|R_n\| \leq \left| \int_0^1 \|\omega_1(x_1, th)\| \cdot \|h\| \, dt = 0(\|h\|^n) \right.$$

انتهى برهان النظرية .

يسمى الدستور (21) دستور تايلور الخاص بالتطبيقات .

§ 2. مسائل القيم القصوى

من أقدم المسائل التي أهتم بها التحليل التابعي غير الخطي ودرسها أكثر من غيرها هي مسألة القيم القصوى للتابعيات . إن دراسة مثل هذه المسائل تدخل في إطار حساب التغيّرات . تتعلق معظم الطرق المستعملة في حساب التغيرات بالشكل الخاص للتابعية التي نرغب في البحث عن قيمها القصوى . وعلى كلٍّ فإن هناك كيفيات ونتائج عامة يمكن صياغتها من أجل تابعيات اختيارية نسبياً . إننا لاننوي هنا عرض الطرق التغيُّرية عرضاً شاملاً بل سنكتفي بدراسة موجوزة لبعض عناصر النظرية العامة التي يعتمد عليها حساب التغيرات .

1. الشرط اللازم لوجود قيمة قصوى . لتكن F تابعية حقيقية معرفة على فضاء X لباناخ . نقول أن التابعية F تقبل عند النقطة x_0 قيمة صغرى إذا تحققت المتراجحة $F(x) - F(x_0) \geq 0$ من أجل كل القيم x المجاورة بكفاية للنقطة x_0 . نعرف القيمة العظمى لتابعية بطريقة مماثلة . إذا قبلت التابعية

F عند النقطة x_0 قيمة صغرى أو قيمة عظمى فإننا نقول أن لها قيمة قصوى[1].

يُرد العديد من المسائل الفيزيائية والميكانيكية إلى البحث عن القيم القصوى لتابعية.

لدينا فيما يخص التوابع ذات n متغيراً، كما نعلم، شرط لازم لوجود قيمة قصوى، وهو: إذا قبل تابع قابل للمفاضلة f عند النقطة $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ قيمة قصوى فإن لدينا $df = 0$ عند هذه النقطة وهذا يعني أن:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

تمتد صلاحية هذا الشرط بسهولة إلى التابعيات المعرفة على فضاء نظيمي كيفي.

نظرية 1. لكي تقبل تابعية قابلة للمفاضلة F عند النقطة x_0 قيمة قصوى يجب أن تكون تفاضليتها عند هذه النقطة منعدمة من أجل كل h:

$$F'(x_0)h = 0$$

البرهان. من تعريف التفاضلية يأتي:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + 0(h) \tag{1}$$

إذا وجد h بحيث $F'(x_0)h \neq 0$ فإن اشارة العبارة: $F'(x_0)(\lambda h) + 0(\lambda h)$ تطابق اشارة جزئها الرئيسي $F'(x_0)(\lambda h)$ من أجل قيم λ الحقيقية الصغيرة بكفاية. ولما كانت $F'(x_0)$ تابعية خطية فإن $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)h$. وبالتالي إذا كان $F'(x_0)h \neq 0$ فإن العبارة (1) يمكن أن تأخذ من أجل قيم لِـ h صغيرة بكفاية، قيما موجبة وقيما سالبة وبالتالي فإنه لايمكن أن تكون لِـ F قيمة قصوى عند النقطة x_0.

نسوق هنا بعض الأمثلة.

---

(1) يقال أيضاً قيمة حديّة (المترجم).

1 . لتكن :

$$F(x) = \int_a^b f\big(t, x(t)\big)\, \mathrm{d}t \qquad (2)$$

حيث f تابع قابل للمفاضلة باستمرار . إن هـذه التابعية المعتبرة على الفضـاء $C[a, b]$ المؤلف من التوابع المستمرة على القطعة $[a, b]$ تقبل المفاضلة . ذلك أن :

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^b [f(t, x + h) - f(t, x)]\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b f'_x(t, x)\, h(t)\, \mathrm{d}t + 0(h)$$

ومنه :

$$\mathrm{d}F = \int_a^b f'_x\big(t, x(t)\big)\, h(t)\, \mathrm{d}t$$

إذا كانت هذه التابعية الخطية منعدمة من أجل كل $h \in C[a, b]$ فإن : $f'_x(t, x) = 0$. ذلك لأن ، من أجل كل $x(t) \in C[a, b]$ ، يكون المشتق $f'_x(t, x)$ تابعاً مستمراً لـ t . إذن ، إذا كان هذا المشتق مخالفاً للصفر عند نقطة t_0 ، مثلاً إذا كان $f'_x\big(t_0, x(t_0)\big) > 0$ فإن هذه المتراجحة تتحقق أيضاً في جوار (α, β) للنقطة t_0 . وبالتالي بوضع :

$$h(t) = \begin{cases} (t - \alpha)(\beta - t) & , \quad t \in [\alpha, \beta] \\ 0 \quad , \quad t \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

نحصل على :

$$\int_a^b f'_x(t, x)\, h(t)\, \mathrm{d}t > 0$$

من التناقض المحصل عليه نستنتج مقولتنا . إن المعادلة $f'_x(t, x) = 0$ تعرف ، عموماً ، منحنياً يمكن أن تكون للتابعية (2) عليه قيمة قصوى .

2. نعتبر على نفس الفضـاء $C[a, b]$ التابعية :

$$F(x) = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, x(\xi_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 \qquad (3)$$

حيث $K(\xi_1, \xi_2)$ تابع مستمر يحقق الشرط $K(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_2, \xi_1)$. من السهل التأكد من أن تفاضلية هذه التابعية تساوي :

$$dF = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

إذا كانت هذه العبارة منعدمة من أجل كل $h \in C[a, b]$ فإن اتباع الاستدلال الوارد في المثال السابق يبيِّن أن :

$$\int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, d\xi_1 = 0$$

وهذا من أجل كل $\xi_2 \in [a, b]$. يمثل التابع $x \equiv 0$ حلاً من حلول هذه المعادلة . هل هناك قيمة قصوى عند هذه النقطة؟ إن الجواب عن هذا السؤال مرتبط بالتابع $K(\xi_1, \xi_2)$ ويتطلب دراسة أكثر عمقاً .

3. نعتبر التابعية :

$$F(x) = \int_a^b f\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt \qquad (4)$$

المعرفة على الفضاء $C^1[a, b]$ المؤلف من التوابع القابلة للمفاضلة باستمرار على القطعة $[a, b]$. لدينا هنا $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ وَ $f(t, x, x')$ تابع قابل للمفاضلة مرتين . تلعب التابعية (4) دوراً هاماً في العديد من المسائل التي تطرح في حساب التغيرات . لنبحث عن تفاضليتها .

باستخدام دستور تايلور يأتي :

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^b [f(t, x + h, x' + h') - f(t, x, x')]\, dt$$

$$= \int_a^b (f'_x h + f'_{x'} \cdot h')\, dt + 0(\|h\|)$$

حيث $\|h\|$ يمثل نظيم التابع h المعتبر كعنصر من الفضاء $C^1[a, b]$. وهكذا فإن الشرط اللازم لكي تكون للتابعية (4) قيمة قصوى هو أن تتحقق العلاقة :

$$dF = \int_a^b (f'_x \cdot h + f'_{x'} \cdot h')\, dt = 0 \tag{5}$$

نلاحظ أن الشكل التكاملي (5) لهذا الشرط غير مستحسن للبحث عن النقطة $x \in C^1[a, b]$ التي تبلغ عندها F قيمة قصوى. لنرد إذن (5) إلى شكل أفضل وذلك بالمكاملة بالتجزئة[1] الحد $f'_{x'} \cdot h'$ في (5). نحصل عندئذ على:

$$\int_a^b f'_{x'} \cdot h'\, dt = f'_{x'} \cdot h \Big|_a^b - \int_a^b h \cdot \frac{d}{dt} f'_{x'}\, dt$$

إذن:

$$dF = \int_a^b \left(f'_x - \frac{d}{dt} f'_{x'}\right) h\, dt + f'_{x'} \cdot h \Big|_a^b = 0 \tag{6}$$

يجب أن تتحقق هذه المساواة من أجل كل h بما في ذلك تلك التي تحقق الشرط $h(a) = h(b) = 0$. وبالتالي:

$$\int_a^b \left(f'_x - \frac{d}{dt} f'_{x'}\right) h\, dt = 0$$

وهذا من أجل كل h تحقق: $h(a) = h(b) = 0$. بالاستدلال بطريقة المثال 1 ينتج أن:

$$f'_x - \frac{d}{dt} f'_{x'} = 0 \tag{7}$$

فتصبح المساواة (6) عندئذ:

$$f'_{x'} h \Big|_a^b = 0 \tag{8}$$

إذا كانت التابعية (4) معتبرة على مجموعة كل التوابع القابلة للمفاضلة باستمرار x والمعرفة على $[a, b]$، نستطيع اختيار h بحيث يكون $h(a) = 0$ وَ $h(b) \neq 0$ وبذلك تعطي المساواة (8):

---

(1) ينبغي أن نبرر أيضاً هذه العملية لأن وجود المشتق x'' الظاهر في العبارة $\frac{d}{dt} f'_{x'}$ غير وارد فرضاً. بهذا الصدد يمكن الرجوع لأيِ كتاب في حساب التغيرات.

$$f'_{x'}\Big|_{t=b} = 0 \qquad (9)$$

وبالمثل ، نحصل بعد وضع $h(b) = 0$ وَ $h(a) \neq 0$ ، على :

$$f'_{x'}\Big|_{t=a} = 0 \qquad (10)$$

وهكذا يأتي من الشرط (6) (أي من انعدام تفاضلية التابعية) أن التابع x الموافق لقيمة قصوى للتابعية (4) يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية (7) والشرطين الحديين (9) وَ (10) . إن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تحوي ثابتين اختياريين ولدينا بالضبط شرطان حديان يمكّناننا من حساب هذين الثابتين .

2. التفاضلية الثانية . شروط كافية لوجود قيمة قصوى . لنعد إلى البحث عن القيم القصوى لتابع ذي n متغيراً . ليكن $f(x_1, ..., x_n)$ تابعاً يحقق عند النقطة $(x_1^0, ..., x_n^0)$ الشرط $df = 0$. عندئذ لمعرفة ما إذا كان التابع f قابلاً أم لا لقيمة قصوى عند هذه النقطة يجب ، كما نعلم ، اعتبار التفاضلية الثانية لِـ f . لدينا ، على وجه التحديد ، الخاصيتان التاليتان :

1. إذا قبل التابع $f(x_1, ..., x_n)$ عند نقطة $(x_1^0, ..., x_n^0)$ قيمة صغرى (عظمى على التوالي) فإنه يحقق عند هذه النقطة الشرط $d^2f \geq 0$ ($d^2f \leq 0$ على التوالي) .

2. إذا حقق التابع $f(x_1, ..., x_n)$ عند نقطة $(x_1^0, ..., x_n^0)$ الشرطين :

$$d^2f = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} dx_i \, dx_k > 0 \quad \text{وَ} \quad df = 0$$

(شريطة ألّا تكون كل العناصر dx_i منعدمة) فإن f يقبل عند هذه النقطة قيمة صغرى (عظمى في حالة $d^2f < 0$ ، على التوالي) .

نقول بإيجاز ، أن وجود قيمة صغرى يتطلب أن تكون التفاضلية الثانية غير سالبة ، ويكفي أن تكون معرفة موجبة .

لنر الآن كيف يمكن تمديد صلاحية هذه النتائج إلى التابعيات المعرفة على فضاء لباناخ.

نظرية 2. لتكن F تابعية حقيقية معرفة على فضاء X لباناخ، نفرض أنها تقبل في جوار لنقطة x_0 مشتقاً ثانياً مستمراً. إذا قبلت هذه التابعية عند النقطة x_0 قيمة صغرى فإن $d^2F(x_0) \geq 0$ [1].

البرهان. من دستور تايلور ينتج أن:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \frac{1}{2} F''(x_0)\,(h, h) + 0\,(\|h\|^2)$$

إذا قبلت التابعية F عند النقطة x_0 قيمة صغرى فإن $F'(x_0) = 0$ وتكتب المساواة السابقة على الشكل:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)\,(h, h) + 0\,(\|h\|^2) \tag{11}$$

إذا وجد عنصر h بحيث:

$$F''(x_0)\,(h, h) < 0 \tag{12}$$

فإنه توجد عناصر h تحقق الشرط (12) ولها نظيم صغير بالقدر الذي نريد، ذلك لأن: $F''(x_0)\,(\varepsilon h, \varepsilon h) = \varepsilon^2 F''(x_0)\,(h, h)$. ثم نلاحظ أن اشارة العبارة (11) تُعرف باشارة الحد $\frac{1}{2} F''(x_0)\,(h, h)$ عندما يكون نظيم h صغيراً بكفاية. وبالتالي:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)\,(h, h) + 0\,(\|h\|^2) < 0$$

أي أن التابعية F لاتقبل قيمة صغرى عند x_0.

هذا ويمكن تقديم نظرية مماثلة بخصوص القيمة العظمى.

إن النظرية المثبتة تعد تعميماً مباشراً للنظرية المماثلة لها المتعلقة بالتوابع المتعددة المتغيرات. أما بخصوص الشرط الكافي فإن الأمر يختلف. فالشرط

(1) تعني هذه المتراجحة أن $F''(x_0)\,(h, h) \geq 0$ من أجل كل h.

$F''(x_0)(h, h) > 0$ الذي يكفي، كما ذكرنا، لوجود قيمة صغرى في حالة تابع ذي n متغيراً يصبح غير كاف في حالة التابعيات المعرفة على فضاء لباناخ بعده غير منته. نعتبر مثالاً بسيطاً. لتكن التابعية:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4$$

المعرفة على فضاء لهيلبرت. إن التفاضلية الأولى لهذه التابعية عند النقطة 0 منعدمة؛ ثم إن تفاضليتها الثانية عند هذه النقطة تساوي السلسلة $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{h^3}$ أي تمثل تابعية معرفة موجبة. ورغم ذلك فإن التابعية F لاتقبل قيمة صغرى عند النقطة 0 لأن $F(0) = 0$ وَ $F(0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, 0, \ldots) = \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} < 0$ (حيث $\frac{1}{n}$ في الموضع $n-1$) وهذا يعني أن كل جوار للنقطة 0 يحوي نقاطاً يتحقق من أجلها $F(x) < F(0)$.

ندخل المفهوم التالي. نقول عن تابعية تربيعية B أنها موجبة بقوة إذا وجد ثابت $c > 0$ بحيث $B(x, x) \geq c\|x\|^2$ من أجل كل x.

نظرية 3. إذا حققت تابعية F معرفة على فضاء X لباناخ الشرطين:

1) $dF(x_0) = 0$

2) $d^2F(x_0)$ تابعية تربيعية موجبة بقوة.

فإن هذه التابعية تقبل عند النقطة x_0 قيمة صغرى.

البرهان. نختار $\varepsilon > 0$ بحيث يحقق المقدار $0(\|h\|^2)$ الوارد في المساواة (11) الشرط: $|0(\|h\|^2)| \leq \frac{c}{4}\|h\|^2$ من أجل $\|h\| < \varepsilon$. عندئذ:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)(h, h) + 0(\|h\|) > \frac{c}{4}\|h\|^2 > 0$$

وذلك من أجل $\|h\| < \varepsilon$.

تكون تابعية تربيعية موجبة بقوة في فضاء بعده منته إذا وفقط إذا كانت معرفة موجبة؛ ولذا نجد أن الشرط القائل بأن التفاضلية الثانية معرفة

موجبة (زيادة على انعدام التفاضلية الأولى) شرط كاف لكي يقبل التابع قيمة قصوى. أما في فضاء بعده غير منته فإن الشرط القائل بأن التفاضلية الثانية موجبة بقوة شرط أقوى من الشرط القائل بأن هذه التفاضلية معرفة موجبة (يبين ذلك المثال الوارد أعلاه).

إن شرط الإيجابية القوية للتفاضلية الثانية، وهو الشرط الذي يضمن وجود قيمة صغرى، شرط مفضل عن غيره لكونه يقبل التطبيق على كل تابعية تقبل المفاضلة مرتين (بغض النظر عن شكلها) على فضاء لباناخ. نلاحظ من جهة أخرى أن هذا الشرط «خشن» ومن الصعب التأكد منه في حالة تعتبر هامة من الناحية العملية. نثبت في حساب التغيرات شروطاً كافية أقل «خشونة» من الشرط السابق تضمن وجود القيم القصوى (وذلك باستخدام الشكل الملموس للتابعيات التي تظهر في مسائل حساب التغيرات)، لكن هذه المسائل تتجاوز إطار هذا الكتاب.

3 §. طريقة نيوتن

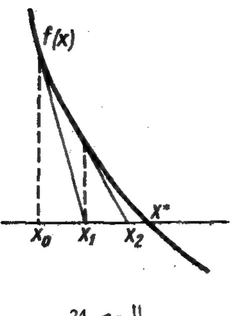
هناك طريقة معروفة لحل المعادلات ذات الشكل:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

(حيث f تابع عددي لمتغير عددي، معرف على القطعة $[a, b]$) هي طريقة نيوتن (أو طريقة المماسات). تتمثل هذه الطريقة في البحث عن التقريبات المتوالية للحل بواسطة دستور التدريج:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2)$$

(كتقريب ابتدائي x_0 نأخذ نقطة اختيارية من القطعة المستقيمة المعرف عليها التابع f). أما التفسير الهندسي لهذه الطريقة فيوضحه الرسم 24.



الرسم 24

يمكن البرهان على أنه إذا كانت x^* تمثل الجذر الوحيد للمعادلة (1) على القطعة $[a, b]$ وكان التابع f قابلاً على هذه القطعة لمشتق أول غير منعدم ولمشتق ثان محدود فإنه يوجد «حقل جاذبية للجذر x^*» أي جوار للنقطة x^* بحيث تكون المتتالية (2) متقاربة نحو x^* من أجل كل نقطة x_0 من هذا الجوار.

نستطيع تعميم طريقة نيوتن إلى المعادلات المؤثرية. نعرض هنا هذا التعميم باعتبار معادلات في فضاء لباناخ.

نعتبر المعادلة:

$$F(x) = 0 \tag{3}$$

حيث F تطبيق من فضاء لباناخ X في فضاء لباناخ Y. نفرض أن التطبيق F يقبل المفاضلة بقوة في كرة $B(x_0, r)$ نصف قطرها r (نأخذ مركزها x_0 كتقريب ابتدائي للحل المطلوب). بتعويض العبارة $F(x_0) - F(x)$، كما هو الحال في فضاء بعده 1، بجزئها الرئيسي أي بالعنصر $F'(x_0)(x_0 - x)$، نحصل من (3) على المعادلة الخطية:

$$F'(x_0)(x_0 - x) = F(x_0)$$

التي يمكن اعتبار حلها:

$$x_1 = x_0 - [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)$$

كتقريب يلي x_0 للحل الدقيق x للمعادلة (3) (نفرض هنا، بطبيعة الحال، وجود المؤثر $[F'(x_0)]^{-1}$) . باتباع نفس الاستدلال نحصل على المتتالية :

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)]^{-1} \left(F(x_n) \right) \tag{4}$$

المؤلفة من الحلول التقريبية للمعادلة (3). نشير إلى أن البحث عن المؤثر المقلوب $[F'(x_n)]^{-1}$ قد يشكل صعوبة كبيرة في الفضاءات ذات الأبعاد غير المنتهية. ولهذا يستحسن استخدام طريقة نيوتن المعدَّلة (راجع [27, 28]) . ويتمثل هذا التعديل في تعويض المتتالية (4) بالمتتالية :

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1} \left(F(x_n) \right) \tag{5}$$

نرى في هذه الحالة أن المؤثر المقلوب يؤخذ في كل مرة من أجل نفس القيمة للمتغير $x = x_0$. ورغم أن هذا التعديل يخفض سرعة التقارب فإن هذه الطريقة مفضلة عن غيرها في الحسابات العملية.

لنقدم الآن نصاً متيناً للنتيجة التي نرمي إليها، وكذا لبرهانها.

نظرية 1. ليكن F تطبيقاً قابلاً للمفاضلة بقوة في كرة $B(x_0, r)$ مركزها x_0 ونصف قطرها r؛ نفرض أن مشتقه $F'(x)$ يحقق في هذه الكرة شرط ليبشيتز :

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

نفرض أن $[F'(x_0)]^{-1}$ موجود، وليكن :

$M = \|[F'(x_0)]^{-1}\|$ وَ $k = \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\|$ وَ $h = MkL$.

عندئذ إذا كان $h < \frac{1}{4}$ في الكرة $\|x - x_0\| \leq k t_0$، حيث t_0 يمثل أصغر جذري المعادلة $ht^2 - t + 1 = 0$ ، فإنه يوجد جذر وحيد x^* للمعادلة $F(x) = 0$ ، ثم إن المتتالية $\{x_n\}$ المعرفة بدستور التدريج (5) متقاربة نحو هذا الحل.

البرهان. نعتبر في الفضاء X التطبيق $Ax = x - [F'(x_0)]^{-1} F(x)$. إن

مشتقه القوي منعدم عند النقطة x_0. يحول هذا التطبيق الكرة $\|x - x_0\| \leq kt_0$ إلى الكرة نفسها. ذلك أن:

$$Ax - x_0 = x - x_0 - [F'(x_0)]^{-1} F(x) =$$
$$= [F'(x_0)]^{-1} \{ F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0) -$$
$$- [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)$$

وبالتالي:

$$\|Ax - x_0\| \leq \|[F'(x_0)]^{-1}\| \cdot \|F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0)\| +$$
$$+ \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\|$$

أي:

$$\|Ax - x_0\| \leq M \| F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0)\| + k \tag{6}$$

نعتبر التطبيق الوسيطي $\Phi(x) = F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)$. إنه يقبل المفاضلة ومشتقه يساوي $\Phi'(x) = F'(x) - F'(x_0)$. إذا كان $\|x - x_0\| < kt_0$ فإن لدينا التقدير التالي:

$$\|\Phi'(x)\| = \| F'(x) - F'(x_0)\| \leq L \|x - x_0\| \leq L t_0 k$$

من نظرية المتوسط (الدستور (9)، § 1) ينتج أن:

$$\|\Phi(x)\| = \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| \leq L t_0 k \|x - x_0\| \leq L t_0^2 k^2 \tag{7}$$

إذن إذا كان $\|x - x_0\| \leq t_0 k$ فإننا نحصل من (6) وَ (7) على:

$$\|Ax - x_0\| \leq M L t_0^2 k^2 + k = k(M L t_0^2 k + 1) = k(h t_0^2 + 1) = k t_0$$

وهذا يعني أن التطبيق A يحوّل الكرة $\|x - x_0\| \leq kt_0$ إلى الكرة نفسها.

لنثبت الآن بأن A تقليص لهذه الكرة. من أجل $\|x - x_0\| \leq kt_0$ لدينا:

$$A'(x) = I - [F'(x_0)]^{-1} F'(x) = [F'(x_0)]^{-1} \left(F'(x_0) - F'(x) \right)$$

ومنه:

$$\|A'(x)\| \leq M \|F'(x_0) - F'(x)\| \leq M L \|x - x_0\| \leq M L k t_0$$

إلّا أن t_0 يمثل أصغر جذريْ المعادلة $ht^2 - t + 1 = 0$ أي :

$t_0 = \frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}$. ولذا :

$$\|A'(x)\| \leq M\,L\,k\,t_0 \leq h\,t_0 = h\,\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h} = \frac{1-\sqrt{1-4h}}{2} = q < \frac{1}{2} \tag{8}$$

ومنه :

$$\|Ax_1 - Ax_2\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

وهذا يعني أن A تقليص .

وبالتالي توجد نقطة صامدة x^* وحيدة للتطبيق A في الكرة : $\|x - x_0\| \leq k t_0$. وتحقق هذه النقطة :

$$x^* = x^* - [F'(x_0)]^{-1}\,F(x^*)$$

أي :

$$F(x^*) = 0$$

من جهة أخرى :

$$Ax_n = x_n - [F'(x_0)]^{-1}\,F(x_n) = x_{n+1}$$

وبالتالي، وبفضل مبدأ التقليص، فإن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة نحو x^* .

نستنتج من المتراجحة (8) مباشرة التقدير التالي الخاص بسرعة تقارب طريقة نيوتن المعدلة :

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\,\|[F'(x_0)]^{-1}\,F(x_0)\| \tag{9}$$

وهكذا يتضح أن خطأ طريقة نيوتن المعدلة يتناقص كمتوالية هندسية . نشير أخيراً، للمقارنة، إلى أن طريقة نيوتن المعتادة (التي تتمثل في تعريف التقريبات المتوالية بالدستور (4) بدل الدستور (5)) تتقارب بسرعة تفوق سرعة المتوالية الهندسية : لدينا بخصوص هذه الطريقة :

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}\cdot k$$

مثال. نعتبر المعادلة التكاملية غير الخطية :

$$x(s) = \int_a^b K\big(s, t, x(t)\big)\, \mathrm{d}t \tag{10}$$

حيث $K(s, t, u)$ تابع مستمر وقابل للمفاضلة باستمرار. ندخل التطبيق $y = F(x)$ المعرف بالمساواة:

$$y(s) = x(s) - \int_a^b K\big(s, t, x(t)\big)\, \mathrm{d}t$$

عندئذ نكتب المعادلة (10) على الشكل $F(x) = 0$.

ليكن x_0 تقريباً ابتدائياً لحل هذه المعادلة. حينئذ يكون التصحيح الأول: $\Delta x(s) = x_1 - x_0$ معرفاً بالمعادلة:

$$F'(x_0)\, \Delta x = -\, F(x_0) \tag{11}$$

إذا كان التابع $K(s, t, u)$ والفضاء الذي نعتبر فيه المعادلة (10) بحيث يكون المشتق $F'(x)$ للتطبيق F معيناً بواسطة «الاشتقاق تحت رمز المكاملة» أي إذا كان:

$$z = F'(x_0) x$$

وهذا يعني أن:

$$z(s) = x(s) - \int_a^b K'_u\big(s, t, x_0(t)\big)\, x(t)\, \mathrm{d}t$$

فإن المعادلة (11) تكتب على الشكل:

$$\Delta x(s) = \int_a^b K'_u\big(s, t, x_0(t)\big)\, \Delta x(t)\, \mathrm{d}t + \varphi_0(s) \tag{12}$$

حيث:

$$\varphi_0(s) = \int_a^b K\big(s, t, x_0(t)\big)\, \mathrm{d}t - x_0(s)$$

بطريقة مماثلة يمكن أن نجد التصحيحات الموالية.

وهكذا فإن البحث عن كل تقريب موال يرد إلى حل معادلة تكاملية خطية. باستعمال طريقة نيوتن المعدلة نلاحظ أن كل المعادلات التكاملية

الخطية التي نحصل عليها بهذه الـكيفية لها نفس النواة. يمكن للقارىء الراغب في المزيد من التفصيل حول طريقة نيوتن والمسـائل المتعلقة بها الرجوع إلى الـكتاب [28] وكذا المقال [27] لِـ ل. ف. كانتوروفيتش L.V. Kantorovitch الذي توصل إلى النتائج الأسـاسية المتعلقة بتوسيع طريقة نيوتن إلى المعادلات المؤثرية.

تكملة

جبور باناخ

بقلم : ف .م . تيخوميروف (V.M. Tikhomirov)

أهتممنا في الفصل الثالث من هذا الكتاب بدراسة الفضاءات الشعاعية. وقد أبرزنا بصفة خاصة صنفاً هاماً من الفضاءات الشعاعية وهو المؤلف من فضاءات باناخ. نريد من خلال هذه التكملة دراسة جبور باناخ أي فضاءات باناخ التي عرف فيها ضرب العناصر في بعضها البعض. إن تواجد عملية الضرب إلى جانب بنية الفضاء الشعاعي وبنية الفضاء المتري، يمدّ جبور باناخ بعدد وفير من الخاصيات البارزة.

1 §. تعاريف. أمثلة لجبور باناخ

1. جبور باناخ. تشاكل جبور باناخ. نذكّر أننا نسمي فضاء شعاعياً كل مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين، تسميان الجمع والضرب في عدد تحققان الثماني مسلمات الواردة في 1 § من الفصل الثالث.

تعريف 1. يسمى فضاء شعاعي X جبراً إذا زوّد بعملية ثالثة تسمى الضرب، وتحقق المسلمات التالية:

1. $(xy)z = x(yz)$

2. $x(y+z) = xy + xz$ وَ $(y+z)x = yx + zx$

3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

4. إذا وجد عنصر $e \in X$ بحيث $ex = xe = x$ من أجل كل $x \in X$ نقول أن e وحدة الجبر X وأن X جبر ذو وحدة[1].

5. إذا كان الضرب تبديلياً أي إذا حقق المسلمة : $xy = yx$ فإننا نقول بأن X جبر تبديلي.

يتوجه اهتمامنا أساساً هنا إلى الجبور التبديلية ذات وحدة. ستكون كل الجبور المعتبرة في هذه التكملة جبوراً على الحقل $\mathbb{C}$ للأعداد العقدية.

كنا أدخلنا في 3§ من الفصل الثالث مفهوم الفضاء النظيمي، أي الفضاء الشعاعي المزود بنظيم $\|x\|$ يحقق المسلمات الثلاث الواردة في البند 1، 3§، الفصل 3.

تعريف 2. يسمى فضاء نظيمي X جبراً نظيمياً إذا كان جبراً له وحدة ويحقق المسلمتين:

6. $\|e\| = 1$

7. $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

إذا كان جبر نظيمي X، زيادة على ذلك، تاماً (أي إذا كان فضاء لباناخ) فإنه يسمى جبر باناخ.

يسمى تطبيق $F : X \to Y$ تماثلاً من الجبر X في الجبر Y إذا حقق الشروط:

$$F(x + y) = Fx + Fy \quad (1)$$

$$F(\alpha x) = \alpha Fx \quad (2)$$

$$F(xy) = Fx \cdot Fy \quad (3)$$

(1) نلاحظ أن وحدة جبر وحيدة دوماً لأنه إذا كان e' عنصراً يتمتع بالخاصية (4) فإن: $ee' = e = e'$.

نقول عن جبرين X وَ Y إنهما متشاكلان إذا وجد تطبيق تقابلي F من X على Y يحقق الشروط الثلاثة السابقة.

نقول عن فضاءين نظيميين X وَ Y إنهما ايزومتريان إذا وجد تطبيق تقابلي $F: X \leftrightarrow Y$ يحقق الشرطين (1) وَ (2) السابقين ويحقق أيضاً المساواة:

$$\|Fx\|_Y = \|x\|_X$$

تعريف 3. نقول عن جبرين لباناخ X وَ Y إنهما متشاكلان ايزومترياً إذا وجد تشاكل جبر $F: X \leftrightarrow Y$ يمثل في نفس الوقت تطبيقاً ايزومترياً بين X وَ Y باعتبارهما فضاءين نظيميين.

2. أمثلة لجبور باناخ.

1. الحقل $\mathbb{C}$. تمثل الأعداد العقدية $\{z\}$ أبسط مثال لجبر باناخي وذلك عند إدخال نظيم بالدستور.

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (z = x + iy)$$

تشكل الأعداد العقدية حقلاً نرمز له بِـ $\mathbb{C}$. نلاحظ أن عملية القسمة معرفة من أجل كل عناصر $\mathbb{C}$ عدا الصفر، أي مقلوبة عملية الضرب. سنبين في المستقبل أن $\mathbb{C}$ هو الجبر النظيمي الوحيد الذي يتمتع ببنية الحقل.

2. الجبر C_T. ليكن T فضاء طوبولوجياً لهوسدورف متراصاً. نرمز بِـ: C_T للفضاء الشعاعي المؤلف من مجموعة التوابع العقدية المستمرة $x(t)$ المعرفة على T والمزود بالعمليتين المعتادتين: جمع تابعين وضرب تابع في عدد، وبالنظيم:

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

كنا رأينا ضمن الفصلين الثاني والثالث حالة خاصة من الفضاء C_T حيث كان T قطعة مستقيمة $[a, b]$ من المستقيم الحقيقي. هناك حالة خاصة أخرى هامة للفضاء C_T تمثل في الفضاء $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n)\}$ المؤلف من أشعة عقدية ذات n بعداً أي من توابع على فضاء ذي n نقطة.

إن الجمع والضرب في عدد وضرب عناصر $\mathbb{C}^n$ تنجز بالإحداثيات ، أما النظيم على $\mathbb{C}^n$ فهو معرف بالدستور :

$$\|z\| = \max_{1 \le i \le n} |z_i|$$

إن الفضاء C_T جبر تبديلي لباناخ وحدته هي التابع $e(t) = 1$. يمكن أن نتأكد بسهولة من أن كل المسلمات محققة هنا .

3. الجبر $\mathscr{A}$ للتوابع التحليلية في قرص . نرمز بِـ$\mathscr{A}$ للفضاء الشعاعي المؤلف من التوابع $x(z)$ لمتغير عقدي z ، المعرفة والمستمرة على القرص : $K = \{z : |z| \le 1\}$ والتحليلية داخل هذا القرص . نعرف الضرب في $\mathscr{A}$ كما نعرف الضرب المعتاد للتوابع ، وندخل نظيماً بالدستور :

$$\|x\| = \max_{|z| \le 1} |x(z)|$$

وهذا يجعل من $\mathscr{A}$ جبراً باناخياً تبديلياً له وحدة . إن كل المسلمات بديهية هنا .

4. الجبر l_1 . نرمز بِـl_1 لمجموعة المتتاليات العقدية غير المنتهية في الاتجاهين والقابلة للجمع مطلقاً : $x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ ، والمزودة بالنظيم :

$$\|x\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| \qquad (4)$$

نعرف الجداء $x \cdot y$ لمتتاليتين :

$$x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots)$$

وَ :

$$y = (\dots, y_{-n}, \dots, y_0, \dots, y_n, \dots)$$

على أنه جداء تزويجهما : $z = x * y$ أي المتتالية المعرفة حدودها بالدستور :

$$z_n = (x * y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}\, y_k \qquad (5)$$

إذا ألحقنا بكل متتالية x من l_1 السلسلة المثلثية :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, e^{ikt} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

فإن المتتالية المعرفة بالدستور (5) توافق الجداء $x(t) \cdot y(t)$ للتابعين المحصل عليهما انطلاقاً من المتتاليتين x وَ y . وهكذا فإن الجبر l_1 والجبر W المؤلف من التوابع $x(t)$ التي لها سلاسل فوريي متقاربة مطلقاً، والمزود بالنظيم (4) متطابقان (متشاكلان ايزومترياً) . بفضل ذلك نلاحظ أن التأكد من مسلمات الجبر والفضاء النظيمي لِـ l_1 يصبح سهلاً . لنتأكد مثلاً من المسلمة 7 . من أجل $z = x * y$ لدينا :

$$\|z\| = \sum_n |z_n| = \sum_n \left|\sum_n x_{n-k} \, y_k\right| \leq \sum_n \sum_k |x_{n-k}| \cdot |y_k|$$

$$\leq \sum_k \left(\sum_n \left|x_{n-k}\right|\right) |y_k| = \|x\| \cdot \|y\|$$

من الواضح أن الجبر W تبديلي ؛ وبالتالي فإن الجبر l_1 تبديلي أيضاً . إن وحدة l_1 هي المتتالية e الموافقة للتابع $e(t) = 1$: كل حدود هذه المتتالية منعدمة عدا الحد الذي يحمل الدليل 0 وهذا الحد يساوي 1 .

5. جبر المؤثرات المحدودة. ليكن X فضاء لباناخ . نعتبر الفضاء $\mathcal{L}(X, X)$ المؤلف من المؤثرات الخطية والمستمرة التي تطبق X في نفسه، ونزوده بالعمليات المعتادة التي تعطي مجموع وجداء مؤثرين وكذا جداء مؤثر في عدد (راجع الفصل 4، §5 البنود 1، 2، 3) . عنصر الوحدة في $\mathcal{L}(X, X)$ هو المؤثر المطابق. لنجعل من $\mathcal{L}(X, X)$ جبراً لباناخ بتعريف النظيم، كالمعتاد، بالدستور :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

كنا تأكدنا من المسلمة 7 (راجع الدستور (4) من الفصل 4، §5) . أما البرهان على أن $\mathcal{L}(X, X)$ تام فقد اقترحنا على القارىء القيام به كتمرين

(الفصل 4، 5§، 3) . يمثل الجبر $\mathfrak{L}(X, X)$ واحداً من أهم جبور باناخ غير التبديلية وذات وحدة .

3. المثاليات الأعظمية .

تعريف 4. نعرف مثالي جبر تبديلي X على أنه فضاء جزئي I من X بحيث من أجل كل $y \in I$ وكل $x \in X$ يكون الجداء yx منتمياً لِـ I . يسمى المثالي المؤلف من العنصر الوحيد المنعدم والمثالي المؤلف من الجبر X بأكمله الجبرين التافهين ؛ سوف لن نتعرض لهما في المستقبل . نقول عن مثالي أنه أعظمي إذا لم يكن محتوياً في أي مثالي غير تافه .

لندرس المفاهيم التي أدخلناها في المثال الخاص بالجبر C_T .

ليكن $\mathcal{F}$ جزءا غير خال من المتراص T . تشكل المجموعة :

$$M_{\mathcal{F}} = \{x(t) \in C_T : x(t) = 0, t \in \mathcal{F}\}$$

المؤلفة من التوابع المنعدمة على $\mathcal{F}$ مثالياً من C_T . إن للمثاليات الأعظمية في C_T وصفاً بسيطاً يسمح، اضافة إلى ذلك، بادراك فكرة نظرية جبور باناخ التبديلية .

توطئة 1. مثالي أعظمي في الجبر C_T هو مجموعة توابع من C_T منعدمة عند نقطة صامدة $\tau_0 \in T$.

البرهان .

أ) لتكن $M_{\tau_0} = \{x(t) \in C_T : x(\tau_0) = 0\}$. عندئذ يكون M_{τ_0} مثالياً . لنثبت أنه أعظمي . ليكن $x_0(t) \notin M_{\tau_0}$ أي $x_0(\tau_0) \neq 0$ من أجل كل $y(t) \in C_T$ نضع $z(t) = y(t) - \dfrac{y(\tau_0)\, x_0(t)}{x_0(\tau_0)}$. [illegible] $z(\tau_0) = 0$.

وبالتالي فإن $z(t)$ ينتمي إلى M_{τ_0} . وهكذا، من أجل كل عنصر لا

ينتمي إلى M_{τ_0} ، نرى أن المثالي المولد عن M_{τ_0} وعن هذا العنصر مثالي تافه . وبالتالي فإن M_{τ_0} أعظمي .

ب) وبالعكس ، ليكن M مثالياً أعظميا من C_T .

لنثبت وجود نقطة تنعدم عندها التوابع المنتمية لهذا المثالي . إذا كان الأمر عكس ذلك فإنه ، من أجل كل نقطة $\tau \in T$ ، يوجد تابع $x_\tau(t) \in M$ بحيث $x_\tau(\tau) \neq 0$. بفضل استمرار $x_\tau(t)$ بالنسبة لِـ t ، يوجد جوار U_τ للنقطة τ بحيث $x_\tau(t) \neq 0$ في U_τ . نستخرج من التغطية المفتوحة $T \subset \bigcup_\tau U_\tau$ تغطية منتهية $U_{\tau_1}, ..., U_{\tau_n}$. عندئذ من تعريف المثالي نلاحظ أن :

$$x_0(t) = x_{\tau_1}(t) \cdot \overline{x_{\tau_1}(t)} + ... + \overline{x_{\tau_n}(t)} \cdot x_{\tau_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} |x_{\tau_k}(t)|^2$$

ينتمي إلى M .

بما أن $x_0(t) > 0$ في كل T فإن التابع $\frac{1}{x_0(t)}$ مستمر . ولذا : $M \ni x_0(t) \cdot \frac{1}{x_0(t)} = 1$. لكن المثالي الذي يحوي وحدة الجبر يحوي كل عناصر هذا الجبر ، ذلك لأن $y(t) = y(t) \cdot 1$. ومنه ينتج أن M مثالي تافه ، وهذا يناقض الفرض القائل إنه أعظمي . وبالتالي فإن M مثالي غير تافه .

وهكذا يمكن ايجاد صلة تقابلية بين المثاليات الأعظمية ونقاط الحامل T . وهذا يسمح بتناول التوابع على T كـ «توابع على فضاء المثاليات الأعظمية» . سنثبت (وهو هدف نظرية باناخ التبديلية التي ستعرض فيما يلي) أن مثل هذا الجبر X يمكن أن ينجز بواسطة جبر جزئي من جبر التوابع المستمرة على الفضاء الطوبولوجي المتراص لهوسدورف المؤلف من المثاليات الأعظمية في الجبر X .

§ 2. الطيف والحالة .

لا نفرض الجبر X تبديلياً في هذه الفقرة ، لكن نفرض أن له وحدة . إن اعتبارات هذه الفقرة تشبه كثيراً اعتبارات الفصل 4 ، § 5 .

.1 تعاريف وأمثلة .

تعريف . نقول عن عنصر $x \in X$ إنه يقبل القلب إذا قبل مقلوباً أي إذا وجد عنصر x^{-1} بحيث :

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$$

أما إذا كان الأمر غير ذلك فإننا نقول أن العنصر x لا يقبل القلب . الطيف $\sigma(x)$ لعنصر $x \in X$ هو مجموعة الأعداد العقدية λ التي تجعل العنصر $\lambda e - x$ غير قابل للقلب . إذا كان $\lambda \notin \sigma(x)$ نقول عن النقطة λ إنها نقطة نظامية .

يسمى التابع :

$$R_\lambda : \mathbb{C} \backslash \sigma(x) \to X$$
$$R_\lambda x = x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

المعرف على مجموعة النقاط النظامية لعنصر x حالّة هذا العنصر . نصف القطر الطيفي $r(x)$ لعنصر $x \in X$ هو العدد :

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \tag{1}$$

لنوضح هذه المفاهيم الهـامة من خلال أمثلة .

أ) إذا كان $X = \mathbb{C}$ فإن كل العناصر ما عدا العنصر المنعدم تقبل القلب .

ب) إذا كان $X = C_T$ ، فإن قابلية $x(t)$ للقلب تكافىء أن التابع $x(t)$ يخالف الصفر عند كل نقطة . ثم إن الطيف $\sigma(x)$ يطابق مجموعة قيم $x(t)$ ؛ أما الحالّة R_λ فهي تسـاوي :

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda - x(t)}$$

ونصف القطر الطيفي هو :

$$r(x) = \|x\| = \max_t |x(t)| .$$

جـ) إذا كان $X = \mathcal{L}(Y, Y)$ هو جبر المؤثرات المحدودة، فإن العناصر القابلة للقلب هي المؤثرات القابلة للقلب؛ نلاحظ في هذه الحالة أن الطيف والحالّة يطابقان، على التوالي، طيف وحالّة مؤثر الواردتين في البند 7، 5§، الفصل 4. الواقع أننا ندرس في هذه الفقرة المفاهيم المدخلة بخصوص جبر باناخ المؤلف من المؤثرات الخطية المحدودة، في شكلها العام.

2. خاصيات الطيف.

نظرية 1. 1. من أجل كل تابعية $f(x)$ من الفضاء الثنوي X^*، فإن التابع $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ وَ $F(\lambda) \to 0$ عندما $|\lambda| \to \infty$.

2. إن الطيف $\sigma(x)$ لعنصر x من جبر باناخ X مجموعة غير خالية ومتراصة في $\mathbb{C}$. لدينا المتراجحة:

$$r(x) \leq \|x\| \tag{2}$$

للبرهان على هذه النظرية نحتاج إلى التوطئات الموالية:

توطئة 1. (راجع النظرية 5، 5§، الفصل 4). ليكن x عنصراً من جبر باناخي X نظيمه أصغر من 1. عندئذ يكون العنصر $e - x$ قابلاً للقلب وَ:

$$(e - x)^{-1} = e + x + \dots + x^n + \dots$$

لرؤية ذلك نضع: $s_n = e + x + \dots + x^n$. ومنه:

$$\|s_n - s_{n+k}\| = \|x^{n+1} + \dots + x^{n+k}\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|x\|^{n+i} =$$

$$= \frac{\|x\|^{n+1} - \|x\|^{n+k+1}}{1 - \|x\|} \to 0$$

وبالتالي فإن s_n متتالية لكوشي. بما أن X فضاء تام فإن هذه المتتالية متقاربة نحو عنصر $s \in X_0$. لدينا:

$$s(e-x) = \lim_{n\to\infty} s_n(e-x) = \lim_{n\to\infty} (e - x^{n+1}) = e$$

نبرهن بنفس الطريقة على أن : $(e-x)s = e$

نتيجة. من أجل كل $x \in X$ ، لدينا :

$$(e - tx)^{-1} \to e$$

عندما يؤول t إلى 0 .

لدينا بالفعل :

$$(e - tx)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(e + tx + \dots + (tx)^n\right) = e + 0(t)$$

توطئة 2. (راجع النظرية 4 ، 5 § ، الفصل 4) . ليكن x_0 عنصراً قابلاً للقلب وَ ؛ $\|\Delta x\| \leq \|x_0^{-1}\|^{-1}$. عندئذ يكون $x_1 = x_0 + \Delta x$ عنصراً قابلاً للقلب ولدينا :

$$x_1^{-1} = (e + x_1^{-1}\Delta x)^{-1} x_0^{-1}$$

ذلك أن :

$$x_1 = x_0 + \Delta x = x_0(e + x_0^{-1}\Delta x) = x_0(e - x)$$
$$\|x\| = \|- x_0^{-1}\Delta x\| < 1$$

بتطبيق التوطئة 1 نحصل على :

$$x_1^{-1} = (e - x)^{-1} \cdot x_0^{-1}$$

وهو المطلوب .

نتيجة 1. إن مجموعة العناصر القابلة للقلب لجبر باناخي مجموعة مفتوحة (بالنسبة للطوبولوجيا النظيمية لجبر باناخي) . أما مجموعة العناصر غير القابلة للقلب فهي مغلقة .

نتيجة 2. إن الحالّة $x(\lambda)$ تابع مستمر لِـ λ على $C\backslash\sigma(x)$.

ذلك أن :

$$x(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (\lambda_0 e - x + \Delta\lambda e)^{-1} = \left(e + \Delta\lambda x(\lambda_0)\right)^{-1} x(\lambda_0) \to x(\lambda_0)$$

عندما يؤول $\Delta\lambda$ إلى 0 وهذا اعتماداً على نتيجة التوطئة 1 .

توطئة 3. (راجع البند 7 ، § 5 ، الفصل 4) . ليكن λ وَ $\mu \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$. عندئذ :

أ) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = R_\mu x \cdot R_\lambda x$

ب) $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$ (متطابقة هيلبرت)

البرهان .

أ) لدينا :

$$R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} = [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1}$$
$$= [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} = R_\mu x \cdot R_\lambda x$$

ب) بالاعتماد على أ) وعلى تعريف R_λ وَ R_μ لدينا :

$$R_\lambda x = (\mu e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x$$
$$R_\mu x = (\lambda e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x$$

ومنه :

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu e - \lambda e) R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$$

وهو المطلوب .

نتيجة . إذا كان $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ فإن $x'\lambda(_0) = - x^2(\lambda_0)$

نستنتج من ب) ومن النتيجة 2 للتوطئة 2 :

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda \to \lambda_0} x(\lambda) \cdot x(\lambda_0) = -x^2(\lambda_0)$$

لنثبت الآن النظرية.

1. لتكن $f(x)$ تابعية خطية مستمرة لِـ x أي $f(x) \in X^*$. نضع: $F(\lambda) = f(x(\lambda)) = f(R_\lambda x)$. بفضل نتيجة التوطئة 3 لدينا من أجل $\lambda_0 \not\in \sigma(x)$:

$$F'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} f\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) =$$

$$= f\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) = -f(x^2(\lambda_0))$$

وهكذا أثبتنا أن $F(\lambda)$ تحليلي.

من جهة أخرى، من أجل $|\lambda| > \|x\|$، لدينا بفضل 1:

$$|F(\lambda)| \le \|f\|_{X^*} \cdot \|x(\lambda)\|_X = \|f\|_{X^*} \|(\lambda e - x)^{-1}\| = \frac{\|f\|_{X^*}}{|\lambda|} \left\| \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\|$$

$$\le \frac{C}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$$

2. أ) إن الطيف $\sigma(x)$ غير خال. ليكن $\sigma(x) = \Phi$. عندئذ من 1، يأتي من أجل كل عنصر $f \in X^*$، أن $F(\lambda)$ تابع صحيح يؤول إلى الصفر عندما يؤول $|\lambda|$ إلى ∞. وهذا يعني أن $F(\lambda) \equiv 0$ أي أن $f((\lambda e - x)^{-1}) = 0$ من أجل كل $f \in X^*$. وبالتالي ينتج من نتيجة نظرية هان - باناخ (البند 3، 1 §، الفصل 4) أنه يجب أن يكون $x^{-1} = 0$ وهذا أمر مستحيل.

ب) إن الطيف $\sigma(x)$ متراص. إذا كان $|\lambda| > \|x\|$ فإن التوطئة 1 تبين أن العنصر $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$ يقبل القلب، ومنه يأتي أن الطيف $\sigma(x)$ محدود، كما نستنتج المتراجحة (2). يتضح من التوطئة 2 مباشرة أن $\sigma(x)$ مغلق: إذا كانت λ_0 نقطة نظامية فإن الجوار $|\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|$ يتألف فقط من النقاط النظامية لأن:

$$(\lambda_0 + \Delta\lambda)e - x = \lambda_0 e - x + \Delta\lambda e$$

نقدم فيما يلي نتيجتين من النظرية 1.

نتيجة 1. إذا كان جبر لباناخ على الحقل $\mathbb{C}$ هو نفسه حقلاً، فإنه متشاكل ايزومترياً مع $\mathbb{C}$.

لإثبات ذلك نفرض أن X «حقل لباناخ» وليكن x عنصراً اختيارياً من X. لنبحث عن العدد λ الذي من أجله يكون العنصر $x - \lambda e$ غير قابل للقلب، وبالتالي منعدماً. لدينا إذن $x = \lambda e$. من الواضح أن الصلة $\lambda \leftrightarrow x$ تشاكل من X على $\mathbb{C}$. بما أن $\|e\| = 1$ يأتي $|\lambda| = \|x\|$. ومنه يتضح أن الصلة المعتبرة تطبيق ايزومتري من X على $\mathbb{C}$.

نتيجة 2. إن طيف كل مؤثر غير منعدم $A \in \mathfrak{L}(X, X)$ طيف غير خال.

كنا قدمنا نص هذه النتيجة دون برهان في 5§ من الفصل 4.

3. نظرية نصف القطر الطيفي.

نظرية 2. لدينا الدستور التالي الخاص بنصف القطر الطيفي:

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \tag{3}$$

لرؤية ذلك نعتبر عنصراً f كيفياً من X^{**}. من النظرية 1 نرى أن التابع $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$. بصفة خاصة فإن $F(\lambda)$ تحليلي في الساحة $|\lambda| > \|x\|$.

بفضل التوطئة 1، لدينا في هذه الساحة:

$$x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

ومنه :

$$F(\lambda) = f\big(x(\lambda)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}$$

إن هذا التفكيك ، القائم من أجل $\|x\| < |\lambda|$ بفضل التوطئة 1 ، قائم أيضاً من أجل $r(x) < |\lambda|$ وذلك بفضل نظرية الوحدانية الخاصة بالتوابع التحليلية . وبالتالي :

$$\sup_n \left| \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}} \right| < \infty$$

كنا أثبتنا بأن مجموعة الأشعة $\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$ محدودة بضعف ؛ وبالتالي فهي محدودة بقوة (تسمى هذه النتيجة أحيانا نظرية باناخ-ستينهاوس وقد برهنا عليها ضمن 3 § من الفصل 4؛ للمزيد من التفصيل بخصوص هذه المسألة راجع الفصل الثاني من المؤلف [21]) . وهكذا يوجد عدد $c(\lambda)$ يتعلق بـ λ بحيث :

$$\left\| \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\| < c(\lambda)$$

ومنه : $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda|$ من أجل كل λ يحقق $r(x) < |\lambda|$ ؛ إذن :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x)$$

من جهة أخرى إذا كان $\lambda \in \sigma(x)$ فإن $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ لأن العنصر : $\lambda^n e - x^n$ يقبل بطبيعة الحال القسمة على $\lambda e - x$.

من النظرية 1 يأتي : $|\mu| \leq \|x\|$ في حالة انتماء μ إلى $\sigma(x)$. بوضع $\lambda = \lambda^n$ نستخلص أنه إذا كان $\lambda \in \sigma(x)$ فإن :

$|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ ، وبالتالي : $r(x) \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

انتهى برهان النظرية .

§3. بعض النتائج التمهيدية.

جمعنا في هذه الفقرة سلسلة من النتائج التمهيدية التي لا يتطلب برهانها سوى استخدام بعض التقنيات المعروفة.

1. نظرية جبر النسبة. ليكن X جبراً تبديلياً لباناخ له وحدة وليكن I مثالياً لِـ X.

نشير في البداية أن I يتألف فقط من عناصر غير قابلة للقلب لأنه إذا كان $z \in I$ قابلاً للقلب فإن، من أجل كل $x \in X$، لدينا: $x = (xz^{-1})z \in I$، وهذا يعني أن I مثالي تافه. من جهة أخرى، وبفضل التوطئة 1، §2 فإن المسافة بين الوحدة وأي عنصر غير قابل للقلب، وبالتالي المسافة بين الوحدة وكل مثالي أكبر من 1.

نعتبر الآن فضاء النسبة X/I (راجع §1، الفصل 3) وندخل عليه عملية الضرب وذلك بتعريف جداء صفين ξ وَ η من X/I على أنه الصف ξ الذي يحوي العنصر $x \cdot y$ حيث x وَ y ممثلان لِـ ξ وَ η على التوالي. (تأكد من أن النتيجة لا تتغير عند تعويض x وَ y بأيّ عنصرين آخرين ينتميان إلى نفس الصفين ξ وَ η، وأن عملية «الضرب» المدخلة بهذه الطريقة تحقق المسلمات من 1 إلى 5 من §1). وهكذا يصبح الفضاء X/I جبراً تبديلياً. يسمى هذا الجبر جبر نسبة X على المثالي I.

ندخل على X/I نظيماً بوضع:

$$\|\xi\| = \inf_{y \in I} \|x + y\|$$

حيث x ممثل لِـ ξ.

لدينا النظرية التالية:

نظرية 1. إذا كان X جبراً لباناخ و I مثالياً مغلقاً في X، فإن جبر النسبة X/I هو أيضاً جبر لباناخ.

علينا أن نثبت : 1) بأن التابعية $\|\xi\|$ تحقق مسلمات النظيم .

2) بأن X/I فضاء تام من أجل هذا النظيم .

1) أ) $\|\xi\| = \inf_{y\in I} \|x+y\| \geq 0$ لأن النظيم غير سالب . من جهة أخرى ، $\|0\| = \inf_{y\in I} \|0+y\| = 0$. ليكن $\|\xi_0\| = 0$. عندئذ : $\inf_{y\in I} \|x_0+y\| = 0$ ، $x_0 \in \xi_0$. وهذا يعني وجود متتالية $I \ni y_n$ بحيث : $\|x_0+y_n\| \to 0$ أي $-y_n \to x_0$. بما أن I مغلق فإن العنصر x_0 يجب أن ينتمي إلى I ، أي $\xi_0 = 0$.

وهكذا : $\|\xi\| \geq 0$ وتتحقق المساواة $\|\xi\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $\xi = 0$.

ب)

$$\|\lambda\xi\| = \inf_{y\in I} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf_{y\in I} \left\|x + \frac{y}{\lambda}\right\| = |\lambda| \cdot \|\xi\|$$

وهذا من أجل $\lambda \neq 0$ ؛ أما من أجل $\lambda = 0$ فالمساواة بديهية .

جـ)

$$\|\xi+\eta\| = \inf_{z\in I} \|x+y+z\| = \inf_{u,v\in I} \|x+u+y+v\| \leq$$

$$\leq \inf_{u\in I} \|x+u\| + \inf_{v\in I} \|y+v\| = \|\xi\| + \|\eta\|$$

$$\|\xi\eta\| = \inf_{z\in I} \|xy+z\| \leq \inf_{u,v\in I} \|(x+u)(y+v)\| \leq$$

$$\leq \inf_{u\in I} \|x+u\| \cdot \inf_{v\in I} \|y+v\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|$$

ر) $E = e + I$ أي : $E^2 = e^2 + I = e + I$. وبالتالي $E^2 = E$ ومنه يأتي أن : $\|E\| = \|E^2\| \leq \|E\|^2$. إلاَّ أن العنصر E لايكافىء الصفر لأن الجوار للنقطة e ، كما لاحظنا أعلاه ، لا يحتوي عناصر غير قابلة للقلب ، وهي التي تؤلف المثالي I . إذن $\|E\| \geq 1$. ومن جهة أخرى : $\|E\| = \inf_{y\in I} \|e+y\|$ ، أي $\|E\| \leq 1$. وبالتالي $\|E\| = 1$.

2) لنثبت الآن بأن $X/_I$ تام. لتكن $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ متتالية لـكوشي، أي $\|\xi_{n+m} - \xi_n\| < \varepsilon$ من أجل $N(\varepsilon) < N$ وَ $1 \le m$. نختار $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ والأرقام n_k بحيث يكون $\|\xi_{n_k+m} - \xi_{n_k}\| \le \frac{1}{2^k}$.

لدينا: $\|\xi_{n_2} - \xi_{n_1}\| \le \frac{1}{2}$. نختار ممثلين $x_1 \in \xi_{n_1}$ وَ $x_2 \in \xi_{n_2}$ بحيث $\|x_2 - x_1\| \le 1$.

ننشىء بطريقة مماثلة x_3، ...، x_k، ... (حيث $x_k \in \xi_{n_k}$) بحيث يكون: $\|x_k - x_{k-1}\| \le \frac{1}{2^{k-1}}$. إن المتتالية x_k متتالية لكوشي في X. لكن الفرض يقول أن X تام. توجد إذن نهاية $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. لنعتبر الصف: $\xi_0 = x_0 + I$. لدينا:

$$\|\xi_{n_k} - \xi_0\| = \inf_{y\in I} \|x_k - x_0 + y\| \le \|x_k - x_0\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

وبالتالي: $\xi_{n_k} \to \xi_0$ أي أن $X/_I$ فضاء تام. انتهى برهان النظرية.

2. ثلاث توطئات. سنحتاج في المستقبل إلى ثلاث توطئات تنتسب على التوالي إلى نظرية المجموعات والجبر والطوبولوجيا.

توطئة 1. إن كل مثالي غير تافه محتو بالضرورة في مثالي أعظمي.

يعتمد برهان هذه التوطئة على توطئة زورن الواردة في الفصل 1، §4، البند 8.

لرؤية ذلك نرمز بـJ لمجموعة المثاليات التي تحوي I. إن J مجموعة مرتبة جزئياً بعلاقة الاحتواء: $I_1 \le I_2$ في حالة $I_1 \subseteq I_2$. من أجل كل مجموعة مرتبة كلية $\{I_\alpha\}$ من J فإن الإتحاد $\bigcup_\alpha I_\alpha$ مثالي غير تافه يمثل الحد الأعلى للمجموعة $\{I_\alpha\}$. وبالتالي ينتج من توطئة زورن أن هناك عنصراً أعظمياً يلي I، أي أن I ينتمي إلى مثالي أعظمي.

نتيجة. إذا لم يكن الجبر X حقلاً، فإنه يحتوي مثالياً أعظمياً. زيادة على ذلك فإن كل عنصر غير قابل للقلب، عدا العنصر المنعدم، ينتمي بالضرورة إلى مثالي أعظمي.

لنأخذ عنصراً كيفياً غير قابل للقلب $x_0 \neq 0$ ونعتبر المجموعة $X \cdot x_0$. إنها تشكل بالضرورة مثالياً. وهذا المثالي يحوي العنصر x_0 ولايحوي الوحدة e لِـX، أي أنه مثالي غير تافه. بفضل التوطئة 1، نرى أن هذا المثالي محتو في مثالي أعظمي.

توطئة 2. لكي يكون مثالي I محتوياً في مثالي غير تافه $I' \subset X$ يلزم ويكفي أن يكون الجبر $X/_I$ قابلاً لمثالي غير تافه.

نثبت أن الشرط لازم. ليكن $I \subset I' \subset X$، $I \neq I'$، $I' \neq X$. نعتبر في الصف $\xi = x + I$ الصف الجزئي المؤلف من ξ' التي ينتمي من أجلها x' إلى I'. من السهل أن نرى بأننا نحصل حينئذ على مثالي غير تافه في $X/_I$. نبين بنفس الطريقة كفاية الشرط.

توطئة 3. إن ملاصق مثالي I مثالي (غير تافه).

بما أن I يتألف فقط من عناصر شاذة فإن ملاصقة غير تافه، أما كوْن هذا الملاصق مثالياً فينتج من استمرار العمليات الجبرية.

نتيجة. كل مثالي أعظمي مثالي مغلق.

4 §. النظريات الأساسية

يرمز X في هذه الفقرة إلى جبر تبديلي لباناخ له وحدة.

1. التابعيات الخطية والمستمرة والضربية والمثاليات الأعظمية.

تعريف 1. نقول عن تابعية خطية مستمرة f على الجبر X لباناخ إنها ضربية إذا كان:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

من أجل كل x وَ y .

نرمز لمجموعة التابعيات الخطية والمستمرة والضربية غير التافهة بِـ $\mathcal{M}$. نلاحظ أنه يمكن تعريف تابعية خطية ومستمرة وضربية على أنها تماثل مستمر من X في $\mathbb{C}$.

إذا كان $f \in \mathcal{M}$ فإن :

$$|f(x)| \leq \|x\| \tag{2}$$

لأنه إذا كان $\|x_0\| = 1$ من أجل عنصر معين x_0 فإن :

$$|f(x_0)| = \lambda > 1$$

وحينئذ :

$$|f(x_0^n)| = \lambda^n \to \infty$$

أي أن f غير مستمر وهذا يناقض الفرض .

من جهة أخرى :

$$f(e) = f(e^2) = \left(f(e)\right)^2$$

ومنه يأتي أن $f(e) = 0$ أي أن f تافه ، أو أن :

$$f(e) = 1 \tag{3}$$

ينتج من (2) وَ (3) أن التابعيات الخطية والمستمرة والضربية غير التافهة لها نظيم يساوي 1 الأمر الذي يجعل $\mathcal{M}$ مجموعة جزئية من سطح كرة الوحدة في الفضاء الثنوي X^* .

يسمى الفضاء الجزئي الذي تنعدم فيه التابعية f (أي مجموعة العناصر $x \in X$ بحيث $f(x) = 0$) نواة f ويرمز له بِـ $\text{Ker} f$.

توطئة 1. إذا كان $f \in \mathcal{M}$ فإن النواة $\text{Ker} f$ مثالي أعظمي ذلك أنه إذا كان $y \in I = \text{Ker} f$ وَ $x \in X$ فإن :

$$f(y \cdot x) = f(y) \cdot f(x) = 0$$

أي $y \cdot x \in \text{Ker} f$.

وبالتالي فإن $\text{Ker} f$ مثالي . لنثبت أنه أعظمي . نفرض أن الأمر عكس ذلك . حينئذ يمكن توزيع $\text{Ker} f$ إلى أن نحصل على مثالي $X \neq I$ يحوي عنصراً $\text{Ker} f \ni x_0$. لكن البعد المرافق لِـ $\text{Ker} f$ يساوي 1 (راجع الفصل 3 ، § 1 ، البند 6) . وبالتالي يمكن كتابة العنصر e على الشكل :

$$e = \lambda x_0 + y$$

حيث $\text{Ker} f \ni y$. ومنه يأتي أن $I \ni e$. إذن $I = X$. يبين التناقض المحصل عليه نتيجة التوطئة .

توطئة 2. من أجل كل مثالي أعظمي M ، يمكن انشاء تابعية خطية مستمرة ضربية وحيدة $M \ni f$ بحيث : $M = \text{Ker} f$.

ذلك أن نتيجة التوطئة 3 ، § 3 تبين أن M مثالي مغلق . بتطبيق النظرية 1 من § 3 نحصل على أن X/M جبر لباناخ . لكن ذلك يبين حسب التوطئة 2 ، § 3 بأن X/M لا يقبل مثاليات غير تافهة أي أن الجبر X/M لا يحوي عناصر شاذة غير منعدمة (راجع نتيجة التوطئة 1 ، § 3) . وبالتالي فإن X/M يمثل في آن واحد حقلاً وجبراً لباناخ .

تثبت النتيجة 1 للنظرية 1 ، § 2 أن الحقل X/M وَ $\mathbb{C}$ متشاكلان . وهذا يعني ، تعريفاً ، أن من أجل كل $X \ni x$ يوجد عدد $\mathbb{C} \ni f(x)$ وحيد بحيث :

$$x = f(x) \cdot e + u \quad , \quad u \in M \tag{4}$$

لنثبت أن f تماثل . نبيِّن مثلاً أن $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. لدينا :

$$x = f(x) \cdot e + u \quad , \quad u \in M$$

$$y = f(y) \cdot e + v \quad , \quad v \in M$$

ومنه :

$$xy = f(x) \cdot f(y) \cdot e + w \quad , \quad w \in M$$

إن ذلك يعني بالضبط بأن $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. كما نبين بنفس الطريقة العلاقتين :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان $x \in M$ فإننا نستنتج من (4) أن $f(x) = 0$ ؛ كما أنه إذا كان $x = e$ فإن $f(x) = 1$. انتهى برهان التوطئة .

نرى إذن وجود صلة تقابلية بين المثاليات الأعظمية M والتابعيات f المنتمية لِـ M . طبقاً لما توفر لدينا الآن نصطلح على أن نرمز بِـ f_M لتابعيات M وبِـ : M للمثاليات الأعظمية الموافقة لها . سنرمز بنفس الحرف $\mathcal{M}$ لمجموعة المثاليات الأعظمية $\{M\}$ ولمجموعة التابعيات الموافقة لها $\{f_M\}$.

ليكن x عنصراً من X . نعتبر التابع $x(M)$ على $\mathcal{M}$ المعرف بالدستور :

$$x(M) = f_M(x) \tag{5}$$

(يلحق التابع $x(M)$ المشيد انطلاقاً من العنصر x بكل مثالي أعظمي M العدد $f_M(x)$ ، أي صورة العنصر x بواسطة التماثل الموافق للمثالي M .) حصلنا بهذه الطريقة على إنجاز لعناصر الجبر X بواسطة التوابع المعرفة على المجموعة $\mathcal{M}$ ؛ وهو الانجاز الوارد ذكره في نهاية الفقرة 1 § .

2. طوبولوجيا على المجموعة $\mathcal{M}$. النظريات الأساسية . يبقى أن نبين بأن المجموعة $\mathcal{M}$ متراصة بمفهوم طوبولوجيا معينة ، وبأن التوابع $x(M)$ مستمرة بمفهوم هذه الطوبولوجيا .

كنا ذكرنا أعلاه بأن المجموعة $\mathcal{M}$ مجموعة جزئية من سطح كرة الوحدة . من جهة أخرى برهنا في الفصل 4 ، 3 § ، 4 في حالة فضاء قابل للفصل على القضية التالية :

إن كرة الوحدة في الثنوي X^* لفضاء باناخي متراصة من أجل الطوبولوجيا * – الضعيفة .

نجد البرهان على هذه النظرية في الحالة العامة ، مثلاً ، في [21] .

نذكّر أن الطوبولوجيا * – الضعيفة معرفة بجماعة الجوارات :

$$\cup_{x_1, \ldots, x_m; \delta}(f_0) = \{f \in X^* : |f(x_k) - f_0(x_k)| < \delta \ , \ k = 1, \ldots, m\} \quad (6)$$

سنعتبر المجموعة $\mathcal{M}$ بالنسبة للطوبولوجيا * – الضعيفة. ينتج عندئذ تراص $\mathcal{M}$ من النتيجة التي ذكّرنا بها آنفاً ومن التوطئة التالية.

توطئة 3. إن المجموعة $\mathcal{M}$ جزء مغلق من كرة الوحدة في X^*، كما أن التوابع $x(M)$ مستمرة على $\mathcal{M}$.

لإثبات ذلك نعتبر تابعية f_0 تنتمي إلى ملاصق $\mathcal{M}$. وهذا يعني أن في كل جوار أساس للتطبيق f_0 يوجد تماثل f_M مولد عن مثالي أعظمي M. نعتبر الجوار $\cup_{x, y, x+y, \delta}(f_0)$. بفضل (6) وتعريف $x(M)$ لدينا :

$$\begin{cases} |f_M(x) - f_0(x)| < \delta \\ |f_M(y) - f_0(y)| < \delta \\ |f_M(x+y) - f_0(x+y)| < \delta \end{cases} \quad (7)$$

لكن f_M تماثل أي أن : $f_M(x+y) = f_M(x) + f_M(y)$. وبالتالي يأتي من (7) :

$$f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$$

يمكن أن نثبت بطريقة مماثلة أن $f_0(\alpha x) = \alpha f_0(x)$ وَ : $f_0(xy) = f_0(x) \cdot f_0(y)$ (يجب أخذ الجوارات $\cup_{x, \alpha x, \delta}(f_0)$ وَ $\cup_{x, y, xy, \delta}(f_0)$)

وهذا يعني أن f تابعية خطية مستمرة ضربية. من ناحية أخرى، بأخذ الجوار $\cup_{e, \delta}(f_0)$ نحصل على $f_0(e) = 1$ أي أن f_0 غير تافه. إذن $f_0 \in \mathcal{M}$ أي أن $\mathcal{M}$ مغلق.

لنثبت الآن استمرار التابع $x_0(M) = f_0(x)$ على $\mathcal{M}$.

ليكن $M_0 \in \mathcal{M}$. من أجل $\varepsilon > 0$ معطى نعتبر الجوار $\cup_{x_0, \varepsilon}(M_0)$. إذا كان $M \in \cup_{x_0, \varepsilon}(M_0)$. فإن لنا حسب (6) :

$$|f_M(x_0) - f_{M_0}(x_0)| = |x_0(M) - x_0(M_0)| < \varepsilon$$

وهذا يعني استمرار التابع $x_0(M)$ عند النقطة M_0 . انتهى برهان التوطئة .

نظرية 1. يعرف التطبيق $x \to x(M)$ تماثلاً من الجبر X في الجبر $C_{\mathcal{M}}$ المؤلف من التوابع المستمرة على فضاء هوسدورف المتراص $\mathcal{M}$ المؤلف بدوره، من المثاليات الأعظمية في الجبر X ؛ زيادة على ذلك لدينا :

$$\|x(M)\| = \max |x(M)| \leq \|x\| \tag{8}$$

يتبين مما سبق أنه لم يبق سوى البرهان على العلاقة (8) .

لنلاحظ حسب تعريف $f_M(x)$، من أجل كل M ، أن العنصر : $x - f_M(x)e$ ينتمي إلى المثالي M ، أي أنه غير قابل للقلب . وهذا يعني أن : $f_M(x) \in \sigma(x)$. من جهة أخرى ، بأخذ عدد كيفي $\lambda_0 \in \sigma(x)$ نرى بأن $x - \lambda_0 e$ عنصر غير قابل للقلب وينتمي إذن إلى مثالي أعظمي M . وفي هذه الحالة يكون : $0 = f_M(x - \lambda_0 e)$ أي $\lambda_0 = f_M(x)$.

وهكذا فإن صورة $\mathcal{M}$ بواسطة التطبيق $x(M)$ يطابق $\sigma(x)$. وبالتالي ، وبفضل الجزء الثاني من النظرية 1، 2§، تتضح صحة المتراجحة (8) .

يبقى أن ندقق النظرية 1 باعتبار افتراضات مختلفة على الجبر X . لندخل المفاهيم الثلاثة التالية .

تعريف 2. يُسمى التقاطع $R = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ لكل المثاليات الأعظمية جذر X . إذا كان $R = \{0\}$ نقول (تجاوزاً) أن X لا يقبل جذراً. نقول عن جبر باناخي X أنه نظامي إذا كان $\|x^2\| = \|x\|^2$. ونقول إنه متناظر إذا استطعنا من أجل كل تابع $x(M)$ إيجاد عنصر $y \in X$ بحيث $y(M) = \overline{x(M)}$ (ترمز المدّة هنا فوق $x(M)$ لمرافق العدد العقدي .)

نظرية 2. أ) إذا لم يحو جذر الجبر X العنصر المنعدم فإن التطبيق $x \to x(M)$ تقابلي .

ب) إذا كان الجبر X نظامياً فإنه متشاكل ايزومترياً مع صورته في $C_{\mathcal{M}}$ ؛ بصفة خاصة، فإن X لايقبل جذراً.

ج) إذا كان الجبر X تناظرياً فإن صورته بواسطة التطبيق: $x \to x(M)$ كثيف أينما كان في $C_{\mathcal{M}}$.

د) إذا تمتع الجبر X بالخاصيتين ب) وَ جـ) فإنه يصبح متشاكل ايزومترياً مع $C_{\mathcal{M}}$.

البرهان. لنثبت في البداية المقولة الأخيرة بافتراض أن الأخريات قد تم البرهان عليها. تبين ب) أن الصلة التقابلية $x \leftrightarrow x(M)$ تطبيق ايزومتري: $\|x\|_X = \max\limits_{M \in \mathcal{M}} |x(M)|$. من ج) يأتي أن المجموعة $\{x(M)\}$ كثيفة أينما كان في $C_{\mathcal{M}}$. لكن X فضاء تام. إذن (نظراً لكون النظيمان في X وفي $C_{\mathcal{M}}$ متساويين) فإن $\{x(M)\}$ فضاء تام أيضاً أي أن $C_{\mathcal{M}} = \{x(M)\}$.

لنثبت أ). ليكن $x_0 \neq 0$ وَ $x_0(M) \equiv 0$ على $\mathcal{M}$. إن ذلك يعني بأن $f_M(x_0) = 0$ من أجل كل M أي $x_0 \in \operatorname{Ker} f_M$ من أجل كل M وبالتالي $x_0 \in R$.. لكن $R = \{0\}$ ومنه $x_0 = 0$. ومن هذا التناقض نحصل على أ).

للبرهان على ب) نلاحظ أن المساواة: $\|x^2\| = \|x\|^2$ تستلزم مباشرة $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \|x\|$.

بتطبيق نظرية نصف القطر الطيفي (النظرية 2، § 2) نحصل على:

$$r(x) = \|x\| \tag{9}$$

من (9) يأتي في البداية أن الجذر مؤلف من العنصر الوحيد المنعدم لأن فرض $R \ni x_0 \neq 0$ يؤدي إلى $f_M(x_0) = 0$ من أجل كل M، أي $\sigma(x) = \{0\}$ وذلك يناقض الفرض: $r(x_0) = \|x_0\| \neq 0$.

من جهة أخرى ينتج من (9) أن التطبيق $x \leftrightarrow x(M)$ الذي يمثل تشاكلاً من X على الجبر الجزئي الموافق له $\{x(M)\}$ من $C_{\mathcal{M}}$، تطبيق ايزومتري، لأن (8) تبيّن أن:

$$\|x(M)\|_{C_{\mathcal{M}}} = \max_{M \in \mathcal{M}} |x(M)| = r(x) = \|x\|$$

يتطلب البرهان على ج) استخدام واحدة من أبرز نظريات الجبر والتحليل وهي نظرية ستون-فايرشتراس (Stone-Weierstrass) التي تقول :

ليكن C_T الجبر الباناخي المؤلف من التوابع المستمرة على متراص T ، وليكن A جبراً جزئياً من C_T بحيث :

1) وحدة C_T (أي التابع $e(t) = 1$) تنتمي إلى A .

2) يفصل الجبر A نقاط T (أي من أجل كل t_1 وَ t_2 مختلفين ، يوجد تابع $x(t) \in A$ بحيث $x(t_1) \neq x(t_2)$) .

3) الجبر A قار بالنسبة للتطبيق $x(t) \leftrightarrow \overline{x(t)}$ (أي أن $x(t) \in A$ يستلزم $\overline{x(t)} \in A$) .

إذا تحققت هذه الشروط يكون A كثيفاً أينما كان في C_T .

بخصوص البرهان على نظرية ستون-فايرشتراس يمكن للقارىء الرجوع إلى [13] ، [21] ، [26] .

لنبرهن الآن على ج) . لتكن $A = \{x(M)\}$ صورة X بواسطة التطبيق $x \to x(M)$.

نستنتج من (4) مباشرة أن : $e \to e(M) = 1$ أي أن $A \ni e(M) = 1$. ليكن M_1 وَ M_2 مثاليين أعظميين مختلفين . ذلك يعني وجود عنصر x_0 ينتمي إلى M_1 ولاينتمي إلى M_2 (أو العكس) . عندئذ :

$$x_0(M_1) = f_{M_1}(x_0) = 0$$

$$x_0(M_2) = f_{M_2}(x_0) \neq 0$$

وهذا يعني أن A يفصل نقاط $\mathcal{M}$. من جهة أخرى ، يتبين من التعريف نفسه أن الجبر A قار بواسطة التطبيق $x(t) \to \overline{x(t)}$. بتطبيق نظرية ستون-فايرشتراس نحصل على ج) . انتهى برهان النظرية .

3. نظرية فينر (Wiener)؛ تمارين. إن لنظرية جبور باناخ العديد من التطبيقات المختلفة .

نذكّر ببعض النتائج المتعلقة بالجبر والتحليل والتي حصلنا عليها من خلال دراستنا هذه.

إذا كان جبر لباناخ على الحقل $\mathbb{C}$ يمثل حقلاً فإنه متشاكل ايزومترياً مع $\mathbb{C}$.

إن طيف كل مؤثر محدود وغير منعدم في فضاء لباناخ مجموعة غير خالية.

من أجل كل مؤثر محدود A في فضاء لباناخ X، فإن النهاية:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$$

موجودة، وطيف A محتو بأكمله في القرص $r(A)$.

لنثبت الآن باستخدام نظرية الجبور التبديلية لباناخ النظرية التالية لفينر (Wiener):

إذا كان تابع $x(\theta)$ قابلاً للتمثيل بسلسلة لفوريي متقاربة مطلقاً:

$$x(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, e^{ik\theta}$$

ولا ينعدم أبداً فإن التابع $y(\theta) = \frac{1}{x(\theta)}$ يقبل أيضاً التمثيل بواسطة سلسلة لفوريي متقاربة مطلقاً.

نعتبر الجبر l_1 المؤلف من السلاسل المتقاربة مطلقاً (راجع التمرين 4، البند 2، § 1). نبحث عن الفضاء $\mathcal{M}$ لِـ l_1. من الواضح أنه يكفي لتعريف تماثل من l_1 في $\mathbb{C}$ أن يعرّف من أجل التابع $x_0(t) = e^{it}$ لأنه يمتد حينئذ تباينياً إلى l_1. نضع $f_M(x_0) = f_M(e^{it}) = \zeta$. عندئذ:

$$f_M(x_0^{-1}) = f_M(e^{-it}) = \zeta^{-1}$$

من (2) يأتي:

$$|\zeta| = |f_M(x_0)| \leq \|x_0\| = 1$$

$$\left|\frac{1}{\zeta}\right| = |f_M(x_0^{-1})| \leq \|x_0^{-1}\| = 1$$

ومنه $1 = |\zeta|$ أي $e^{i\theta} = \zeta$. إذن فإن المجموعة $\mathcal{M}$ على صلة تقابلية بالدائرة $1 = |\zeta|$. يعني عدم انعدام التابع $x(\theta) = \sum_k x_k e^{ik\theta}$ في المجال $-\pi \leq \theta < \pi$ أن المتتالية $x = (..., x_{-n}, ..., x_0, ..., x_n, ...)$ لاينتمي إلى أي مثالي أعظمي . بالاعتماد على نتيجة التوطئة 1 ، 3 § يتبين إذن أن هذه المتتالية قابلة للقلب في الجبر l_1 . نضع :

$$y = x^{-1} = (..., y_{-n}, ..., y_0, ..., y_n, ...)$$

حينئذ :

$$y(M) = f_M(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ik\theta} = f_M(x^{-1}) = \frac{1}{f_M(x)} = \frac{1}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\theta}}$$

وهو المطلوب .

هناك تطبيقان آخران هامان لنظرية جبور باناخ وهما النظرية الطيفية الخاصة بالمؤثرات المحدودة ونظرية ستون–تشاش (Stone-Čech) . نعرض هاتين النظريتين اسفله في شكل تمارين (التمرينان 8 وَ 9) .

تمارين . 1. أ) أثبت أن فضاء المثاليات الأعظمية في الجبر $\mathcal{A}$ (راجع المثال 3 ، البند 2 ، 1 §) يمكن وضعها على صلة تقابلية ومستمرة مع نقاط قرص الوحدة : $|z| \leq 1$.

ب) أثبت أن الجبر $\mathcal{A}$ نظامي (وبالتالي ليس له جذر) لكنه غير متناظر .

2. ما الذي يمنعنا من التأكيد على أن الجبر l_1 (راجع المثال 4 ، البند 2 § 1) متشاكل ايزومترياً مع الفضاء $C_{\mathcal{M}}$ ، أي مع فضاء التوابع المستمرة على الدائرة $1 = |\zeta|$.

3. أثبت أن لدينا النظرية التالية: ليكن $x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ وَ $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty$ وَ $x(z) \neq 0$ من أجل $|z| \leq 1$.

عندئذ يكون التابع $y(z) = \frac{1}{x(z)}$ قابلاً للنشر حسب سلسلة تايلور متقاربة مطلقاً من أجل $|z| \leq 1$.

4. نرمز بِـ$C^n[a, b]$ لمجموعة التوابع $x(t)$ القابلة للإشتقاق باستمرار n مرة على القطعة $[a, b]$.

أ) أثبت أن $C^n[a, b]$ جبر لباناخ بالنسبة للعمليات المعتادة وللنظيم المعرف بالدستور:

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max |x^{(k)}(t)|$$

ب) أوجد المثاليات الأعظمية في $C^n[a, b]$ (راجع [13] ص 19، 20).

ج) تأكد من أن $C^n[a, b]$ جبر متناظر بدون جذر. ما هي النتيجة التي نحصل عليها في هذه الحالة عند تطبيق النظرية 2؟

5. ليكن $CBV[0, 1]$ جبر التوابع العقدية المستمرة ذات التغير المحدود على القطعة $[0, 1]$، المزود بالنظيم:

$$\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \text{Var}\,(x, [0, 1])$$

أ) أثبت أن $CBV[0, 1]$ جبر لباناخ.

ب) أوجد المثاليات الأعظمية لهذا الجبر.

6. قدم مثالا لجبر باناخي مطابق لجذره.

7. صِفْ كل المثاليات المغلقة للجبر $C[a, b]$.

8. ليكن T فضاء طوبولوجياً نظامياً تماما (راجع الفصل 2، §5، البند 6) نرمز بـ B_T لمجموعة كل التوابع العقدية المحدودة المعرفة على R، والمزودة بالعمليات المعتادة وبالنظيم $\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|$.

أ) تأكد من أن B_T جبر نظامي ومتناظر وبدون وحدة.

ب) أثبت وجود تماثل (متباين) من T في الفضاء $\mathcal{M}$ المؤلف من المثاليات الأعظمية للجبر B_T وأن صورة T بواسطة هذا التماثل كثيف اينما كان في $\mathcal{M}$.

ج) أثبت أن كل تابع عقدي محدود على صورة T بواسطة هذا التماثل يقبل امتداداً مستمراً وحيداً على $\mathcal{M}$.

باضافة إلى ب) الفرض القائل أن $\mathcal{M}$ متراص (ينتج ذلك مباشرة من أ) بتطبيق النظريتين 1 وَ 2 من §4) نحصل على نظرية تيخونوف (Tikhonov) الخاصة بالتوسيع المتراص. ترجع نتيجة ج) إلى ستون وَتشاش. نقول عن توسيع متراص يتمتع بالخاصية ج) إنه أعظمي. تعني النتيجة ج) إذن بأن $\mathcal{M}$ توسيع متراص أعظمي (راجع [22]).

9. ليكن H فضاء لهيلبرت. نعتبر الجبر $\mathcal{L}(H, H)$ وجبره الجزئي التبديلي $B(A_0)$ المولد عن مؤثر قرين نفسه A_0 (أي ملاصق المغلف الخطي لقوى A_0).

أ) أثبت أن الجبر $B(A_0)$ نظامي وأن ليس له جذر.

ب) أثبت أن $B(A_0)$ متناظر وأن:

$$\overline{x(M)} = x^*(M)$$

حيث x^* هو قرين المؤثر $x \in B(A_0)$، وَ $x(M)$ هو التطبيق المشيد في §4. بخصوص النقطة ب) أنظر أيضاً التمرين 10 - ج).

بتطبيق النظرية 2، §4 على الجبر $B(A_0)$ نحصل على النظرية الطيفية من أجل المؤثرات القرينة لنفسها (راجع [22]، الفصل 10 وَ [26] الفصل 2).

10. نقول عن جبر لباناخ (تبديلي كان أو غير تبديلي) أنه جبر تضامن إذا وجد تطبيق $X \to X$ يتمتع بالخاصيات:

$$(x+y)^* = x^* + y^* \quad , \quad (xy)^* = y^* x^*$$
$$(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^* \quad , \quad (x^*)^* = x$$

يسمى جبر تضامن B^* – جبراً إذا تمتع، زيادة على ذلك، بالخاصية $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

أ) أثبت أن الجبر $\mathscr{L}(H, H)$ B^* – جبر (راجع [22]).

ب) أثبت أن كل B^* – جبر تبديلي جبر نظامي (راجع [22]).

ج) أثبت أن كل B^* – جبر تبديلي جبر متناظر وأن: $\overline{x(M)} = x^*(M)$ راجع [22]، توطئة آرينس (Arens)).

تعطى ب) وَ ج) بمراعاة النظرية 2 النتيجة التالية التي ترجع لغالفند (Guelfand) ولنايمارك (Naïmark) وهي تسمى أحيانا النظرية الأساسية لنظرية جبور باناخ التبديلية:

إن كل B^* – جبر تبديلي متشاكل ايزومترياً مع الجبر $C_{\mathscr{M}}$، ويتمتع التشاكل بالخاصية $\overline{x(M)} = x^*(M)$.

وهكذا يتضح أن الكائن الجبري المجرد الذي يوصف بواسطة 24 مسلمة (منها 13 متعلقة بالجبر التبديلي، و 5 متعلقة بالنظيم وَ 5 متعلقة بالـ B^* – جبر وأخيراً مسلمة التمام) يمكن إنجازه بواسطة جبر التوابع المستمرة على فضاء طوبولوجي متراص لهوسدورف.

يسمح ذلك بإدراك نتائج تبدو ذات طبيعة مختلفة، من وجهة نظر مشتركة، كنظرية فينر حول السلاسل المثلثية المتقاربة مطلقاً ونظرية النشر الطيفي لمؤثر قرين نفسه والنظريات الطوبولوجية لتيخونوف وستون وتشاش وغيرها.

المراجع

1. ف .ا. افاربوخ ، ا .غ . سموليانوف . نظرية المفاضلة في الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية .

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г., Теория дифференцирования в линейных топологическпх пространствах, УМН XXII, вып. 6 (138) (1967), 200 – 260.

2. ب .س . الكسندروف . مدخل في النظرية العامة للمجموعات والتوابع .

2. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиадат, 1948.

3. ن .ا. اخيزار ، ا .م . غلاسمان . نظرية المؤثرات الخطية .

3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов, «Наука», 1966.

4. س . باناخ . نظرية العمليات الخطية .

4. Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

5. ي .ن . بيريزانسكي . تفكيك المؤثرات القرينة لنفسها وفق التوابع الذاتية .

5. Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», Киев, 1965.

6. س . بوخنر . محاضرات في تكامل فوريي .

6. Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademie-Verlag, 1983.

7. ن . بورباكي . مبادئ في الرياضيات . الكتاب III . طوبولوجيا عامة .

7. Bourbaki N., Eléments de Mathématique. Livre III. Topologie générale, Hermann, Paris, 1958—1961.

8. ن . بورباكي . مبادئ في الرياضيات . الكتاب I . نظرية المجموعات .

8. Bourbaki N., Eléments de Mathématique. Livre I. Théorie des Ensembles, Hermann, Paris, 1954—1956.

9. ن . بورباكي . مبادئ في الرياضيات . الكتاب V . الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية .

9. Bourbaki N., Eléments de Mathématique. Livre V. Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris, 1953—1955.

10. ن . ي . فيلنكين . التحليل التابعي .

10. Вппенкин Н. Я. и др., Функцпональный анализ (серпя «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1964.

11. ن . فينر . تكامل فوريي وبعض تطبيقاته .

11. Wiener N., The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.

12. ر . بالي ، ن . فينر . تحويلات فوريي في الساحة العقدية .

12. Paley R., Wiener N., Fourier Transforms in the Complex Domain, New York, 1934.

13. ا .م . غالفوند ، د .أ . رايكوف ، غ .أ . شيلوف .الحلقات التبديلية النظيمية .

13. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., коммутативные нормировапные кольца, Физматгиз, 1960.

14. ا .م . غالفوند ، غ .ا . شيلوف . التوزيعات . ج 1 .

14. Guelfand I. M., Chilov G. E., Les distributions. Tome 1, Dunod, Paris 1962.

15. أ .م . غالفوند ، غ .ا . شيلوف . التوزيعات ، ج 2 : الفضاءات الأساسية .

15. Guelfand I. M., Chilov G. E., Les distributions. Tome 2: Espaces fondamentaux, Dunod, Paris, 1964.

.16 أ.م. غالفوند، غ.ا. شيلوف. التوزيعات. ج 3: نظرية المعادلات التفاضلية.

16. Guelfand I. M., Chilov G. E., Les distributions. Tome 3: Théorie des équations différentielles, Dunod, Paris, 1965.

.17 ا.م. غالفوند، ن.ي. فيلنكين. التوزيعات، ج 4: تطبيقات في التحليل التوافقي.

17. Guelfand I. M., Vilenkin N. Y., Les distributions, Tome 4: Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1967.

.18 ا.ت. غوخبارغ، م.غ. كراين. مدخل في نظرية المؤثرات الخطية غير القرينة لنفسها.

18. Гохберг И. Ц., Крейп М. Г., Введение в теорию линейяых песамосопряженных операторов, «Наука», 1965.

.19 ا.ت. غوخبارغ، م.غ. كراين. نظرية مؤثرات فولترا في فضاء هيلبرت، وتطبيقاتها.

19. Гохберг И. Ц., Крейп М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и се приложепия, «Наука», 1967.

.20 ب.ز. بوليخ. نظرية الفضاءات نصف المرتبة.

20. Вулих Б. З., Теория полуупорядоченных пространств, Физматгиз, 1961.

.21 ن. دانفورد، ج، شفارتز. المؤثرات الخطية. النظرية العامة

21. Dunford N., Schwartz J., Linear Operators. General Theory, Interscience, New York, 1958.

.22 ن. دانفورد، ج. شفارتز. المؤثرات الخطية. النظرية الطيفية.

22. Dunford N., Schwartz J., Linear Operators, Spectral Theory, Interscience, New York.

.23 م.م. داي، الفضاءات الخطية النظيمية.

23. Day M. M., Normed Linear Spaces, Berlin, 1958.

.24 ج. ديودوني. أسس التحليل الحديث.

24. Dieudonné J., Fondements de l'Analyse Moderne, Gauthier-Villars, Paris 1965.

25. أ. زيغموند: السلاسل المثلثية.

25. Zygmund A., Trigonometrical series, Warszawa, 1935.

26. ك. يوشيدا. التحليل التابعي.

26. Yosida K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1965.

27. ل.ف. كانتوروفيتش. التحليل التابعي والرياضيات التطبيقية.

27. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН III, вып. 6 (28) (1948), 89 – 185.

28. ل.ف. كانتوروفيتش، غ.ب. اكيلوف. التحليل التابعي في الفضاءات النظيمية.

28. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

29. د.ل. كيلي. طوبولوجيا عامة.

29. Келли Дж. Л., Общая топология, «Наука», 1968.

30. م.أ. كراسنوسلسكي. الطرق الطوبولوجية في نظرية المعادلات التفاضلية غير الخطية.

30. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1956.

31. ك. كوراتوفسكي. طوبولوجيا.

31. Kuratowski K., Topology, vol. I, Varsovie. 1952.

32. هـ. لوبيغ. دروس في المكاملة والبحث عن التوابع الأصلية.

32. Lebesgue H., Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

33. م. لواف. نظرية الاحتمال.

33. Loève M., Probability Theory, Princeton, 1960.

34. ل.هـ. لوميس. مدخل في التحليل التوافقي المجرد.

34. Loomis L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand, New York, 1953.

35. س.غ. مخلين. دروس حول المعادلات التكاملية.

35. Михлин С. Г., Лекции по интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.

36. ك . مورين . طرق الفضاءات الهيلبرتية .

36. Maurin K., Methods of Hilbert spaces, Warszawa, 1967.

37. م . نايمارك . الحلقات النظيمية .

37. Naimark M., Normed rings, P. Nordhoff, Groningen, 1959.

38. م .أ. نايمارك . المؤثرات الخطية التفاضلية .

38. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, изд. 2, «Наука», 1959.

39. ا .ب . ناتانسوف . نظرية التوابع ذات متغيّر حقيقي .

39. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, изд. 2, Гостехиздат, 1957.

40. أ.أ بلسنر . النظرية الطيفية للمؤثرات الخطية .

40. Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, «Наука», 1965.

41. ف . ريس ، ب .س . نادجي . دروس في التحليل التابعي .

41. Riesz, F., Nadjy B. S., Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1952.

42. أ . روبارتسن ، ف . روبارتسن . الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية .

42. Robertson A., Robertson W., Topological vector spaces, Cambridge University Press, 1964.

43. ف . رودين . مبادئ التحليل الرياضي .

43. Rudin W., Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York/San Francisco/Toronto/London, 1964.

44. س . ساكس . نظرية التكامل .

44. Sacks S., Theory of the integral, Hafner, New York, 1937.

45. أ . تيتشمارش . مدخل في نظرية تكاملات فوريي .

45. Titchmarsh E., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Clarendon Press, Oxford. 1937.

46. ف . تريكومي . المعادلات التكاملية .

46. Tricomi F., Integral Equations, New York, 1957.

47. أ. فرانكل، ي. بار–هيلل. أسس نظرية المجموعات.

47. Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Foundations of Set theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.

48. ب،ر. هالموس. نظرية القياس.

48. Halmos P. R., Measury theory, Van Nostrand, Princeton, 1950.

49. ب. هالموس. الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية.

49. Halmos P., Finite Dimensional Vector Spaces, K. Van Nostrand, New York, 1958.

50. ب. هالموس. محاضرات حول النظرية الأرغودية.

50. Halmos P., Lectures on Ergodic Theory, Chicago, 1956.

51. أ. هيل، ر. فيليبس. التحليل التابعي وانصاف الزمر.

51. Hille E., Phillips R., Functional Analysis and Semi-groups, Providence, 1957.

52. غ.أ. شيلوف. التحليل الرياضي.

52. Шилов Г. Е., Математический анализ, Вгорой специальный курс, Физматгиз, 1965.

53. غ.ا. شيلوف، ب.ل. غوريفتش. التكامل، القياس، المشتق. النظرية العامة.

53. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная. Общая теория, «Наука», 1967.

54. ع.أ. شيلوف، فان ديك تين. التكامل والقياس والمشتق في الفضاءات الشعاعية.

54. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах, «Наука», 1967.

55. ر. ايدواردس. التحليل التابعي. النظرية والتطبيق.

55. Edwards R., Functional Analysis. Theory and Applications, New York, 1965.

56. ل. شفارتز. نظرية التوزيعات.

56. Schwartz L., Théorie des distributions, I, II, Act. Sci. Ind., 1091, 1122, Paris, 1951.

57. أ. فرانكل. نظرية المجموعات المجردة.

57. Fraenkel A., Abstract Set Theory, Amsterdam, 1953.

توزيع المراجع حسب الفصول.

الفصل الأول. 2، 8، 47، 56.

الفصل الثاني. 2، 4، 7، 24، 29، 31.

الفصل الثالث. 4، 9، 10، 13، 15، 17، 20، 21، 23، 26، 27، 28، 34، 36، 37، 41، 42، 49، 51، 55.

الفصل الرابع. 3، 4، 5، 13 إلى 19، 21، 22، 23، 26، 34، 36، 37، 38، 40، 52، 57.

الفصل الخامس. 12، 21، 32، 33، 39، 41، 44، 48، 50، 53، 54.

الفصل السادس. 21، 28.

الفصل السابع. 32، 39، 41، 44، 53.

الفصل الثامن. 6، 11، 12، 14 إلى 17، 25، 52.

الفصل التاسع. 35، 46.

الفصل العاشر. 1، 24، 28، 30، 43، 51.

التكملة. 13، 21، 22، 26.

المصطلحات العلمية

● يشير الرقم الأيمن من كل عدد على رقم الفصل ويشير الرقم الأيسر على رقم الفقرة. مثال: 1.5 تعني الفصل 5، 1§. أما الحرف ت فيشير إلى التكملة الواردة في آخر الكتاب.

A

Additivité dénombrable	جمعية قابلة للعد 1.5
– de l'intégrale de Lebesgue	– تكامل لوبيغ 5.5
– d'une mesure	– قياس 1.5
σ – additivité	σ – جمعية 1.5 ، 2.5
– de l'intégrale de Lebesgue	– تكامل لوبيغ 5.5
– de la mesure de Lebesgue	– قياس لوبيغ 1.5
– d'un produit direct de mesure	– جداء مباشر لقياسات 6.5
Algèbre	جبر ت. 1
– de Banach	– باناخي (أو لباناخ) ت. 1
– – régulière	– – نظامي ت. 4
– – symétrique	– – التناظري ت. 4
– C_T	– C_T ت. 1
– commutative	– تبادلي (أو تبديلي) ت. 1
– d'ensembles	– مجموعات 5.1
– des fonctions analytiques dans un disque	– التوابع التحليلية في قرص ت. 1
– à l'involution	– تضامن ت. 4
– normée	– نظيمي ت. 1
– des opérateurs bornés	– المؤثرات المحدودة ت. 3
– quotient	– النسبة ت. 3
– avec unité	– ذو وحدة ت. 1

Algèbres isométriquement isomorphes . . 1. ت الجبور المتشاكلة ايزومترياً
– isomorphes . . . . 1. ت – المتشاكلة

B^* – algèbre . . . . 4. ت B^* – جبر
δ – algèbre . . . . 5.1 δ – جبر
σ – algèbre . . . . 5.1 σ – جبر
– des ensembles mesurables . . . . 1.5 – مجموعات قابلة للقياس
– minimale . . . . 5.1 – أصغري
– – (théorème d'existence) . . . . 5.1 – – (نظرية الوجود)
– irreductible . . . . 5.1 – غير قابلة للاختصار

Alternative de Fredholm . . . . 2.9 متناوبة فريدولم

Angle de deux vecteurs . . . . 4.3 زاوية شعاعين

Anneau engendré par un demi-anneau . 5.1 حلقة مولدة عن نصف حلقة
– d'ensembles . . . . 5.1 – مجموعات
– – élémentaires . . . . 1.5 – – أولية
– minimal engendré par une famille – أصغرية مولدة عن جماعة
d'ensembles . . . . 5.1 مجموعات

δ – anneau . . . . 5.1 σ – حلقة

σ – anneau . . . . 5.1 σ – حلقة

Antisymétrie . . . . 4.1 ضد التناظر

Application . . . . 2.1 تطبيق
– bilinéaire . . . . 1.10 – ثنائي الخطية
– conservant l'ordre . . . . 4.1 – محافظ على الترتيب
– continue d'un espace métrique – مستمر من فضاء
dans un autre . . . . 1.2 متري في آخر
– – d'un espace topologique – – من فضاء طوبولوجي
dans un autre . . . . 5.2 في آخر

- contractante . . . . 4.2 مقلص –
- «dans» . . . . 2.1 «في» –
- differentiable . . . . 1.10 قابل للمفاضلة –
- homéomorphe . . . . 2.2 (مستشاكل) هوميومورفي –
- isométrique . . . . 2.2 ايزومتري –
- naturel d'un espace vectoriel طبيعي من فضاء شعاعي –
toplogique dans son bidual . . . . 2.4 طوبولوجي في ثنويه
- «sur» . . . . 2.1 «على» –
- uniformément continue مستمر بانتظام –
d'un espace métrique dans من فضاء متري
un autre . . . . 7.2 في آخر

Axiome du choix . . . . 4.1 مسلمة الاختيار
- de Hausdorff . . . . 5.2 هوسدورف –
- de normalité . . . . 5.2 الناظمية –

Axiomes de dénombrabilité مسلمتا قابلية العد
(premier et deuxième) . . . . 5.2 (الأولى والثانية)
- de séparation T_1 . . . . 5.2 T_1 الفصل –
- - T_2 . . . . 5.2 T_2 – –
- - T_3 . . . . 5.2 T_3 – –
- - T_4 . . . . 5.2 T_4 – –

B

Base dénombrable (d'une mesure) . . . . . . 1.7 (لقياس) أساس قابل للعد
- duale . . . . 2.4 ثنوي –
- d'un espace topologique . . . . 5.2 فضاء طوبولوجي –
- d'un espace vectoriel . . . . 1.3 فضاء شعاعي –
- de Hamel . . . . 1.3 هامل –

– orthogonale . . . . 4.3 متعامد –
– orthonormée . . . . 4.3 متعامد ومتجانس –

Bicompact . . . . 6.2 متراص ثنوياً

Bijection . . . . 3.1 تقابل

Borne inférieure . . . . 5.1 حد أدنى
– supérieure . . . . 5.1 أعلى –

Boule fermée . . . . 2.2 كرة مغلقة
– ouverte . . . . 2.2 مفتوحة –

C

Chaîne (dans un ensemble ordonné) . . . 4.1 متسلسلة (في مجموعة مرتبة)
– maximale . . . . 4.1 أعظمية –

Charge . . . . 5.6 شحنة
– absolument continue . . . . 5.6 مستمرة مطلقاً –
– continue . . . . 5.6 مستمرة –
– discrète . . . . 5.6 غير متصلة –
– singulière . . . . 5.6 شـاذة –

Classe (d'équivalence) . . . . 2.1 صف (تكافؤ)
– de contiguïté . . . . 1.3 تلامس –

Codimension du noyau d'une بعد مرافق لتابعية
fonctionnelle linéaire . . . . 1.3 خطية
– d'un sous-espace vectoriel . . . . 1.3 فضـاء شعاعي جزئي –

Coefficient de Fourier . . . . 1.8 ، 3.6 ، 4.3 معامل فوريي
– – par rapport à un بالنسبة لجملة – –
système orthogonal . . . . 3.6 ، 4.3 متعامدة

Compacité . . . . 6.2 تراص
– dénombrable . . . . 6.2 (أو قابل للعد) عدودي –
– d'un espace métrique — فضاء متري
dénombrablement compact . . . . 7.2 متراص عدودياً
– d'un sous-ensemble fermé — مجموعة جزئية
d'un compact . . . . 2.6 مغلقة من متراص
– du spectre d'un élément — طيف عنصر
d'une algèbre . . . . 2. من جبر ت
Compact . . . . 6.2 متراص
– métrique . . . . 6.2 متري –

Comparaison des intégrales مقارنة تكاملي
de Riemann et Lebesgue . . . . 5.5 ريمان ولوبيغ
– des nombres ordinaux . . . . 4.1 الأعداد الترتيبية –
– des topologies . . . . 5.2 الطوبولوجيات –

Complémentaire d'un ensemble . . . . 1.1 متمم مجموعة

Complété d'un espace métrique . . . . 3.2 تتمة فضاء متري

Complétion d'un espace métrique . . . . 3.2 تتميم فضاء متري

Complétude d'un espace métrique . . . . 3.2 تمام فضاء متري
– de l'espace $C[a, b]$ . . . . 3.2 $C[a, b]$ الفضاء –
– d'un espace dénombrablement — فضاء نظيمي
normé . . . . 5.3 عدودياً
– de l'espace L_1 . . . . 1.6 L_1 الفضاء –
– de l'espace L_2 . . . . 2.6 L_2 – –
– de l'espace l_2 . . . . 3.2 l_2 – –
– d'un espace normé réflexif . . . . 2.4 فضاء نظيمي انعكاسي –
– d'une mesure . . . . 5.3 قياس –
– du prologement d'une mesure — امتداد قياس
selon Lebesgue . . . . 3.5 حسب لوبيغ

– du système de fonctions de Haar .... 3.7 – جملة توابع هار 3.7
– du système de fonctions d' Hermite .... 4.8 – جملة توابع هيرميت 4.8
– du système de fonctions de Laguerre .... 4.8 – جملة توابع لاغير 4.8
– du système de fonctions de Walsh .... 3.7 – جملة توابع والش 3.7

Composante connexe d'un ensemble ouvert .... 2.2 مركبة مترابطة لمجموعة مفتوحة

Condition de Dini .... 1.8، 3.8 شرط ديني

Continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue .... 5.5، 4.6 الاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ
Continuité absolue d'une mesure .... 1.5 – – لقياس
– – (d'une fonction) à droite et à gauche .... 1.6 – – (لتابع) من اليمين ومن اليسار
– d'une mesure .... 1.5 – قياس
– de la mesure de Lebesgue .... 3.5 – قياس لوربيغ
– uniforme d'une application d'un espace métrique dans un autre .... 7.2 – المنتظم لتطبيق من فضاء متري في آخر

Contraction .... 4.2 تقليص

Convergence dans l'espace K .... 4.4 تقارب في الفضاء K
– – L_1 .... 2.7 – – L_1
– – S_∞ .... 4.4 – – S_∞
– faible dans $C[a, b]$ .... 4.4 – ضعيف في $C[a, b]$
– – dans l'espace dual .... 4.4 – – في الفضاء الثنوي
– – dans un espace normé .... 3.4 – – في فضاء نظيمي

– – dans un espace vectoriel topologique . . . . 3.4 – – – شعاعي طوبولوجي
– – des fonctionelles . . . . 4.4 تابعيات – –
– – dans l_2 . . . . 4.4 l_2 في – –
– – dans $\mathbf{R}^n$ . . . . 3.4 $\mathbf{R}^n$ في – –
– forte dans un espace vectoriel topologique . . . . 3.4 قوي في فضاء شعاعي طوبولوجي –
– «globale» d'une série de Fourier . . . . 1.8 «شامل» لسلسلة فوريي –
– en mesure . . . . 3.7 ،4.5 بالقياس –
– en moyenne . . . . 1.7 بالمتوسط –
– – quadratique . . . . 2.7 التربيعي – –
– presque partout . . . . 3.7 ،4.5 أينما كان تقريباً –
– d'une suite dans un espace métrique . . . . 2.2 متتالية في فضاء متري –
– – dans un espace topologique . . . . 5.2 في فضاء طوبولوجي – –

التحدب المحلي لفضاء طوبولوجي 5.3 . . . .
Convexité locale d'un espace topologique . . . .
– – de la topologie forte de E^* . . . . . 2.4 E^* للطوبولوجيا القوية – –
Convolution . . . . 4.8 تزويج
– de fonctions à variation bornée . . . . . . 7.8 توابع ذات تغير محدود –

Coordonnées d'un vecteur dans un espace euclidien . . . . 4.3 إحداثيات شعاع في فضاء إقليدي

Corps convexe 2.3 حقل محدب

Couple de points connexe . . . . 5.2 ثنائية نقطتين مترابطة

منحن مستمر في فضاء متري 1.3 . . . .
Courbe continue dans un espace métrique . . . .

Critère de compacité dénombrable مقياس (أو اختبار) التراص العدودي
d'un espace topologique . . . 6.2 (أو القابل للعد) لفضاء طوبولوجي
– – d'un espace métrique . . . . 7.2 – – في فضاء متري
– – – topologique . . . . 6.2 – – – طوبولوجي
– de complétude d'un espace – تمام فضاء
dénombrablement normé . . . . 5.3 نظيمي عدودي
– – – métrique . . . . 3.2 – – – متري
– – d'un systéme orthonormé 4.3 – – جملة متعامدة ومتجانسة
– de continuité d'une application . . . . – استمرار تطبيق من
d'un espace topologique dans un autre 5.2 فضاء طوبولوجي في آخر
– – d'une fonctionnelle linéaire – – تابعية خطية على
sur un espace normé . . . . 1.4 فضاء نظيمي
– – – – sur un espace vectoriel – – – – على فضاء شعاعي
topologique . . . . 1.4 طوبولوجي
– de convergence faible dans un espace – التقارب الضعيف في
normé . . . . 3.4 فضاء نظيمي
– – – d'une suite de fonctionnelles . . . . . 3.4 – – – لمتتالية توابعيات
– de mesurabilité d'une fonction . . . . 4.5 – قابلية القياس لتابع
– – d'une fonction simple . . . . 5.5 – – لتابع بسيط
Critère de précompacité d'un ensemble – شبه تراص مجموعة في
dans un espace métrique complet . . . . 7.2 فضاء متري تام
– de sommabilité d'une fonction simple . . . 5.5 – قابلية الجمع لتابع بسيط

D

Décomposition finie d'un ensemble . . . . 5.1 التفكيك المنتهي لمجموعة
– de Hahn . . . . 5.6 – هان
– de Jordan . . . . 5.6 – جوردان

Demi-anneau . . . . 5.1 نصف حلقة

Dénombrabilité de l'ensemble des قابلية العد لمجموعة أعداد
nombres rationnels . . . . 3.1 ناطقة
– d'un système orthogonal – – لجملة متعامدة في
dans un espace euclidien séparable . 4.3 فضاء اقليدي قابل للفصل

Densité de l'ensemble des fonctions كثافة مجموعة التوابع
continues sommables dans L_1 . . . 1.7 L_1 المستمرة القابلة للجمع في
– – – simples dans L_1 . . . . 1.7 L_1 البسيطة في – – –
– – de répartitions des probabilités . . . . 6.6 توزعات الاحتمالات – –

Dépendance linéaire . . . . 1.3 عدم الاستقلال الخطي

Dérivé ed'une application composée . . . . 1.10 مشتق تطبيق مركب
– – linéaire . . . . 1.10 خطي – –
– d'une charge par rapport – شحنة بالنسبة
à la mesure . . . . 5.6 لقياس
– d'une distribution . . . . 4.4 توزيع –
– faible d'une application . . . . 1.10 ضعيف لتطبيق –
– de la fonction δ . . . . 4.4 δ التابع –

– forte d'une application . . . . 1.10 الـ – القوي لتطبيق
– – – (théorème d'existence) . . . . 1.10 (نظرية الوجود) – – –
– de Fréchet . . . . 1.10 فريشي –
– de Gâteaux . . . . 1.10 غاتو –
– d'une intégrale par rapport – تكامل بالنسبة لحده
à sa borne supérieure . . . . 3.6 ، 2.6 الأعلى

– seconde d'une application . . . . 1.10 الـ – الثاني لتطبيق

– au sens des distributions . . . . 4.6 الـ – بمفهوم التوزيعات

Derivées successives d'une application . . . 1.10 المشتقات المتوالية لتطبيق

déterminant de Fredholm . . . . 3.9 معين فريدولم
– de Gram . . . . 3.7 غرام –

Développement d'une fonction suivant نشر تابع حسب كثيرات
les polynômes de Legendre . . . . 3.6 حدود لوجاندر

Diamètre d'un ensemble . . . . 3.2 نصف قطر مجموعة

Différence de deux ensembles . . . . 1.1 فرق مجموعتين
– symétrique . . . . 1.1 (أو المتناظر) التناظري –

. . . . 1.10 قابلية المفاضلة الضعيفة لتطبيق
Differentiabilité faible d'une application . . . .
– forte d'une application . . . . 1.10 القوية لتطبيق – –

Dimension algébrique . . . . 4.3 ، 1.3 البعد الجبري
– d'un espace vectoriel . . . . 1.3 فضاء شعاعي –

Distance de deux courbes . . . . 8.1 مسافة (بين) منحنيين
– de deux ensembles . . . . 2.2 (بين) مجموعتين –
– dans un espace métrique . . . . 1.2 في فضاء متري –
– d'un point à un ensemble . . . . 2.2 (بين) نقطة ومجموعة –

Distribution . . . . 4.4 توزيع
– sur une conférence . . . . 4.4 على دائرة –
– complexe . . . . 4.4 عقدي –
– périodique . . . . 4.4 دوري –
– régulière . . . . 4.4 نظامي –
– singulière . . . . 4.4 شاذ –
– de *n* variables . . . . 4.4 متغيراً *n* ذو –

Domaine de définition d'une fonction . . . . 2.1 ساحة تعريف تابع
– – d'un opérateur linéaire . . . . 5.4 مؤثر خطي – –
– de valeurs d'une fonction . . . . 2.1 قيم تابع –

E

Ecart quadratique moyen . . . . 2.7 الانحراف التربيعي المتوسط

Egalité des ensembles . . . . 1.1 مساواة المجموعات

Elément inversible (d'une algèbre) . . 2. ت (في جبر) عنصر قابل للقلب
- maxi1.1 mal . . . . 4.1 أعظمي -
Elément minimal . . . . 4.1 أصغري
- nul . . . . 1.3 منعدم -
- opposé . . . . 1.3 (أو نظير) مقابل -

Eléments d'un ensemble . . . . 1.2 ، 1.1 عناصر مجموعة
- incomparables . . . . 4.1 غير قابلة للمقارنة -
- linéairement dépendants (مستقلة) غير مستقلة -
(indépendants dans un espace vectoriel) 1.3 خطياً في فضاء شعاعي

Ensemble . . . . 1.1 مجموعة
- absorbant . . . . 2.3 ماصة -
- bien ordonné . . . . 4.1 مرتبة جيداً -
- borélien . . . . 5.1 بوريلية -
- borné dans un espace محدودة في فضاء شعاعي -
vectoriel topologigue . . . . 5.3 طوبولوجي
- - en norme . . . . 5.3 بالنظيم - -
- connexe . . . . 2.2 مترابطة -
- convexe . . . . 2.3 محدبة -
- dénombrable . . . . 3.1 قابلة للعد -
- dénombrablement compact . . . . 6.2 متراصة عدودياً
- dense dans un espace métrique . . . . 2.2 كثيفة في فضاء متري -
- élémentaire . . . . 1.5 أولية -
- faiblement borné dans un محدودة بضعف في -
espace normé . . . . 3.4 فضاء نظيمي
- fermé dans un espace métrique . . . . 2.2 مغلقة في فضاء متري -

- - - topologique . . . . 5.2 طوبولوجي - - -
- filtrant à droite . . . . 4.1 راشحة من اليمين -
- fortement borné dans un espace normé . . . . 3.4 محدودة بقوة في فضاء نظيمي -
- mesurable . . . . 5.6 ، 3.5 ، 1.5 قابلة للقياس
- - par rapport á un δ - anneau . . . 3.5 بالنسبة لِـ δ S - حلقة - - -
- - au sens de Jordan . . . . 3.5 بمفهوم جوردان - - -
- négatif par rapport à une charge . . . . . 5.6 سالبة بالنسبة لشحنة -
- non dénombrable . . . . 3.1 غير قابلة للعد -
- non mesurable . . . . 1.5 غير قابلة للقياس -
- nul . . . . 3.5 منعدمة -
- nulle part dense . . . . 2.2 غير كثيفة في مكان -
- ordonné . . . . 4.1 مرتبة -
- ouvert dans un espace métrique . . . . . 2.2 مفتوحة في فضاء متري -
- - - topologique . . . . 5.2 طوبولوجي - - -
- partiellement ordonné . . . . 4.1 مرتبة جزئياً -
- partout dense . . . . 2.2 كثيفة حيثما (أو أينما) كان -
- positif par rapport à une charge . . . . . . 5.6 موجبة بالنسبة لشحنة -
- précompact . . . . 6.2 شبه متراصة -
- symétrique dans un espace vectoriel . . . . 5.3 متناظرة (أو تناظرية) في فضاء شعاعي -
- totalement borné . . . . 6.2 محدودة كلية -
- - ordonné . . . . 4.1 مرتبة كلية -
- triadique de Cantor . . . . 2.2 كانتور الثلاثية -
- d'unicité d'une mesure . . . . 3.5 وحدانية قياس -
- de unicité d'une mesure . . . . 3.5 σ - وحدانية قياس -
- vide . . . . 1.1 خالية -

B - ensemble . . . . 5.1 مجموعة - B

Ensembles équipotents . . . . 3.1 مجموعات متساوية القوة

– isomorphes . . . . 4.1 متشاكلة –

Enveloppe convexe . . . . 2.3 مغلف محدب
– linéaire d'un système — خطي لجملة
de vecteurs . . . . 1.3 أشعة
Equation de la corde vibrante . . . . 1.9 معادلة الوتر المتذبذب
– différentielle aux distributions . . . . 4.4 تفاضلية لتوزيعات –
– d'équilibre d'une corde chargée . . . . 1.9 توازن وتر مثقل –
– intégrale . . . . 1.9 تكاملية –
– – d'Abel . . . . 1.9 آبل (أو آبيل) التكاملية –
– – abstraite de Fredholm . . . . 2.9 التكاملية المجردة لفريدولم –
– – dépendant d'un paramètre . . . . 3.9 المتعلقة بوسيط – –
– – de Fredholm . . . . 4.2 ، 2.9 ، 1.9 فريدولم التكاملية –
– – – de deuxième espèce . . . . 2.9 ، 1.9 من النوع الثاني – – –
– – – de première espèce . . . . 2.9 ، 1.9 الأول – – – –
– – homogène . . . . 1.9 التكاملية المتجانسة –
– – non homogène . . . . 1.9 غير المتجانسة – –
– – à noyau dégénéré . . . . 2.9 ذات النواة المنحلة – –
– – à noyau symétrique . . 2.9 ذات النواة المتناظرة (أو التناظرية) – –
– – de Volterra . . . . 2.9 ، 4.9 ، 4.2 لفولترّا – –
– – – de deuxième espèce . . . . 2.9 ، 1.9 من النوع الثاني – – –
– – – de première espèce . . . . 1.9 الأول – – – –

Equicontinuité d'une famille الاستمرار المتساوي لجماعة
de fonctions . . . . 7.2 توابع

Equivalence des normes . . . . 3.3 تكافؤ نظيمات

Escalier de cantor . . . . 4.6 درج كانتور

Espace arithmétique Euclidien الفضاء الحسابي الاقليدي
à n dimensions . . . . 1.2 n ذو البعد
– – complexe à n dimensions . . . . 1.3 n العقدي ذو البعد – –

– – réel à n dimensions . . . . 1.3 n الحقيقي ذو البعد – –

– de Banach . . . . 3.3 فضاء باناخي (لباناخ)
– de base . . . . 4.4 الأساس –

– bidual . . . . 2.4 الـ – الثنوي المكرر
– C^n . . . . 4.3 ، 3.3 ، 1.2 C^n –
– C^∞ . . . . 5.3 C^∞ –
– $C[a, b]$ 2.4 ، 3.3 ، 1.3 ، 7.2 ، 1.4 ، 5.4 ، 3.2 ، 2.2 ، 1.2 $C[a, b]$ –
– $C^2[a, b]$ . . . . 4.3 ، 3.2 ، 2.2 ، 1.2 $C^2[a, b]$ –
– – complexe . . . . 4.3 العقدي – –
– C_T . . . . 1. ت C_T –
– c . . . . 1.3 c_0 –
– c_0 . . . . 2.4 ، 1.3 c –
– D^n . . . . 5.3 D^n –
– dénombrablement hilbertien . . . . 5.3 الهيلبرتي عدودياً –
– – normé . . . . 5.3 النظيمي عدودياً –
– dual . . . . 2.4 الثنوي –
– – algébrique . . . . 2.4 الجبري – –
– – *de* c_0 . . . . 2.4 c_0 لِـ – –
– – de l_p . . . . 2.4 l_p لِـ – –
– euclidien . . . . 4.3 الاقليدي –
– – complet . . . . 4.3 التام – –
– – complexe . . . . 4.3 العقدي – –

– des fonctions continues فضاء التوابع المستمرة
à métrique quadratique . . . . 1.2 ذو المسافة التربيعية
– – à variation bornée . . . . 2.6 ذات التغير المحدود – –
– de Hausdorff . . . . 5.2 هوسدورف –
– de Hilbert . . . . 4.3 هيلبرت –
– – complexe . . . . 4.3 العقدي – –
– – separable . . . . 2.4 القابل للفصل – –

- K . . . . 8.8 ، 4.4 K -
- K^* . . . . 8.8 K^* -
- $K[a, b]$ . . . . 1.4 $K[a, b]$ -
- K_m . . . . 5.3 K_m -
- K^n . . . . 4.4 K^n -
- L_1 . . . . 1.7 L_1 -
- - (séparabilité) . . . . 1.7 (قابلية الفصل) - -
- L_2 . . . . 2.7 L_2 -
- - complexe . . . . 2.7 العقدي - -
- - (séparabilité) . . . . 2.7 (قابلية الفصل) - -
- l_1 . . . . 2.7 l_1 -
- l_2 . . . . . . 6.4 ، 3.4 ، 4.3 ، 1.3 ، 3.2 ، 2.2 ، 1.2 l_2 -
- - complexe . . . . 4.3 العقدي - -
- l_p . . . . 2.7 ، 1.2 l_p -
- linéaire . . . . 1.3 خطي -
- m . . . . 3.3 ، 1.3 ، 2.2 ، 1.2 m -
- métrique . . . . 1.2 متري -
- - complet . . . . 3.2 تام - -
- - séparable . . . . 5.2 ، 2.2 قابل للفصل - -
- - totalement borné . . . . 7.2 محدود كلية - -
- métrisable . . . . 5.2 قابل لمسافة -
- normal . . . . 5.2 ناظمي -
- normé . . . . 3.3 نظيمي -
- de points collés . . . . 5.2 نقاط ملتصقة -
- - isolés . . . . 1.2 المعزولة - -
- quotient d'un espace vectoriel . . . . 1.3 النسبة لفضاء شعاعي -
- R^1 . . . . 3.3 ، 1.3 ، 1.2 R^1 -
- R^n . . . . . . 3.4 ، 1.4 ، 4.3 ، 3.3 ، 1.3 ، 1.2 R^n -
- R^∞ . . . . 5.3 ، 1.3 R^∞ -
- R_p^n . . . . 4.3 ، 1.2 R_p^n -

– S . . . . 5.3 S –

– S_∞ . . . . 4.8 ، 4.4 S_∞ –

– S_∞^* . . . . 8.8 S_∞^* –

– des suites bornées . . . . 2.2 المتتاليات المحدودة –

– – rapidement décroissantes . . . . 5.3 السريعة التناقص – –

– topologique . . . . 5.2 طوبولوجي –

– – à base dénombrable . . . . 5.2 ذو أساس قابل للعد – –

– – bicompact . . . . 6.2 متراص ثنوياً – –

Espace topologique compact . . . . 6.2 فضاء طوبولوجي متراص

– – complètement régulier . . . . 5.2 نظامي تماماً – –

– – connexe . . . . 5.2 مترابط – –

– – dénombrablement compact . . . . 6.2 متراص عدودياً – –

– – régulier . . . . 5.2 نظامي – –

– – séparable . . . . 5.2 قابل للفصل – –

– vectoriel . . . . 1.3 شعاعي –

– – de dimension finie . . . . 1.3 بعده منته – –

– – – infinie . . . . 1.3 غير منته – – –

– – topologique . . . . 3.3 طوبولوجي – –

– – – localement borné . . . . 5.3 محدود محلياً – – –

– – – – convexe . . . . 5.3 محدب محلياً – – –

– – – normable . . . . 5.3 قابل لنظيم – – –

– – – réflexif . . . . 2.4 انعكاسي – – –

– – – semi-réflexif . . . . 2.4 نصف انعكاسي – – –

– – – séparé . . . . 5.3 منفصل – – –

– Z . . . . 8.8 Z –

Espaces homéomorphes . . . . 5.2 ، 1.2 فضاءات هوميومورفية

– isométriques . . . . 1 . ت ، 1.2 ايزومترية –

– vectoriels isomorphes . . . . 1.3 شعاعية متشاكلة –

B – espace . . . . 3.3 فضاء – B

T_1 – espace . . . . 5.2 فضاء – T_1

T_2 – espace . . . . 5.2 فضاء – T_2

Espérance mathématique . . . . 6.6 أمل رياضي

Exemple d'ensemble non مثال لمجموعة غير محدودة

totalement borné . . . . 7.2 كلية

– de mesure additive – لقياس جمعي ليس

non σ – additive . . . . 2.5 σ – جمعياً

– de mesure σ – additive . . . . 2.5 لقياس σ – جمعي –

Exemples d'algèbres de Banach . . . . 1.ت أمثلة لجبور باناخ

– de bases orthogonales . . . . 4.3 لأسس متعامدة –

– d'espaces dénombrablement normés . . 5.3 لفضاءات نظيمية عدودياً –

– d'espaces duals . . . . 2.4 لفضاءات ثنوية –

– d'espaces normés . . . . 3.3 لفضاءات نظيمية –

– d'espaces vectoriels . . . . 1.3 لفضاءات شعاعية –

– – – topologiques . . . . 5.3 طوبولوجية – – –

– de fonctionnelles linéaires . . . . 1.3 لتابعيات خطية –

– – – sur un espace normé . . . . 1.4 على فضاء نظيمي – – –

– de mesure de Lebesgue-Stieltjes . . . . . . 6.6 لقياس لوبيغ ستيلجاس –

– d'opérateurs linéaires . . . . 5.4 لمؤثرات خطية –

– de suites faiblement convergentes . . . 3.4 لمتتاليات متقاربة بضعف –

Extension compacte . . . . 4.ت توسيع متراص

– maximale . . . . 4.ت أعظمي –

Extremum d'une fonctionnelle . . . . 2.10 القيم القصوى لتابعية

– – (condition nécessaire) . . . . 2.10 (شرط لازم) – – –

– – (– suffisante) . . . . 2.10 (شرط كاف) – – –

F

Face d'un simplexe .... 2.3 وجه بسيِّط

جماعة مركزة (لأجزاء مجموعة) 6.2 ....
Famille centrée (de parties d'un ensemble ....
– d'ensembles .... 5.1 مجموعات –
– – de fonctions .... 7.2 توابع – –
– – équicontinue .... 7.2 متساوية الاستمرار –
– – uniformement bornée .... 7.2 محدودة بانتظام – –
– de voisinages de zéro .... 5.3 جوارات الصفر –

Fermeture d'un ensemble dans ملاصق مجموعة في فضاء
un espace métrique .... 2.2 متري
– – – topologique .... 5.2 طوبولوجي – – – –
– linéaire .... 3.3 خطي –

Fonction .... 2.1 تابع
– absolument continue .... 4.6 مستمر مطلقاً –
– abstraite .... 1.10 مجرد –
– borélienne .... 4.5 بوريلي –
– caractéristique .... 2.1 مميز –
– à carré intégrable .... 2.7 ذو مربع قابل للمكاملة –
– – – (complexe) .... 2.7 (عقدي) – – – – –
– continue .... 5.2 مستمر –
– de Dirichlet .... 5.5 ديركليت –
– génératrice .... 6.6 مولد –
– de Heaviside .... 4.4 هيفسايد –
– intégrable .... 5.5 قابل للمكاملة –
– mesurable .... 4.5 قابل للقياس –
– – au sens de Borel .... 4.5 بمفهوم بوريل – –
– B – mesurable .... 4.5 قابل للقياس – B –

– μ – mesurable . . . . 4.5 قابل للقياس – μ –
– monotone . . . . 1.6 رتيب –
– de poids . . . . 3.7 وزن –
Fonction de répartition . . . . 6.6 توزيع –
– des sauts . . . . 1.6 قفزات –
– semi-continue inférieurement نصف مستمر من الأدنى (من –
(supérieurement) . . . . 6.2 الأعلى)
– simple . . . . 5.5 بسيط –
– – sommable (intégrable) . . . . 5.5 قابل للجمع (للمكاملة) – –
– singulière . . . . 4.6 شاذ –
– sommable . . . . 5.5 قابل للجمع –
– à support borné . . . . 4.4 ذو حامل محدود
– à variation bornée . . . . 2.6 ذو تغيّر محدود –
– – – (dérivabilité) . . . . 2.6 (قابلية الاشتقاق – – –
– δ . . . . 4.4 ، 3.4 ، 1.4 ، 1.3 δ – الـ

Fonctions de base . . . . 4.4 توابع أساس
– équivalentes . . . . 4.5 متكافئة –
– d'Hermite . . . . 5.8 ، 3.7 هيرميت –
– de Laguerre . . . . 3.7 لاغير –
– presque périodiques . . . . 7.8 شبه الدورية –

Fonctionnelle . . . . 1.3 ، 6.2 تابعية
– additive . . . . 1.3 جمعية –
– continue (sur un espace مستمرة (على فضاء شعاعي –
vectoriel togologique) . . . . 1.4 طوبولوجي)
– convexe . . . . 2.3 محدبة –
– sur un espace vectoriel على فضاء شعاعي – –
complexe . . . . 1.4 عقدي
– homogène . . . . 1.3 متجانس –
– linéaire . . . . 1.4 ، 1.3 خطي –

– – sur un espace de Hilbert . . . . 2.4 على فضاء هيلبرت – –
– – sur un espace dénombrablement . . . . نظيمي – – –
normé . . . . 1.4 عدودياً
– – sur un espace normé . . . . 1.4 نظيمي – – –
– de Minkowski . . . . 2.3 ميكوفسكي –
– multiplicative . . . . 4. ت ضربية –
– quadratique fortement positive . . . . 2.10 تربيعية موجبة بقوة –
– semi – homogène . . . . 1.3 نصف متجانسة –
– semi – linéaire . . . . 1.3 نصف خطية –

Formule des accroissements finis pour دستور التزايدات المنتهية
les applications . . . . 1.10 للتطبيقات
– de Fourier . . . . 3.8 فوريي –
– – (complexe) . . . . 3.8 (العقدي) – –
– d'inversion de la transformation قلب تحويل
de Fourier . . . . 4.8 فوريي
– de Rodrigues . . . . 3.6 رودريغاس –
– de Taylor pour les applications . 1.10 للتطبيقات (أو تايلور) تايلر –

Hauteur d'un nombre rationnel . . . . 3.1 ارتفاع عدد ناطق

. . . . 2.2 هوميومورفسم فضاءات مترية
Homéomorphisme des espaces métriques . . . .
– – topologiques . . . . 5.2 طوبولوجية – –
– d'une algèbre dans une autre . . . . 1. ت من جبر في جبر آخر –

Hyperplan . . . . 1.3 مستو مصعد

Hypothèse du continu . . . . 4.1 فرض المستمر

I

Idèal d'une algèbre commutative . . . . ت. 1 مثالي جبر تبديلي

- bilatère . . . . 6.4 مثالي ثنائي الجانب
- maximal . . . . ت. 1 - أعظمي
- - de l'algèbre C_t . . . . ت. 1 - الجبر C_t

Identité de Hilbert . . . . ت. 2 متطابقة هيلبرت

Image . . . . 2.1 صورة
- réciproque . . . . 2.1 - عكسية
- - d'une famille d'ensembles . . . . 5.1 - - لجماعة مجموعات
- - d'une intersection d'ensembles . . . . 2.1 - - لتقاطع مجموعات
- - d'une réunion d'ensembles . . . . 2.1 - - اتحاد مجموعات
- - d'une topologie . . . . 5.2 - - طوبولوجيا

Inclusion . . . . 1.1 احتواء

Indépendance linéaire . . . . 1.3 استقلال خطي

Inégalité de Bessel . . . . 4.3 متراجحة بسل (أو بيسل)
- - pour le système trigo - - لجملة
- nométrique . . . . 3.6 مثلثية
- de Cauchy-Bouniakovsky . . . . 4.3 ، 1.2 - كوشي بونياكوفسكي
- - (forme intégrale) . . . . 1.2 - - (الشكل التكاملي)
- de Hölder . . . . 1.2 - هولدر
- - (forme intégrale) . . . . 1.2 - - (الشكل التكاملي)
- de Minkowski . . . . 1.2 - مينكوفسكي
- - (forme intégrale) . . . . 1.2 - - الشكل التكاملي)
- de Tchétrychev . . . . 5.5 - تشيبتشاف

- triangulaire . . . . 1.2 الـ - المثلثية (المثلث)

Injection . . . . 2.1 تباين

Intégrale de Dirichlet . . . . 1.8 تكامل ديركليت
– sur un ensemble . . . . 5.5 على مجموعة –
– de Fejer . . . . 2.8 فيجير –
– d'une fonction abstraite . . . . 1.10 تابع مجرد –
– – simple . . . . 5.5 بسيط – –
– de Fourier . . . . 3.8 فوريي –
– – (forme complexe) . . . . 3.8 (الشكل العقدي – –
– de Lebesque . . . . 5.5 لوبيغ –
– – (indéfinie) . . . . 1.6 (غير المحدد) – –
– – sur un ensemble de mesure infinie . . . . 5.5 على مجموعة ذات قياس غير منته – –
– de Lebesgue-Stieltjes . . . . 6.6 لوبيغ–ستيلجاس –
– – d'une fonction monotone . . . . 6.6 تابع رتيب – –
– – – à variation bornée . . . . 6.6 ذو تغير محدود – – –
– de Poisson . . . . 4.8 بواسون –
– de Riemann-Stieltjes . . . . 6.6 ريمان–ستيلجاس

Interpolation par la méthode des moindres carrés . . . . 3.7 الاستقطاب بطريقة المربعات المصغرة

Interprétation géométrique de la norme d'une fonctionnelle linéaire . . . . 1.4 التفسير الهندسي لنظيم تابعية خطية

Intersection d'ensembles . . . . 1.1 تقاطع مجموعات
– d'une famille de sous-espaces vectoriels . . . . 1.3 جماعة فضاءات شعاعية جزئية –

Intervalle dans l'ensemble des nombres ordinaux . . . . 6.2 مجال في مجموعة الأعداد الترتيبية

Isométrie . . . . 1.2 ايزومترية (أو تطبيق ايزومتري)
Isomorphisme des algébres . . . . 1 . تشاكل الجبور ت

- entre un espace de Hilbert et son dual .... 2.4 — بين فضاء هيلبرت وثنوية
- des ensembles ordonnés .... 4.1 — مجموعات مرتبة
- des espaces de Hilbert .... 4.3، 5.3 — فضاءات هيلبرت
- des espaces vectoriels .... 1.3 — الفضاءات الشعاعية
- linéaire conjugué .... 2.4 — الـ – الخطي المرافق

L

Lemme d'Arens .... ت .4 — توطئة آرينس
- de Heine-Borel .... 6.2 — هاين-بوريل
- de Riesz .... 4.6 — ريس
- de Zorn .... 4.1 — زورن

Lignes brisées d'Euler .... 7.2 — خطوط أولر المنكسرة
Limite à droite (à gauche) .... 1.6 — نهاية من اليمين (من اليسار)
- d'une suite dans un espace métrique .... 2.2 — متتالية في فضاء متري
- supérieure (inférieure) d'une fonction en un point .... 6.2 — عليا (دنيا) لتابع عند نقطة

Longueur d'une courbe .... 6.2، 8.2 — طول منحن

M

Majorant .... 4.1 — حاد من الأعلى

Maximum d'une fonctionnelle .... 2.10 — قيمة أعظمية لتابعية

قابلية القياس بمفهوم كاراتيو دوري 3.5 . . . .

Mesurabilité au sens de Carathéodory . . . .

– au sens de Lebesgue . . . . 3.5 ، 1.5 لوبيغ – – – –

Mesure . . . . 3.5 ، 2.5 ، 1.5 قياس

– absolument continue . . . . 1.5 مستمر مطلقاً –

– σ – additive . . . . 2.5 ، 1.5 جمعي – σ –

– à base dénombrable . . . . 1.7 ذو أساس قابل للعد

– complète . . . . 3.5 تام –

– continue . . . . 1.5 مستمر –

– sur un demi-anneau . . . . 2.5 على نصف حلقة –

– dénombrablement additive . . . . 2.5 ، 1.5 جمعي عدودياً –

– discrète . . . . 1.5 غير متصل –

– extérieure . . . . 3.5 ، 1.5 خارجي –

– σ– finie . . . . 5.5 ، 3.5 منته – σ –

– intérieure . . . . 3.5 داخلي –

– de Jordan . . . . 3.5 جوردان –

– de Lebesgue . . . . 3.5 ، 1.5 لوبيغ –

– – linéaire . . . . 6.5 الخطيّ – –

– – n-dimensionelle . . . . 6.5 n ذو البعد – –

– de Lebesgue-Stieltjes . . . . 6.6 ، 1.5 لوبيغ–ستيلجاس –

– de Lebesgue-Stieltjes absolument continue . . . . 6.6 لوبيغ–ستيلجاس المستمر مطلقاً –

– – discrète . . . . 6.6 غير المتصل – –

Mesure singulière . . . . 6.6 شاذ –

– de signe arbitraire . . . . 5.6 ذو اشارة كيفية –

Méthode des approximations successives . . . 4.2 طريقة التقريبات المتوالية

– de démonstration par récurrence 4.1 البرهان بالتدريج (أو التراجع) –

– des fonctions caractéristiques . . . . 7.8 التوابع المميزة –

– de Newton . . . . 3.10 نيوتن –

– – (convergence) . . . . 3.10 (تقارب) – –
– – modifiée . . . . 3.10 المعدلة – –

– opératorielle de résolution الـ – المؤثرية لحل
des équations differentielles . . . . 6.8 المعادلات التفاضلية
– des tangentes . . . . 3.10 المماسات –

Métrique . . . . 1.2 مسافة

Mineur de Fredholm . . . . 3.9 أصغري فريدولم

Minimum d'une fonctionnelle . . . . 2.10 قيمة أصغرية لتابعية
– – (condition nécessaire) . . . . 2.10 (شرط لازم) – – –
– – (conditions suffisantes) . . . . 2.10 (شروط كافية) – – –

N

nombre algébrique . . . . 3.1 عدد جبر
– transcendant . . . . 3.1 متسام –
– transfini . . . . 4.1 لامنته –

Nombres dérivés . . . . 1.6 أعداد مشتقة

Non-compacité de l'opérateur عدم تراص المؤثر المطابق
identique dans un espace de Hilbert . . . . 6.4 في فضاء لهيلبرت

Non dénombrabilité de l'ensemble des عدم قابلية مجموعة
nombres réels . . . . 3.1 الأعداد الحقيقية للعد

Non séparabilité de l'espace m . . . . . 2.2 للفصل m عدم قابلية الفضاء
Norme . . . . 3.3 نظيم
– d'une application bilinéaire . . . . 1.10 تطبيق ثنائي الخطية –

– d'une fonctionnelle . . . . 1.4 تابعية –
– d'un opérateur linéaire . . . . 5.4 مؤثر خطي –

Normes comparables . . . . 5.3 نظيات قابلة للمقارنة
– concordayntes . . . . 5.3 متفقان –
– équivalentes . . . . 5.3 ، 4.3 متكافئة –

Noyau de Dirichlet . . . . 1.8 نواة ديركليت
– d'un ensemble dans un espace vectoriel . . . . 1.3 مجموعة في فضاء شعاعي –
– d'une équation intégrale . . . . 2.9 ، 4.2 معادلة تكاملية –
– de Fejér . . . . 2.8 فيجير –
Noyau d'une fonctionnelle linéaire . . . . 1.3 تابعية خطية –
– de Hilbert-Schmidt . . . . 2.9 هيلبرت – شميت –
– d'un opérateur linéaire . . . . 2.9 مؤثر خطي –
– résolvant . . . . 3.9 حالة –

Noyaux itérés . . . . 3.9 نوى المكررة

O

Opérateur . . . . 5.4 مؤثر
– abstrait de Volterra . . . . 3.9 ، 2.9 فولترّا المجرد –
– adjoint . . . . 5.4 قرين –
– – au sens hermitien . . . . 5.4 بمفهوم هيلبرت – –
– – d'un opérateur de Hilbert Schmidt . 2.9 لمؤثر هيلبرت – شميت – –
– auto-adjoint . . . . 5.4 قرين نفسه –
– compact . . . . 6.4 متراص –
– – dans un espace de Hilbert . . . . 6.4 في فضاء هيلبرت – –
– complètment continu . . . . 6.4 مستمر تماماً –
– de dimension finie . . . . 2.9 ، 6.4 ذو بعد منته –

- de Fredholm . . . . 2.9 فريدولم –
- de Hilbert-Schmidt . . . . 2.9 هيلبرت – شميت –
- - (compacité) . . . . 2.ت (التراص) – –
- identique . . . . 5.4 الـ – المطابق
- inverse . . . . 5.4 الـ – المقلوب
- inversible . . . . 5.4 قابل للقلب –
- linéaire . . . . 5.4 خطي –
- - borné . . . . 5.4 محدود – –
- - continu . . . . 5.4 مستمر – –
- - fermé . . . . 5.4 مغلق – –
- - (graphe d'un) . . . . 5.4 (بيان) – –
- nul . . . . 5.4 منعدم –
- de projection orthogonale . . . . 5.4 الإسقاط العمودي (أو المتعامد) –
- de Volterra . . . . 2.9 ، 6.4 فولترّا –

Opération de fermeture dans عملية غلق في
un espace métrique 2.2 فضاء متري
- - dans un espace topologique . . . . . . 6.2 في فضاء طوبولوجي – –

Opérations sur les distributions . . . . 4.4 عمليات على التوزيعات
- sur les ensembles . . . . 1.1 على المجموعات –
- sur les fonctionnelles . . . . 2.4 على التابعيات –
- sur les fonctions mesurables . . . . 4.5 على التوابع القابلة للقياس –

Ordre, bon . . . . 4.1 ترتيب ، جيد
- d'une fonctionnelle sur un espace تابعية على فضاء –
d'énombrablement normé . . . . 1.4 نظيمي عدودياً
- partiel . . . . 4.1 جزئي –
- - des topologies . . . . 5.2 لطوبولوجيات – –
- total . . . . 4.1 كلي –

Orthogonalité des vecteurs . . . . 4.3 تعامد أشعة

Orthoprojecteur . . . . 5.4 المسقط المتعامد (أو العمودي)

Oscillation d'une fonction . . . . 6.2 تذبذب تابع

«Ou» exclusif . . . . 1.1 «أو» المانعة

«Ou» inclusif . . . . 1.1 «أو» الشاملة

P

Parallélipipède fondamental . . . . 2.3 ، 7.2 متوازي الوجوه الأساسي
Partie d'un ensemble . . . . 1.1 جزء مجموعة

Passage à la limite sous le signe الانتقال إلى النهاية تحت
de l'intégrale de Lebesque . . . . 5.5 رمز تكامل لوبيغ
– – – – de Stieltjes . . . . 6.6 ستيلجاس – – – –

Pavé hilbertien . . . . 8.2 بلاطة هيلبرتية

Poids . . . . 3.7 وزن

Point d'accumulation d'un نقطة تراكم مجموعة
ensemble dans un espace métrique . . . . 2.2 في فضاء متري
– – – dans un espace topologique . . . 5.2 في فضاء طوبولوجي – – –
– adhérent à un ensemble dans un – ملاصقة لمجموعة في
espace métrique . . . . 5.2 فضاء متري
– – dans un espace topologique . . . . . . 5.2 في فضاء طوبولوجي – –
– de discontinuité de première espèce . . . . 1.6 تقطع من النوع الأول –
– fixe d'une application . . . . 4.2 صامدة (أو ثابتة) لتطبيق –
– intérieur d'un ensemble . . . . 2.2 داخلية لمجموعة –
– invisible à droite . . . . 1.6 غير مرئية من اليمين –
– – à gauche . . . . 1.6 من اليسار – – –
– isolé . . . . 2.2 منعزلة –

– régulier d'un élément d'une algèbre . . . . 2.ت جبر – نظامية من عنصر

– – pour un opérateur . . . . 5.4 لمؤثر – –

Points d'un espace métrique . . . . 1.2 نقاط فضـاء متري

– d'un espace topologique . . . . 5.2 فضـاء طوبولوجي –

– indépendants . . . . 2.3 مستقلة –

– de première espèce et de seconde espèce de l'ensemble triadique de Cantor . . . . 2.2 من النوع الأول ومن النوع الثاني في مجموعة كانتور ثلاثية –

Polynômes d'Hermite . . . . 3.7 كثيرات حدود هيرميت

– de Laguerre . . . . 3.7 كثيرات حدود لاغير

– de Legendre . . . . 3.7 لوجاندر – –

– orthogonaux par rapport à un poids . . . . 3.7 متعامدة بالنسبة لوزن –

– – – – discret . . . . 3.7 غير متصل – – – –

– de Tchébychev . . . . 3.7 تشيبيتشـاف –

Précompacité . . . . 6.2 شبه التراص

Presque Partout . . . . 4.5 أيما (أو حيثما) كان تقريباً

Primitive d'une distribution . . . . 4.4 تابع أصلي لتوزيع

Principe des contractions . . . . 4.2 مبدأ التقليصـات

– – généralisé . . . . 4.2 المعمم – –

– de dualité . . . . 1.1 الثنوية –

Problème de Cauchy . . . . 4.2 مسـألة كوشي

– – pour l'équation de la chaleur . . . . 4.8 لمعادلة الحرارة – –

– – – – (sur le plan) . . . . 4.8 (على المستوى) – – – –

– correct . . . . 2.9 مضبوطة –

– incorrect . . . . 2.9 غير مضبوطة –
– de Lusin . . . . 1.8 لوزين –

Procédé diagonal de Cantor . . . . 3.1 طريقة كانتور القطرية
– d'orthogonalisation . . . . 4.3 المعامدة –

Produit direct de deux ensembles . . . . 6.5 جداء مباشر لمجموعتين
– – d'une famille d'ensembles . . . . 6.5 لجماعة مجموعات – –
– de mesures . . . . 6.5 قياسات –
– d'opérateurs . . . . 5.4 مؤثرات –
– ordinal . . . . 4.1 ترتيبي –
– scalaire . . . . 4.3 سلمي –
– – dans un espace complexe . . . . 4.3 في فضاء عقدي – –
– – dans L_2 . . . . 2.7 L_2 في – –

Prolongement d'une fonctionnelle . . . . 2.3 تمديد (أو امتداد) تابعية
– d'une mesure . . . . 2.5 قياس –
– – selon Jordan . . . . 3.5 حسب جوردان – –
– – selon Lebesgue . . . . 3.5 حسب لوبيغ – –

Propriété (C) . . . . 4.5 (C) خاصية
– caractéristique des espaces euclidiens . 4.3 مميزة للفضاءات الاقليدية –
– héridit aire . . . . 5.2 وراثية –
– du parallelogramme . . . . 4.3 متوازي الوجوه –

. . . . 3.1 خاصيات المجموعات القابلة للعد
Propriétés des ensembles dénombrables . . . .
– des fonctions absolument continues . . . . 4.6 التوابع المستمرة مطلقاً –
– de l'intégrale de Lebesgue . . . . 7.5 تكامل لوبيغ –
– – de Riemann-Stieltjes . . . . 6.6 ريمان–ستيلجاس – –
– de la transformation de Fourier . . . . 4.8 تحويل فوريي – –
– – de la variation totale d'une fonction . . . 2.6 التغيّر الكلي لتابع – –

Puissance d'un ensemble . . . . 3.1 قوة مجموعة
– – d'une famille d'ensembles . . . . 6.5 جماعة مجموعات –

R

Radical d'une algèbre de Banach . . . . 4. جذر جبر لباناخ ت

Rayon spectral d'un élément نصف القطر الطيفي لعنصر
d'une algère . . . . 2. من جبر ت
– – d'un opérateur . . . . 5.4 لمؤثر – –

Recouvrement . . . . 5.2 تغطية
– fermé . . . . 5.2 مغلقة –
– ouvert . . . . 5.2 مفتوحة –

Récurrence transfinie . . . . 4.1 تدريج لا منته

Référentiel . . . . 1.1 مرجع

Réflexivité . . . . 2.1 انعكاسية

Régularité complète d'un espace النظامية التامة لفضاء
topologique . . . . 5.2 طوبولوجي

Relation binaire . . . . 2.1 علاقة ثنائية
– d'équivalence . . . . 2.1 تكافؤ –
– d'ordre . . . . 4.1 ترتيب –
– de Parseval . . . . 4.3 بارسفال –
– – pour le systéme trigonométrique . . . . 3.7 لجملة مثلثية – –

ε–réseau . . . . 7.2 شبكة – ε

Résolvante d'un élément d'une algèbre . . . . . . 2. حالة عنصر جبر ت

– d'un opérateur . . . . 5.4 مؤثر –

Réunion d'ensembles . . . . 1.1 اتحاد مجموعات

S

Saut d'une fonction en un point . . . . 1.6 قفزة تابع عند نقطة

Section commençante . . . . 4.1 مقطع مبتدئ
– finissante . . . . 4.1 متناه –

Segment fermé . . . . 2.3 قطعة مستقيمة (أو مجال) مغلق (ة)
– ouvert . . . . 2.3 مفتوح (ة) – –

Semi-continuité d'une fonction نصف استمرار تابع
sur un espace métrique . . . . 6.2 على فضاء متري

Séparabilité de l'espace L_2 . . . . 2.7 L_2 قابلية الفضاء للفصل
– des sous espaces d'un espace – الفصل لفضاءات جزئية من
métrique séparable . . . . 4.3 فضاء متري قابل للفصل

Séparation des points à l'aide des فصل النقاط بواسطة
fonctionnelles linéaires . . . . 1.4 تابعيات خطية

Série de Fourier . . . . 1.8 ، 3.7 ، 5.3 ، 4.3 سلسلة فوريي
– – (convergence) . . . . 1.8 (تقارب) – –
– – (convergence uniforme) . . . . 1.8 (تقارب منتظم) – –
– – par rapport à un système – – بالنسبة لجملة
orthogonal . . . . 3.7 متعامدة
– trigonométrique de Fourier . . . . 3.7 مثلثية لفوريي –
– – – (forme complexe) . . . . 3.7 (الشكل العقدي) – – –
– – – d'une fonction de plusieurs – – – لتابع متعدد
variables . . . . 3.7 المتغيرات

– – – sur un segment arbitraire . . . 3.7 على قطعة مستقيمة ما – – –

Simplexe . . . . 2.3 بسيط
Singleton . . . . 3.1 وحيد العنصر
Somme directe . . . . 4.3 مجموع مباشر
– – de σ– algèbres . . . . 3.5 لِـ σ – جبور – –
Somme directe d'une infinité dénom- لمجموعة قابلة للعد – –
brable d'espaces de Hilbert . . . . 4.3 من فضاءات هيلبرت
– d'ensembles . . . . 1.1 مجموعات –
– d'opérateurs . . . . 5.4 مؤثرات –
– ordinale . . . . 4.1 ترتيبي –

Sommes de Darboux . . . . 5.5 مجاميع داربو
– de Féjer . . . . 2.8 فيجير –

Sommet d'un simplexe . . . . 2.3 رأس بسيِّط

Sous-additivité . . . . 1.5 الجمعية الجزئية
– dénombrable . . . . 2.5 القابلة للعد – –

Sous-ensemble . . . . 1.1 مجموعة جزئية

Sous espace d'un espace de Hilbert 4.3 فضاء جزئي من فضاء هيلبرت
– d'un espace métrique . . . . 1.2 من فضاء متري – –
– d'un espace topologique . . . . 5.2 من فضاء طوبولوجي –
– fermé d'un espace normé . . . . 3.3 مغلق من فضاء نظيمي –
– propre . . . . 1.3 ذاتي –
– supplémentaire orthogonal المكمل المتعامد –
d'un sous-espace . . . . 4.3 لفضاء جزئي
– vectoriel . . . . 1.3 شعاعي –
– des zéros d'une fonctionnelle أصفار تابعية –
linéaire . . . . 1.3 خطية

Sous-recouvrement . . . . 5.2 تغطية جزئية

Soustraction des ensembles 1.1
Spectre continu . . . . 5.4 طيف مستمر
– d'un élément d'une algèbre . . . . 2. عنصر من جبر ت –
– d'un opérateur . . . . 5.4 مؤثر –
– – compact dans un espace – – متراص في فضاء
de Hilbert . . . . 2.9 لهيلبرت
– ponctuel . . . . 5.4 نقطي –

متتالية متقاربة في فضاء متري 2.2 . . . .
Suite convergente dans un espace métrique . . . .
– – dans un espace topologique . . . . . . 5.2 في فضاء طوبولوجي – –
– de Cauchy . . . . 3.2 لـكوشي –
– exhaustive . . . . 2.6 معمقة –
– faiblement convergente . . . . 3.4 متقاربة بضعف –
– fortement convergente . . . . 3.4 متقاربة بقوة –
– stationnaire . . . . 5.2 ، 3.2 مستقرة –

Support d'une charge . . . . 4.3 حامل شحنة
– d'un espace topologique . . . . 5.2 فضاء طوبولوجي –

Surjection . . . . 2.1 تطبيق غامر

Symétrie . . . . 2.1 تناظر

Système complet d'éléments d'un جملة تامة من عناصر
espace normé . . . . 4.3 ، 3.3 فضاء نظيمي
– fondamental de voisinages . . . . 5.2 أساسية من الجوارات –
– de Haar . . . . 3.7 هار –
– linéairement dépendant . . . . 1.3 غير مستقلة خطياً –
– – indépendant . . . . 1.3 مستقلة خطياً –
– de Rademacher . . . . 3.7 رادماشر –
– orthogonal . . . . 4.3 متعامدة –
– orthonormé . . . . 4.3 متعامد ومتجانس –

– – fermé . . . . 4.3 مغلق – – –
– total . . . . 4.3 كلي –
– trigonométrique . . . . 3.7 مثلثي –
– – sur le plan . . . . 3.7 على المستوى – –
– – sur le segment [0, π] . . . . 3.7 [0, π] على القطعة المستقيمة – –
– de Walsh . . . . 3.7 والش –

Systèmes orthogonaux dans un produit d'espaces . . . . 3.7 الجمل المتعامدة في جداء فضاءات

T

Théorème de l'algèbre quotient . . . . 3. نظرية جبر النسبة ت
– d'Arzelà . . . . 7.2 أرزيلا –
– de Baire . . . . 3.2 بير –
– de Banach sur le graphe fermé . . . . . . 5.4 باناخ حول البيان المغلق –
– – sur l'opérateur inverse . . . . 5.4 حول المؤثر المقلوب – –
– de Banach-Steinhaus . . . . 2. باناخ–ستينهاوس ت –
– des boules emboîtées . . . . 3.2 الكرات المتداخلة –
– de Cantor-Bernstein . . . . 3.1 كانتور–بارنشتاين –
– de Carleson . . . . 1.8 كارلسون –
– de la comparabilité des nombres ordinaux . . . . 4.1 قابلية الأعداد الترتيبية للمقارنة –
– de la continuité d'une application composée . . . . 5.2 استمرار تطبيق مركب –
– d'Egorov . . . . 4.5 ايغوروف –
– de Fatou . . . . 5.5 فاتو –
– de Fejér . . . . 2.8 ، 3.7 فيجير – –
– – dans l'espace L_1 . . . . 2.8 L_1 في الفضاء –
– de Fredholm pour les équations فريدولم للنوى –

à noyaux dégénérés . . . . 2.9 المنحلة
– de Fubini . . . . 5.6 فوبيني –
– –, petit . . . . 1.6 الصغيرة ، – –
–, généralisé d'Arzelà . . . . 7.2 آرزلا المعممة –
–de Guelfand-Naïmark . . . . 4. ت غالفوند – نايمارك –
– de Hahn-Banach . . . . 1.3 هان – باناخ –
– – (cas complexe) . . . . 2.3 (الحالة العقدية) – –
– – dans un espace normé . . . . 1.4 في فضـاء نظيمي – –
– – – – (cas complexe) . . . . 1.4 (الحالة العقدية) – – – –
– de Hausdorff . . . . 4.1 هوسدورف –
– de Hilbert-Schmidt . . . . 6.4 هيلبرت – شميت –
– de l'intersection des anneaux . . . . 5.1 تقاطع الحلقات –
– – des topologies . . . . 5.2 الطوبولوجيات – –
– de Lebesgue sur la détermination لوبيغ حول تعيين –
d'une fonction absolument continue تابع مستمر مطلقاً –
d'après sa dérivée . . . . 4.6 انطلاقاً من مشتقه
– – sur la dérivabilité d'une fonction حول قابلية – –
monotone . . . . 1.6 تابع رتيب للاشتقاق
– – sur le passage à la limite . . . . . . 5.5 حول الانتقال إلى النهاية – –
– de B. Levi . . . . 5.5 ب . لوفي –
– de Lusin . . . . 4.5 لوزين –
– de la normalité d'un compact . . . . 6.2 ناظمية متراص
– de l'orthogonalisation . . . . 4.3 المعامدة –
– de Péano . . . . 7.2 بيانو –
– de Picard . . . . 4.2 بيكار –
– de Plancherel . . . . 5.8 بلونشرال –
– de Radon-Nikodym . . . . 8.8 رادون – نيكوديم –
– du rayon spectral . . . . 2. ت نصف القطر الطيفي –
– de Riesz-Fischer . . . . 4.3 ريس – فيشر –
– spectral pour les opérateurs (ال) – الطيفية للمؤثرات

autoadjoints . . . . 4. ت القرينة لنفسها

– – pour les opérateurs bornés . . . . 4. ت – – للمؤثرات المحدودة

– de Stone-Čech . . . . 4. ت – ستون–تشاش

– de Stone-Weierstrass . . . . 4. ت – ستون–فايرشتراس

– de Tikhonov . . . . 4. ت – تيخونوف

– de Weierstrass . . . . 3.9 ، 2.8 ، 3.7 ، 4.3 ، 3.3 – فايرشتراس

– de Wiener . . . . 4. ت فينر

– de Zermelo . . . . 4.1 زارمولو

Théorèmes de Fredholm pour les équations à noyaux non dégénérés . . . 2.9 نظريات فريدولم للمعادلات ذات النوى غير المنحلة

– de Helly: premier, deuxième . . . . 6.6 – هيلي : الأولى ، الثانية

Théorie des ensembles . . . . 1.1 نظرية المجموعات

– – naïve . . . . 4.1 – – الساذجة

Topologie . . . . 5.2 طوبولوجيا

– sur l'ensemble des idéaux maximaux . . . . 4. ت – على مجموعة المثاليات الأعظمية

– dans un espace dénombrablement normé . . . . 5.3 – في فضاء نظيمي عدودياً

– faible . . . . 3.4 ، 2.4 الـ – الضعيفة

– – de l'espace dual . . . . 3.4 – – للفضاء الثنوي

– *-faible . . . . 3.4 – * – الضعيفة

– forte . . . . 2.4 – القوية

– minimale engendrée par une famille d'ensembles . . . . 5.2 – الأصغرية المولدة عن جماعة مجموعات

– nucléaire convexe . . . . 5.3 – النووية المحدبة

– triviale . . . . 5.2 – تافهة (أو بديهية)

Trace d'une famille d'ensembles sur un sous-ensemble . . . . 5.2 أثر جماعة مجموعات على مجموعة جزئية

Transfini . . . . 4.1 لا متناه
– ω . . . . 4.1 ω –
– ω_1 . . . . 4.1 ω_1 –

Transformation de Fourier . . . . 4.8 تحويل فوريي
– – d'une convolution . . . . 4.8 لتزويج – –
– – des distributions . . . . 8.8 التوزيعات – –
– – – (exemples) . . . . 8.8 (أمثلة) – – –
– – dans l'espace L_2 . . . . 5.8 L_2 في الفضاء – –
– – d'une fonctionnelle . . . . 1.9 تابعية – –
– – d'une fonction à décroissance rapide 4.8 تابع سريع التناقص – –
– – de plusieurs variables . . . . 4.8 متعدد المتغيرات – – –
– de Fourier-Stieltjes . . . . 7.8 فوريي – ستيلجاس –
– de Laplace . . . . 6.8 لابلاس –

Transformée de Fourier . . . . 4.8 متحولة فوريي
– de Fourier-Stieltjes . . . . 7.8 فوريي – ستيلجاس –
– de Laplace . . . . 6.8 لابلاس –

Transitivité . . . . 2.1 التعدي

Treillis . . . . 4.1 مجموعة شبكية

Type d'ordre . . . . 4.1 نمط ترتيب
– – ω . . . . 4.1 ω – –
– – ω_1 . . . . 4.1 ω_1 – –

U

Unité d'une algèbre . . . . 1. وحدة جبر ت
– d'une famille d'ensembles . . . . 5.1 جماعة مجموعات –

Valeur propre . . . . 5.4 قيمة ذاتية

– régulière . . . . 5.4 نظامية –

Variable aléatoire . . . . 6.6 متغيّر عشوائي

– – discrète . . . . 6.6 غير متصل – –

– – continue . . . . 6.6 مستمر – –

Variance . . . . 6.6 تغاير

Variation inférieure d'une charge . . . . 7.8 التغير الأدنى لشحنة

– supérieure d'une charge . . . . 7.8 الأعلى لشحنة –

– totale d'une fonction . . . . 2.6 الكلي لتابع –

Variété linéaire . . . . 3.3 منوعة خطية

– – dans un espace de Hilbert . . . . 4.3 في فضاء هيلبرت – –

– – des fonctions absolument للتوابع المستمرة – –

continues . . . . 4.6 مطلقاً

Vecteurs orthogonaux . . . . 4.3 أشعة متعامدة

Voisinage d'un ensemble . . . . 5.2 جوار مجموعة

– d'un point . . . . 5.2 ، 2.2 نقطة –

الفهرس

المقدمة 5

الفصل الأول . مبادئ في نظرية المجموعات 7

§ 1. مفهوم المجموعة . عمليات على المجموعات 7

1. عموميات 7
2. عمليات على المجموعات 8

§ 2. التطبيقات . تجزئة مجموعة 11

1. تطبيق من مجموعة في أخرى . المفهوم العام للتابع 11
2. تجزئة مجموعة . علاقة التكافؤ 14

§ 3. المجموعات المتساوية القوة . قوة المجموعة 18

1. المجموعات المنتهية وغير المنتهية 18
2. المجموعات القابلة للعد 20
3. المجموعات المتساوية القوة 23
4. عدم قابلية العد لمجموعة الأعداد الحقيقية 25
5. نظرية كانتور - بارنشتاين (Cantor–Bernstein) 28
6. مفهوم قوة مجموعة 29

§ 4. المجموعات المرتبة . الأعداد اللامتناهية 33

1. المجموعات المرتبة 33
2. التطبيقات المحافظة على الترتيب 34

3. أنماط الترتيب. المجموعات المرتبة كلياً 35
4. المجموع الترتيبي للمجموعات المرتبة كلية 36
5. المجموعات المرتبة جيداً. الأعداد اللامتناهية 37
6. مقارنة الأعداد الترتيبية 41
7. مسلمة الإختيار ونظرية زارمولو (Zermelo) وما يكافئهما . . . 44
8. التدريج اللامتناهي 46

§ 5. جماعات المجموعات 48

1. حلقة المجموعات 48
2. نصف – حلقة المجموعات 50
3. الحلقة المولدة عن نصف – الحلقة 53
4. σ – جبور 54
5. جماعات المجموعات والتطبيقات 55

الفصل الثاني. الفضاءات المترية والطوبولوجية 57

§ 1. مفهوم الفضاء المتري 57

1. تعريف وأمثلة 57
2. التطبيقات المستمرة من فضاء متري في آخر التطبيق الأيزومتري 67

§ 2. التقارب. المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة 69

1. نقاط التراكم. الملاصق 69
2. التقارب 72
3. المجموعات الجزئية الكثيفة 73
4. المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة 75
5. المجموعات المفتوحة والمغلقة على المستقيم 77

§ 3. الفضاءات المترية التامة **83**

1. تعريف وأمثلة لفضاءات مترية تامة 83
2. نظرية الكرات المتداخلة 88
3. نظرية بير (Baire) 90

§ 4. مبدأ التقليصات وتطبيقاته **95**

1. تطبيقات بسيطة لمبدإ التقليصات 97
2. نظريات الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية 100
4. تطبيق لمبدإ التقليصات على المعادلات التكاملية 104

§ 5. الفضاءات الطوبولوجية **107**

1. تعريف وأمثلة للفضاءات الطوبولوجية 107
2. مقارنة الطوبولوجيات 110
3. جمل الجوارات. الأساس. مسلمات قابلية العد 111
4. المتتاليات المتقاربة في T 117
5. التطبيقات المستمرة. الهوميومورفسم (المستشاكل) 118
6. مسلمات الفصل 121
7. طرق مختلفة لتعريف الطوبولوجيا على فضاء. قابلية المسافة . 125

§ 6. التراص **127**

1. مفهوم التراص 127
2. التطبيقات المستمرة في الفضاءات المتراصة 130
3. التوابع المستمرة المعرّفة على فضاء متراص 131
4. التراص القابل للعد (أو العدودي) 135
5. المجموعات شبه المتراصة 138

§ 7. التراص في الفضاءات المترية **139**

1. المجموعات المحدودة كلية 139

2. الفضاءات المحدودة كلية والتراص 141
3. المجموعات شبه المتراصة في فضاء متري 143
4. نظرية آرزيلا (Arzela) 144
5. نظرية بيانو (Péano) 147
6. الإستمرار المنتظم. التطبيقات المستمرة في التراصات المترية 150
7. نظرية آرزيلا المعممة 155

§ 8. المنحنيات المستمرة في الفضاءات المترية 153

الفصل الثالث. الفضاءات الشعاعية النظيمية والطوبولوجية . 161

§ 1. الفضاءات الشعاعية 161

1. تعريف وأمثلة لفضاءات شعاعية 161
2. الارتباط الخطي 164
3. الفضاءات الشعاعية والجزئية 165
4. فضاءات النسبة 167
5. التابعيات الخطية 168
6. التفسير الهندسي للتابعيات الخطية 170

§ 2. المجموعات المحدبة والتابعيات المحدبة.
نظرية هان - باناخ (Hahn–Banach) 174

1. المجموعات المحدبة والحقول المحدبة 174
2. التابعيات المحدبة 177
3. تابعية مينكوفسكي (Minkowski) 178
4. نظرية هان - باناخ (Hahn–Banach) 181
5. فصل المجموعات المحدبة في فضاء شعاعي 185

§ 3. الفضاءات النظيمية 187

1. تعريف وأمثلة لفضاءات نظيمية 187
2. الفضاءات الجزئية من فضاء نظيمي 190

§ 4. الفضاءات الاقليدية 192

1. تعريف فضاء إقليدي 192
2. أمثلة 195
3. وجود أسس متعامدة. المعامدة 198
4. متراجحة بسل (Bessel). الجمل المتعامدة المغلقة 201
5. الفضاءات الاقليدية التامة. نظرية ريس - فيشر
(Riesz - Fisher) 206
6. فضاء هيلبرت (Hilbert). نظرية التشاكل 209
7. الفضاءات الجزئية، التعامد، المجموع المباشر 213
8. الخاصيات المميزة للفضاءات الاقليدية 218
9. الفضاءات الاقليدية العقدية 222

§ 5. الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية 225

1. تعريف وأمثلة 225
2. التحدب المحلي 229
3. الفضاءات النظيمية عدودياً 230

الفصل الرابع. التابعيات الخطية والمؤثرات الخطية 235

§ 1. التابعيات الخطية المستمرة 235

1. التابعيات الخطية المستمرة على فضاء شعاعي طوبولوجي . . . 235
2. التابعيات الخطية على فضاء نظيمي 237

3. نظرية هان – باناخ في فضاء نظيمي 242
4. التابعيات الخطية على فضاء نظيمي عدودياً 244

§ 2. الفضاء الثنوي 245

1. تعريف الفضاء الثنوي 245
2. الطوبولوجيا القوية على الفضاء الثنوي 246
3. أمثلة لفضاءات ثنوية 249
4. الفضاء الثنوي المكرر 256

§ 3. الطوبولوجيا الضعيفة والتقارب الضعيف 260

1. الطوبولوجيا الضعيفة والتقارب الضعيف في فضاء شعاعي طوبولوجي 260
2. التقارب الضعيف في فضاء نظيمي 262
3. الطوبولوجيا الضعيفة والتقارب الضعيف في الفضاء الثنوي . . 268
4. المجموعات المحدودة في الفضاء الثنوي 271

§ 4. التوزيعات 276

1. تعميم مفهوم التابع 276
2. فضاء توابع الأساس 278
3. التوزيعات 279
4. عمليات على التوزيعات 281
5. كفاية مجموعة توابع الأساس 285
6. تعيين توزيع انطلاقاً من معرفة مشتقه. المعادلات التفاضلية في مجموعة التوزيعات 286
7. بعض التعميمات 290

§ 5. المؤثرات الخطية 295

1. تعريف وأمثلة لمؤثرات خطية 295

2. المؤثرات الخطية المحدودة والاستمرار 299
3. مجموع وجداء المؤثرات 302
4. المؤثر المقلوب، قابلية القلب (العكس) 304
5. المؤثرات القرينة 312
6. المؤثرات القرينة في فضاء إقليدي. المؤثرات القرينة لنفسها . . 314
7. طيف مؤثر. الحالة 317

§ 6. المؤثرات المتراصة 321

1. تعريف وأمثلة لمؤثرات متراصة 321
2. الخاصيات الأساسية للمؤثرات المتراصة 327
3. القيم الذاتية لمؤثر متراص 331
4. المؤثرات المتراصة في فضاء هيلبرتي 333
5. المؤثرات المتراصة القرينة لنفسها في H 334

الفصل الخامس. القياس، التوابع القابلة للقياس، التكامل . . 341

§ 1. قياس مجموعات المستوى 342

1. قياس المجموعات الأولية 342
2. قياس لوبيغ على المستوى 347
3. تكاملات وتعميات 357

§ 2. المفهوم العام للقياس. تمديد قياس نصف حلقة إلى حلقة. . . . 361
الجمعية وَ δ - الجمعية 361

1. تعريف وأمثلة 361
2. تمديد القياس من نصف حلقة إلى الحلقة المولدة عنها 362
3. δ - الجمعية 365

§ 3. تمديد قياس حسب لوبيغ 370

1. التمديد حسب لوبيغ لقياس معرّف على نصف حلقة ذات وحدة 370
2. تمديد قياس معطى على نصف حلقة بدون وحدة 376
3. توسيع مفهوم قابلية القياس في حالة قياس δ– منته 379
4. تمديد قياس حسب جوردان (Jordan) 383
5. وحدانية امتداد قياس 386

§ 4. التوابع القابلة للقياس 389

1. تعريف وخاصيات أساسية للتوابع القابلة للقياس 389
2. عمليات على التوابع القابلة للقياس 391
3. التكافؤ 395
4. التقارب أينما كان تقريباً 396
5. نظرية أيغوروف (Egorov) 397
6. التقارب بالقياس 399
7. نظرية لوزين (Lusin). الخاصية (C) 403

§ 5. تكامل لوبيغ 404

1. التوابع البسيطة 405
2. تكامل لوبيغ من أجل التوابع البسيطة 406
3. التعريف العام لتكامل لوبيغ على مجموعة قياسها منته 410
4. δ – الجمعية والاستمرار المطلق لتوابع لوبيغ 414
5. الانتقال إلى النهاية تحت رمز تكامل لوبيغ 420
6. تكامل لوبيغ على مجموعة ذات قياس غير منته 425
7. مقارنة تكامل لوبيغ بتكامل ريمان 427

§ 6. الجداءات المباشرة لجماعات المجموعات وللقياسات 431
نظرية فوبيني (Fubini) 431

1. جداءات جماعات المجموعات 431

2. جداءات القياسات 434
3. التعبير عن قياس مجموعة من المستوى بدلالة تكامل القياس الخطي لمقاطعه. التعريف الهندسي لتكامل لوبيغ 438
4. نظرية فوبيني (Fubini) 442

الفصل السادس. تكامل لوبيغ غير المحدود. نظرية الاشتقاق . 447

§ 1. التوابع الرتيبة. قابلية اشتقاق التكامل بالنسبة لحده الأعلى . . . 448

1. الخاصيات الأساسية للتوابع الرتيبة 448
2. قابلية اشتقاق تابع رتيب 453
3. مشتق تكامل بالنسبة لحده الأعلى 463

§ 2. التوابع ذات التغيّر المحدود 464

§ 3. مشتق التكامل غير المحدود للوبيغ 472

§ 4. البحث عن تابع انطلاقاً من معرفة مشتقه. التوابع المستمرة مطلقاً 475

§ 5. تكامل لوبيغ بصفته تابع مجموعة. نظرية رادون - نيكوديم (Radon - Nikodym) 488

1. الشحنات. تفكيكات هان وجوردان (Hahn, Jrodan) 488
2. أهم أنواع الشحنات 493
3. الشحنات المستمرة مطلقاً. نظرية رادون - نيكوديم 493

§ 6. تكامل ستيلجاس (Stieltjes) 498

1. قياسات ستيلجاس 498
2. تكامل لوبيغ - ستيلجاس 501
3. بعض التطبيقات لتكامل لوبيغ - ستيلجاس في نظرية الاحتمالات 503

4. تكامل ريمان – ستيلجاس (Riemann – Stieltjes) 506
5. الانتقال إلى النهاية تحت رمز تكامل ستيلجاس 511
6. الشكل العام للتابعيات الخطية المستمرة على فضاء التوابع المستمرة 516

الفصل السابع. فضاءات التوابع القابلة للجمع 523

§ 1. الفضاء L_1 523

1. التعريف والخاصيات الأساسية للفضاء L_1 523
2. المجموعات الكثيفة أينما كان في L_1 526

§ 2. الفضاء L_2 531

1. التعريف والخاصيات الأساسية 531
2. حالة فضاء قياسيه غير منته 536
3. المجموعات الكثيفة أينما كان في L_1. نظرية التشاكل 538
4. الفضاء L_2 العقدي 540
5. التقارب بالمتوسط التربيعي وعلاقته بأنواع أخرى من تقاربات متتاليات التوابع 541

§ 3. الجمل المتعامدة المؤلفة من توابع في L_2. السلاسل بالنسبة لجملة متعامدة 544

1. الجملة المثلثية. الجملة المثلثية لفوريي (Fourier) 544
2. الجملة المثلثية على القطعة $[0, \pi]$ 548
3. سلسلة فوريي في شكلها العقدي 549
4. كثيرات حدود لوجاندر (Legendre) 551
5. الجمل المتعامدة في جداء فضاءات. سلاسل فوريي المضاعفة . 553
6. كثيرات الحدود بالنسبة لوزن معطى 557

7. الأساس المتعامد في الفضاء $L_2(-\infty, \infty)$. توابع هيرميت (Hermite) 559
8. كثيرات الحدود المتعامدة بالنسبة لوزن غير متصل 561
9. جمل هار (Haar) ، رادماشر (Rademacher) ، والش (Walsh) . . . 564

الفصل الثامن . السلاسل المثلثية . تحويل فوريي 567

§ 1. شروط تقارب سلسلة فوريي 567

1. شروط كافية لتقارب سلسلة فوريي عند نقطة 567
2. شروط التقارب المنتظم لسلسلة فوريي 575

§ 2. نظرية فيجير (Fejer) 578

1. نظرية فيجير 579
2. تمام الجملة المثلثية . نظرية فايرشتراس (Weierstrass) 582
3. نظرية فيجير في الفضاء L_1 583

§ 3. تكامل فوريي 584

1. نظرية أساسية 584
2. تكامل فوريي في شكله العقدي 588

§ 4. تحويل فوريي ، خاصيات وتطبيقات 589

1. تحويل فوريي ودستور القلب 589
2. الخاصيات الأساسية لتحويل فوريي 594
3. تمام جملتي توابع هيرميت ولاغير (Laguerre) 598
4. تحويل فوريي للتوابع القابلة للاشتقاق لانهائياً والسريعة التناقص . 599
5. تحويل فوريي والتزويج 601
6. تطبيق تحويل فوريي على معادلة الحرارة 602

7. تحويل فوريي للتوابع المتعددة المتغيرات 604

§ 5. تحويل فوريي في الفضاء $L_2(-\infty, \infty)$ 608

1. نظرية بلونشرال (Plancherel) 609
2. تابع هيرميت 612

§ 6. تحويل لابلاس (Laplace) 616

1. تعريف تحويل لابلاس وخاصياته الأساسية 616
2. تطبيق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية (الطريقة المؤثرية) 618

§ 7. تحويل فوريي – ستيلجاس 621

1. تعريف تحويل فوريي – ستيلجاس 621
2. تطبيقات تحويل فوريي – ستيلجاس في نظرية الاحتمالات . . 623

§ 8. تحويل فوريي للتوزيعات 626

الفصل التاسع . المعادلات الخطية 631

§ 1. التعاريف الرئيسية . بعض المسائل المؤدية إلى المعادلات التكاملية . 631

1. أنواع المعادلات التكاملية 631
2. أمثلة لبعض المسائل المؤدية إلى معادلات تكاملية 633

§ 2. معادلات فريدولم التكاملية 636

1. مؤثر فريدولم التكاملي 636
2. المعادلات ذات النوى المتناظرة 640

3. نظريات فريدولم . حالة النوى المنحلة 642
4. نظريات فريدولم في حالة المعادلات ذات النوى غير المنحلة . 646
5. معادلات فولترا 652
6. المعادلات التكاملية من النوع الأول 653

§ 3. **المعادلات التكاملية المتعلقة بوسيط . طريقة فريدولم 655**

1. طيف مؤثر متراص في H 655
2. البحث عن الحل على شكل سلسلة لِـ λ. معينات فريدولم . . 656

الفصل العاشر . مبادئ في الحساب التفاضلي في فضاء شعاعي 663

§ 1. **المفاضلة في فضاء شعاعي 663**

1. التفاضلية القوية (تفاضلية فريشي Fréchet) 663
2. التفاضلية الضعيفة (تفاضلية غاتو Gâteaux) 666
3. دستور التزايدات المنتهية 667
4. علاقة مفهوم التفاضلية القوية بمفهوم التفاضلية الضعيفة . . . 668
5. التابعيات التفاضلية 671
6. التوابع المجردة 671
7. التكامل 672
8. المشتقات ذات الرتب العالية 675
9. التفاضليات ذات الرتب العالية 678
10. دستور تايلور 678

§ 2. **مسائل القيم القصوى 680**

1. الشرط اللازم لوجود قيمة قصوى 680
2. التفاضلية الثانية . شروط كافية لوجود قيمة قصوى 685

§ 3. طريقة نيوتن 688

تكملة . جبور باناخ (Banach) بقلم تيخوميروف (Tikhomirov) 695

§ 1. تعاريف . أمثلة لجبور باناخ 695

1. جبور باناخ . تشاكل جبور باناخ 695
2. أمثلة لجبور باناخ 697
3. المثاليات الأعظمية 700

§ 2. الطيف والحالّة 701

1. تعاريف وأمثلة 702
2. خاصيات الطيف 703
3. نظرية نصف القطر الطيفي 707

§ 3. بعض النتائج التمهيدية 709

1. نظرية جبر النسبة 709
2. ثلاث توطئات 711

§ 4. النظريات الأساسية 712

1. التابعيات الخطية والمستمرة والضربية ، والمثاليات الأعظمية . . 712
2. طوبولوجيا على المجموعة $\mathcal{M}$. النظريات الأساسية 715
3. نظرية فينر (Wiener) ، تمارين 719

المراجع 725
توزيع المراجع حسب الفصول 731
المصطلحات العلمية 733
الفهرس 773